



ĐẠI HỌC CÔNG NGHỆ GTVT

Chương 4 XỬ LÝ TÍN HIỆU

1

Giảng viên: TS. Dương Quang Khánh

Bộ môn: Cơ điện tử

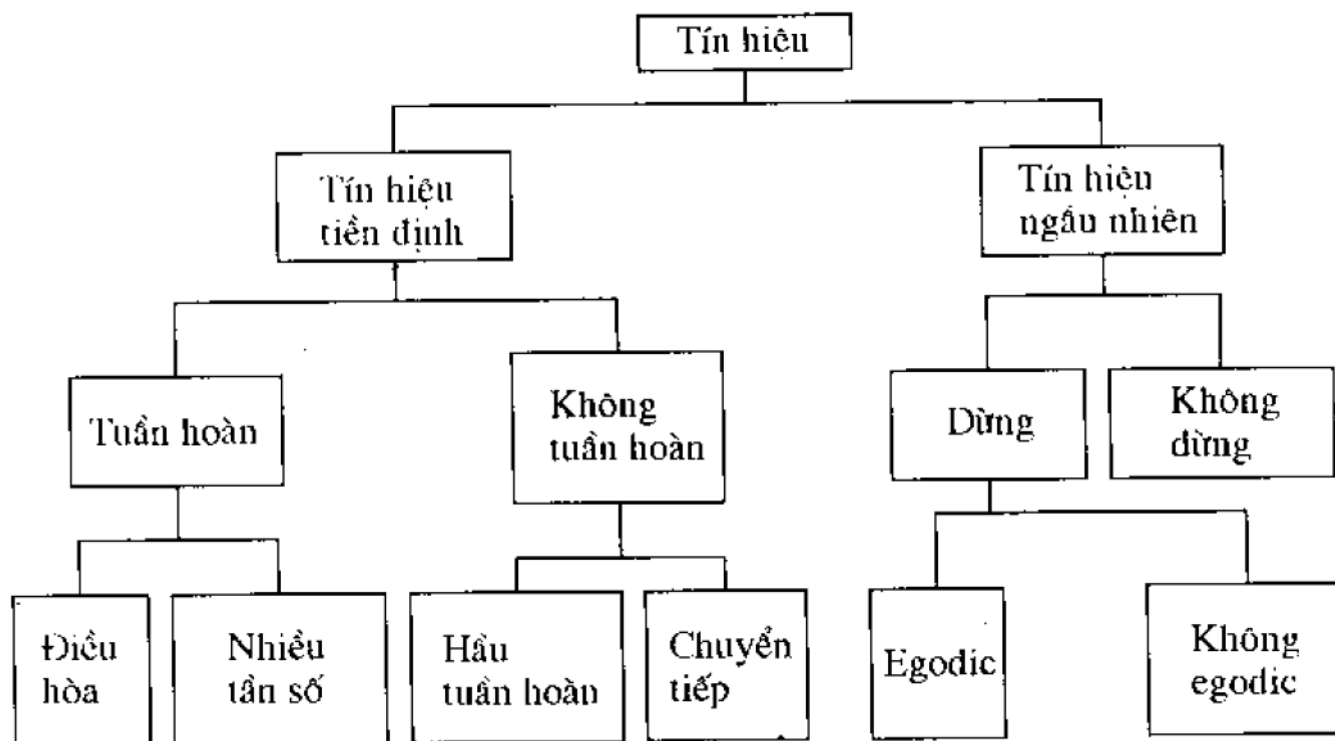
Năm học: 2018-2019

4.1. PHÂN LOẠI VÀ BIỂU DIỄN CÁC TÍN HIỆU

➤ **Tín hiệu:** là một hàm (vô hướng) của biến thời gian dưới dạng:

$$x = x(t), \quad t_0 \leq t \leq t_1$$

$[t_0, t_1]$: hữu hạn hoặc vô hạn



Hình 4.1: Phân loại tín hiệu

4.1. PHÂN LOẠI VÀ BIỂU DIỄN CÁC TÍN HIỆU

➤ Tín hiệu tiền định:

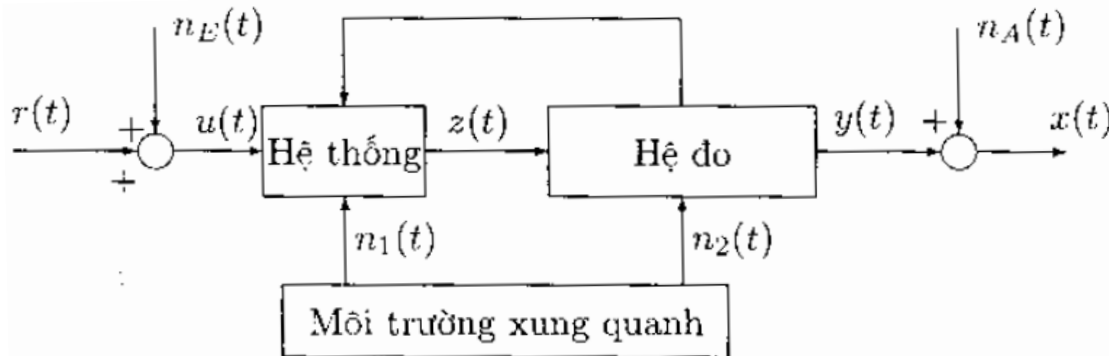
- Tín hiệu tuần hoàn
- Tín hiệu chuyển tiếp

➤ Tín hiệu ngẫu nhiên:

- $n_E(t)$: nhiễu đầu vào
- $n_A(t)$: nhiễu đầu ra
- $n_1(t), n_2(t)$: các nhiễu tác động từ bên ngoài vào hệ và thiết bị đo

- Tín hiệu đo được là tín hiệu hữu ích cộng với sự xếp chồng của các nhiễu

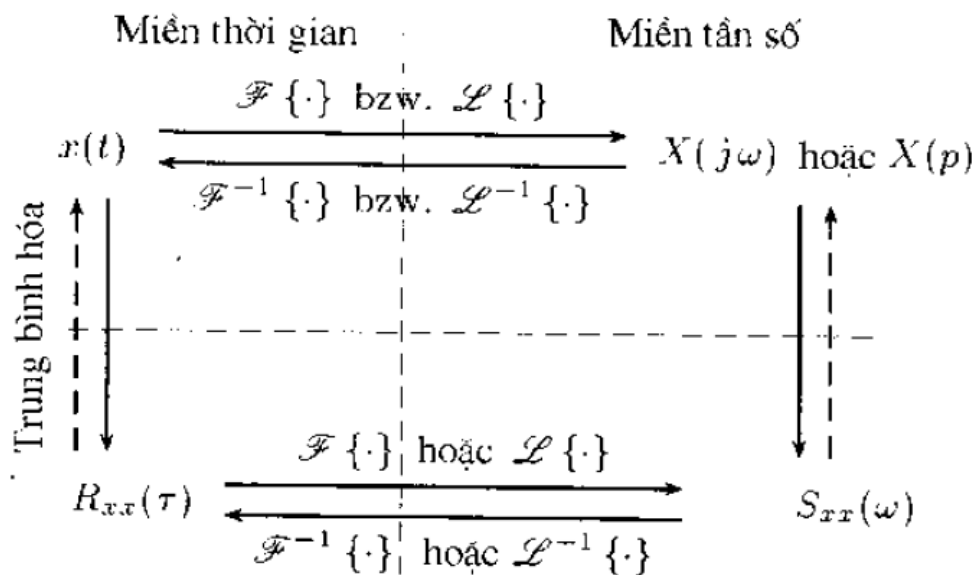
$$u(t) = r(t) + n_E(t)$$



Hình 4.2: Các khả năng xuất hiện các tín hiệu nhiễu

4.1. PHÂN LOẠI VÀ BIỂU DIỄN CÁC TÍN HIỆU

- **Phương pháp bình phương tối ưu** (Least Square Method LSE) được áp dụng rộng rãi trong các bài toán tối ưu tuyến tính, thiết kế bộ lọc hoặc điều khiển tuyến tính.
- Các tín hiệu có thể biểu diễn thông qua *miền thời gian* hoặc *miền tần số* thông qua các giá trị tín hiệu đặc trưng và các hàm tín hiệu đặc trưng. Miền thời gian và miền tần số có thể biến đổi lẫn nhau qua biến đổi **Fourier** hoặc biến đổi **Laplace**



Hình 4.3: Quan hệ giữa các dạng biểu diễn tín hiệu khác nhau

4.1.1 CÁC GIÁ TRỊ TÍN HIỆU ĐẶC TRƯNG VÀ CÁC HÀM TÍN HIỆU ĐẶC TRƯNG

Bảng 4.1: Tổng quan về các đại lượng trung quan trọng của tín hiệu (các giá trị tín hiệu đặc trưng và các hàm tín hiệu đặc trưng)

	TT	Đại lượng	Công thức
Giá trị tín hiệu đặc trưng	1	Giá trị đỉnh dương	$\hat{x} = \max_t(x(t))$
	2	Giá trị đỉnh âm	$\check{x} = \min_t(x(t))$
	3	Giá trị trung bình	$\bar{x} = \frac{1}{T} \int_0^T x(t) dt$
	4	Giá trị trung bình hiệu dụng	$\hat{x} = \left\{ \frac{1}{T} \int_0^T x^2(t) dt \right\}^{1/2}$
	5	Phương sai	$\sigma_x^2 = \frac{1}{T} \int_0^T (x(t) - \bar{x})^2 dt$
	6	Độ lệch chuẩn	σ_x
	7	Hệ số lệch	$\gamma_x = \frac{1}{\sigma_x^3} \int_0^T (x(t) - \bar{x})^3 dt$
	8	Trị số Kurtosis	$\beta_x = \frac{1}{\sigma_x^4} \int_0^T (x(t) - \bar{x})^4 dt$

4.1.1 CÁC GIÁ TRỊ TÍN HIỆU ĐẶC TRƯNG VÀ CÁC HÀM TÍN HIỆU ĐẶC TRƯNG

Bảng 4.1: Tổng quan về các đại lượng trung quan trọng của tín hiệu (các giá trị tín hiệu đặc trưng và các hàm tín hiệu đặc trưng)

Hàm tín hiệu đặc trưng	9	Hàm tự tương quan (AKI) của các tín hiệu ergodic	$R_{xx}(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T x(t)x(t+\tau)dt$
	10	Hàm mật độ phổ công suất	$S_{xx}(\omega) = \mathcal{F} \{R_{xx}(\tau)\} = \int_{-\infty}^{\infty} R_{xx}(\tau)e^{-j\omega\tau} d\tau$ ($-\infty < \omega < +\infty$)
	11	Hàm tự tương quan trung tâm của các tín hiệu ergodic	$C_{xx}(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T (x(t) - \bar{x})(x(t+\tau) - \bar{x})dt$ $C_{xx}(\tau) = R_{xx}(\tau) - \bar{x}^2$
	12	Phổ FOURIER	$X_T(j\omega) = \mathcal{F} \{x_T(t)\} = \int_{-\infty}^{+\infty} x_T(t)e^{-j\omega t} dt$ ($-\infty < \omega < +\infty$)
	13	Mật độ năng lượng	$E_x(\omega) = \lim_{T \rightarrow \infty} X_T(j\omega) ^2; \quad (-\infty < \omega < +\infty)$
	14	Hàm mật độ phổ công suất	$S_{xx}(\omega) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{ X_T(j\omega) ^2}{T}; \quad (-\infty < \omega < +\infty)$

4.1.1 CÁC GIÁ TRỊ TÍN HIỆU ĐẶC TRƯNG VÀ CÁC HÀM TÍN HIỆU ĐẶC TRƯNG

➤ Các giá trị trung bình: $\overline{g(x(t))} = \frac{1}{t_1 - t_0} \int_{t_0}^{t_1} g(x(t)) dt$

➤ Tín hiệu bị giới hạn bởi thời gian đo T:

$$x_T(t) = \begin{cases} x(t) & \text{khi } 0 \leq t \leq T \\ 0 & \text{miền còn lại} \end{cases}$$

$$t_0 = 0, t_1 = T$$

➤ Hàm tự tương quan (AKF) và phổ mật độ công suất rất thích hợp để đánh giá các tín hiệu ngẫu nhiên dừng.

4.1.1 CÁC GIÁ TRỊ TÍN HIỆU ĐẶC TRƯNG VÀ CÁC HÀM TÍN HIỆU ĐẶC TRƯNG

➤ **Ví dụ 4.1:** Các đại lượng đặc trưng của một tín hiệu tuần hoàn

Một tín hiệu đầu vào có dạng tuần hoàn $x(t) = A \sin \frac{2\pi}{T} t$ tác động lên một

khâu truyền (không quán tính) với đường đặc tính bậc 2 $y(t) = x^2(t)$. Hãy tính toán các đại lượng đặc trưng của tín hiệu đầu ra $y(t)$ theo Bảng 4.1

Lời giải:

Tín hiệu đầu ra có dạng

$$y(t) = x^2(t) = \frac{1}{2} A^2 (1 - \cos 2\Omega t), \quad \Omega = \frac{2\pi}{T}.$$

a) Các cực trị:

$$\hat{y} = A^2, \quad \check{y} = 0.$$

b) Giá trị trung bình đại số:

$$\bar{y} = \frac{A^2}{2} \frac{1}{T} \int_0^T (1 - \cos 2\Omega t) dt = \frac{A^2}{2} \left(1 - \frac{1}{2\Omega} \sin 2\Omega t\right) \Big|_0^T = 0,5 A^2.$$

Thành phần hằng số của biên độ của tín hiệu chính là giá trị này.

4.1.1 CÁC GIÁ TRỊ TÍN HIỆU ĐẶC TRƯNG VÀ CÁC HÀM TÍN HIỆU ĐẶC TRƯNG

c) Giá trị trung bình hiệu dụng:

$$\bar{y} = \frac{A^2}{2} \left\{ \frac{1}{T} \int_0^T (1 - \cos 2\Omega t)^2 dt \right\}^{1/2} \\ - \frac{A^2}{2} \left\{ \frac{1}{T} \int_0^T \left(\frac{3}{2} - 2 \cos 2\Omega t + \frac{1}{2} \cos 4\Omega t \right) dt \right\}^{1/2} = 0,6124A^2.$$

d) Phương sai:

$$\sigma_y^2 = \frac{1}{T} \int_0^T \left(-\frac{A^2}{2} \cos 2\Omega t \right)^2 dt = \frac{A^4}{4} \frac{1}{T} \int_0^T \frac{1}{2} (1 + \cos 4\Omega t) dt = \frac{1}{8} A^4$$

e) Độ lệch chuẩn:

$$\sigma_y = \frac{1}{\sqrt{8}} A^2 = 0,3536 A^2.$$

f) Hệ số lệch:

$$\gamma_y = \frac{1}{\sigma_y^3} \int_0^T \left(-\frac{A^2}{2} \cos 2\Omega t \right)^3 dt = -\sqrt{8} \int_0^T \left(\frac{3}{4} \cos \Omega t + \frac{1}{4} \cos 3\Omega t \right) dt = 0.$$

g) Trị số Kurtosis:

$$\beta_y = \frac{1}{\sigma_y^4} \int_0^T \left(-\frac{A^2}{2} \cos 2\Omega t \right)^4 dt = 4 \frac{1}{4} \int_0^T \left(\frac{3}{2} + 2 \cos 2\Omega t + \frac{1}{2} \cos 4\Omega t \right) dt \\ = \frac{3}{2} T = \frac{3\pi}{\Omega}.$$

4.1.1 CÁC GIÁ TRỊ TÍN HIỆU ĐẶC TRƯNG VÀ CÁC HÀM TÍN HIỆU ĐẶC TRƯNG

h) Hàm tự tương quan (AKF):

$$\begin{aligned} R_{yy}(\tau) &= \frac{A^4}{4} \lim_{T \rightarrow \infty} \left\{ \frac{1}{2T} \int_{-T}^T (1 - \cos 2\Omega t) (1 - \cos 2\Omega(t + \tau)) dt \right\} \\ &\quad \left. + \cos 2\Omega t \cos 2\Omega(t + \tau) dt \right\} \\ &= \frac{A^4}{4} \lim_{T \rightarrow \infty} \left\{ \frac{1}{2T} \int_{-T}^T (1 - \cos 2\Omega t - \cos 2\Omega(t + \tau) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2} \cos(4\Omega t + 2\Omega\tau) + \frac{1}{2} \cos 2\Omega\tau) dt \right\} \\ &= \frac{A^4}{4} \left(1 + \frac{1}{2} \cos 2\Omega\tau \right). \end{aligned}$$

Trong đó ta sử dụng quan hệ lượng giác

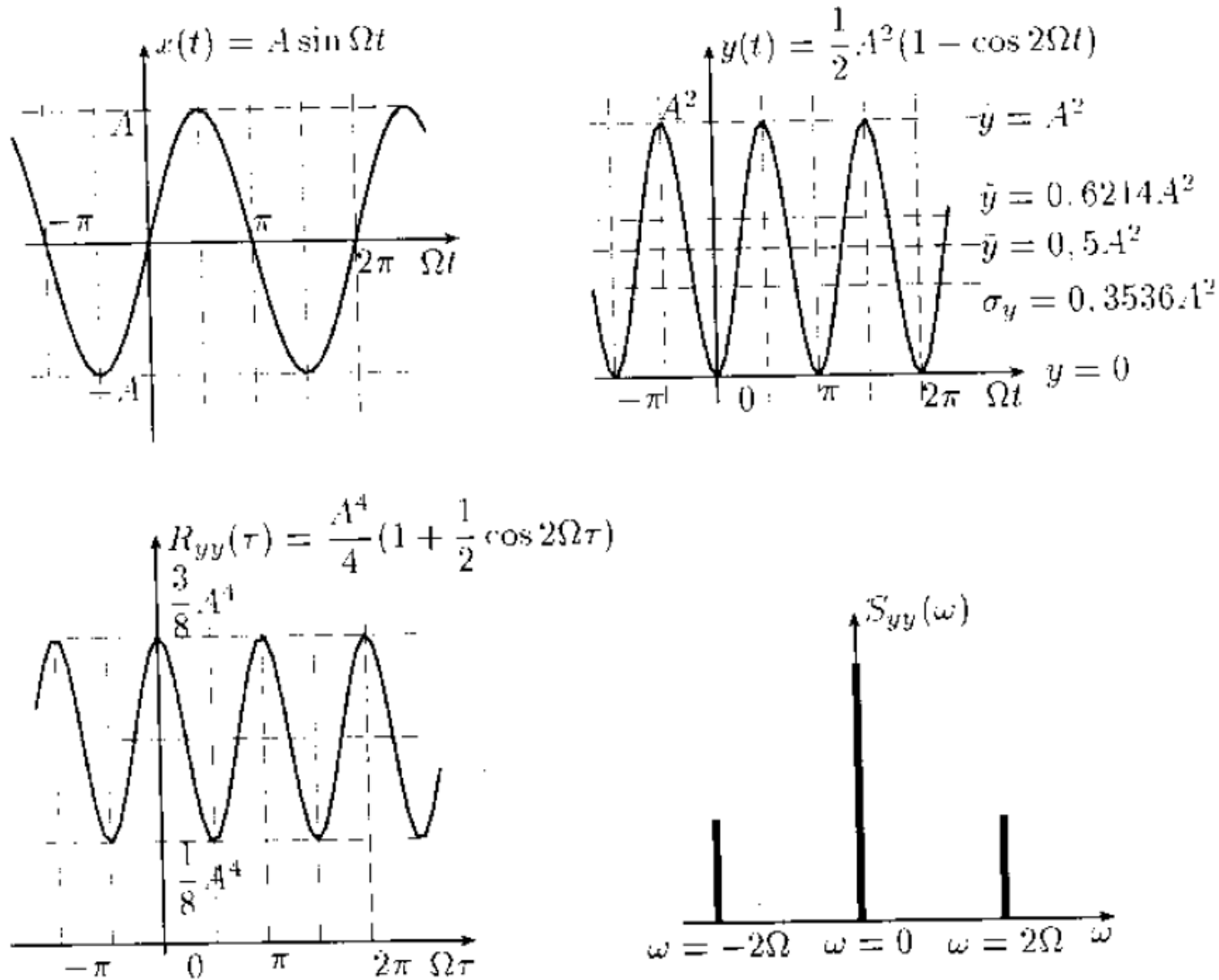
$$\cos \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} \cos(\alpha + \beta) + \frac{1}{2} \cos(\alpha - \beta)$$

i) Phổ mật độ công suất:

$$\begin{aligned} S_{yy}(\omega) &= \frac{A^4}{4} \int_{-\infty}^{+\infty} \left(1 + \frac{1}{2} \cos 2\Omega\tau \right) e^{-j\omega\tau} d\tau \\ &= \frac{A^4\pi}{2} \left[\delta(\omega) + \frac{1}{4} \delta(\omega - 2\Omega) + \frac{1}{4} \delta(\omega + 2\Omega) \right]. \end{aligned}$$

$\delta(\)$: Hàm xung delta-Dirac

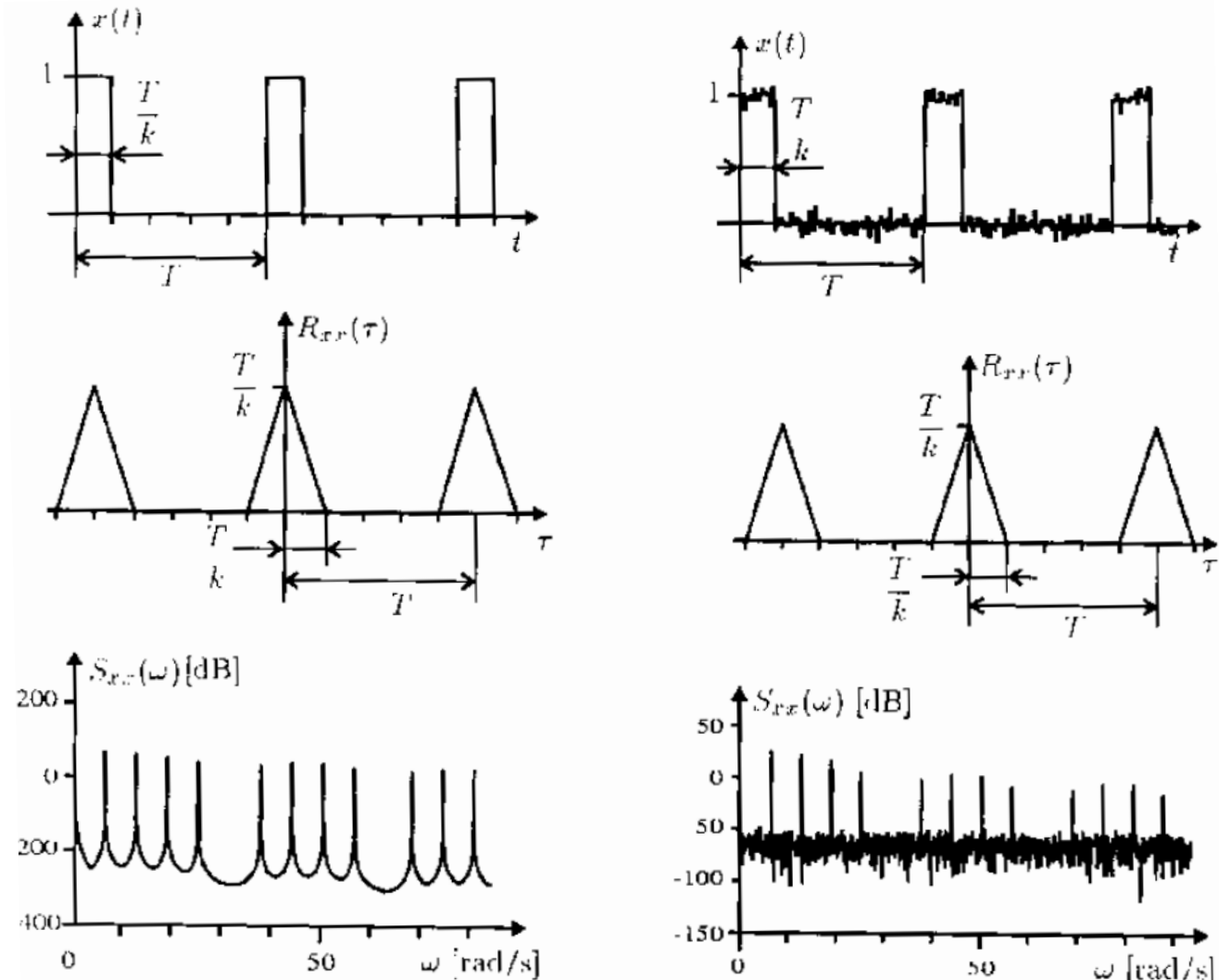
4.1.1 CÁC GIÁ TRỊ TÍN HIỆU ĐẶC TRƯNG VÀ CÁC HÀM TÍN HIỆU ĐẶC TRƯNG



Hình 4.4: Các đại lượng đặc trưng của tín hiệu

➤ **Ví dụ 4.2:** AKF và phổ mật độ công suất của một tín hiệu bị nhiễu

$$x(t) = \begin{cases} 1 & \text{khi } nT_0 \leq t \leq nT_0 + \frac{T_0}{k}; n = 0, 1, 2, \dots \\ 0 & \text{ngoài ra} \end{cases} \quad \begin{array}{l} T_0 = 1s \\ k = 5 \end{array}$$



Hình 4.5: Tín hiệu và các hàm tín hiệu đặc trưng của tín hiệu không bị nhiễu và bị nhiễu

4.1.2 SỰ ẢNH HƯỞNG CỦA CÁC CỬA SỐ THỜI GIAN ĐỐI VỚI PHÉP BIẾN ĐỔI FOURIER

➤ Các cửa số thời gian $\omega(t)$ được áp dụng để khắc phục hiện tượng sai số ngắt quãng. Sai số này làm sai lệch phổ tần số, đặc biệt làm xuất hiện các dải tần nhiễu trong phổ. Nguyên nhân là do việc ngắt quãng tín hiệu và không phụ thuộc vào các thành phần tần số có trong tín hiệu.

➤ Tín hiệu gốc $x(t)$ được thay bằng tích chập: $x_{\omega}(t) = x(t)\omega(t)$

$$F\{x(t)\} = X(j\omega) \quad F\{\omega(t)\} = W(j\omega)$$

$$F\{x_{\omega}(t)\} = X_{\omega}(j\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} X(j\nu)W(j\omega - j\nu)d\nu$$

▪ $\begin{cases} W(j\omega - j\nu) = \delta(j\omega - j\nu): \text{biến đổi Fourier của } x_{\omega}(t) \text{ và } x(t) \text{ là như nhau} \\ \omega(t) = 1 \quad \text{khi } 0 < t < \infty : \text{tín hiệu xấp xỉ và tín hiệu gốc là như nhau} \end{cases}$

▪ $W(j\omega - j\nu) \neq \delta(j\omega - j\nu): X(j\omega)$ bị suy giảm và triệt tiêu khi $\omega = \nu$

→ Nguyên nhân làm sai lệch tính toán phổ tần số.

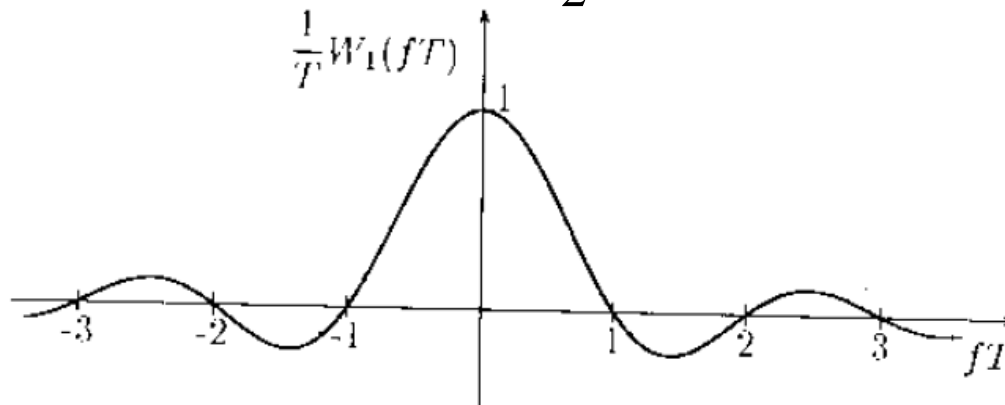
4.1.2 SỰ ẢNH HƯỞNG CỦA CÁC CỬA SỐ THỜI GIAN ĐỐI VỚI PHÉP BIẾN ĐỔI FOURIER

➤ **Ví dụ 4.3:** Phổ Fourier của một cửa sổ chữ nhật

$$w_1(t) = \begin{cases} 1 & \text{khi } |t| \leq \frac{T}{2} \\ 0 & \text{ngoài ra.} \end{cases}$$

Phổ Fourier của cửa sổ chữ nhật có dạng

$$W_1(j\omega) = \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \cos \omega t dt = T \frac{\sin \frac{\omega T}{2}}{\frac{\omega T}{2}} = T \frac{\sin \pi f T}{\pi f T}$$

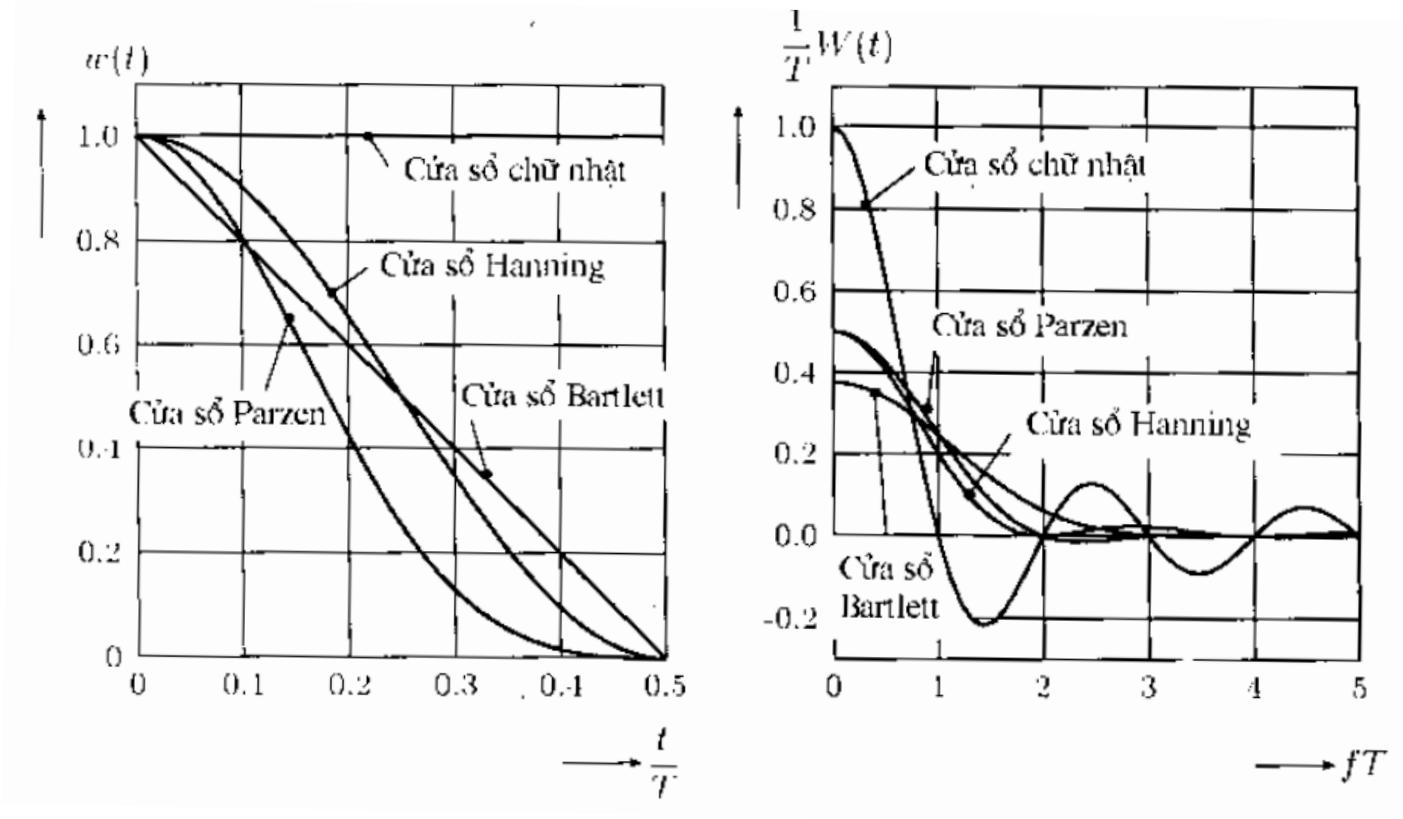


Hình 4.6: Phổ Fourier của cửa sổ chữ nhật

Bảng 4.2: Các dạng cửa sổ thời gian và biểu thức Fourier tương ứng $\tilde{\omega}(t) = \left\{ \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \omega^2(t) dt \right\}^{\frac{1}{2}}$

Tên cửa sổ	$w(t)$	$W(f)$	\tilde{w}
Cửa sổ chữ nhật	$w_1(t) = \begin{cases} 1 & t \leq \frac{T}{2} \\ 0 & \text{miền còn lại} \end{cases}$	$W_1(f) = T \frac{\sin \pi f T}{\pi f T}$	1
Cửa sổ Barlett (cửa sổ tam giác)	$w_2(t) = \begin{cases} 1 - 2\frac{ t }{T} & t \leq \frac{T}{2} \\ 0 & \text{miền còn lại} \end{cases}$	$W_2(f) = \frac{T}{2} \left(\frac{\sin \pi f \frac{T}{2}}{\pi f \frac{T}{2}} \right)^2$	0,577
Cửa sổ Hanning (cửa sổ Tukey)	$w_3(t) = \begin{cases} \frac{1}{2} \left(1 + \cos \frac{2\pi t}{T} \right) & t \leq \frac{T}{2} \\ 0 & \text{miền còn lại} \end{cases}$	$W_3(f) = \frac{T \sin \pi f T}{2 \pi f T} \frac{1}{1 - (fT)^2}$	0,612
Cửa sổ Parzen	$w_4(t) = \begin{cases} 1 - 6 \left(\frac{2t}{T} \right)^2 + 6 \left(\frac{2 t }{T} \right)^3, & \text{khi } t \leq \frac{T}{4} \\ 2 \left(1 - \frac{2 t }{T} \right)^3, & \text{khi } \frac{T}{4} < t \leq \frac{T}{4} \\ 0 & \text{miền còn lại} \end{cases}$	$W_4(f) = \frac{3T}{8} \left(\frac{\sin \pi f \frac{T}{4}}{\pi f \frac{T}{4}} \right)^4$	0,518

4.1.3 SỰ CHỒNG CHẤT CỦA CÁC TÍN HIỆU



Hình 4.7: Các dạng cửa sổ thời gian khác nhau và phổ Fourier tương ứng

4.1.3 SỰ CHỒNG CHẤT CỦA CÁC TÍN HIỆU

➤ Sự chồng chất của các tín hiệu được hiểu như là liên kết của N tín hiệu đơn $x_i(t), i = 1, 2, \dots, N$ thành một tín hiệu tổng hợp. Dạng đơn giản nhất là chồng chất tuyến tính (*dạng cộng xếp chồng*):

$$x(t) = \sum_{i=1}^N a_i x_i(t) \quad a_i = \text{const}$$

➤ Liên kết phi tuyến: $x(t) = f(x_1(t), x_2(t), \dots, x_N(t))$

➤ Liên kết nhân: $x(t) = \prod_{i=1}^N x_i(t)$

Có ý nghĩa quan trọng với các dạng điều biến của tín hiệu: điều biến biên độ, điều biến tần số, điều biến pha

4.1.3 SỰ CHỒNG CHẤT CỦA CÁC TÍN HIỆU

➤ Chồng chất tuyến tính trong miền thời gian:

$$x(t) = \sum_{i=1}^N x_i(t) = \sum_{i=1}^N \hat{x}_i e^{-\delta_i t} \cos(\omega_i t + \varphi_i)$$

\hat{x}_i : các hệ số của chuỗi

ω_i : tần số góc quay

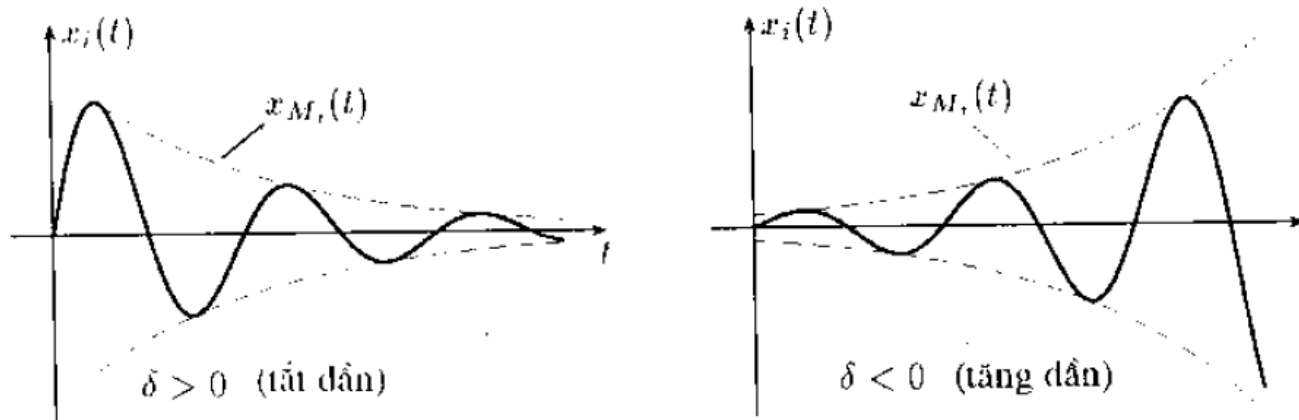
δ_i : các hệ số cản ($\delta_i > 0$ dao động tắt dần, $\delta_i < 0$ dao động tăng dần)

φ_i : góc pha ban đầu

$$x_i(t) = x_{M_i}(t)x_{T_i}(t)$$

$$x_{M_i}(t) = \hat{x}_i e^{-\delta_i t}$$

$$x_{T_i}(t) = \cos(\omega_i t + \varphi_i)$$



Hình 4.8: Dao động tắt dần và dao động tăng dần

4.1.3 SỰ CHỒNG CHẤT CỦA CÁC TÍN HIỆU

➤ Chồng chất tuyến tính trong miền tần số:

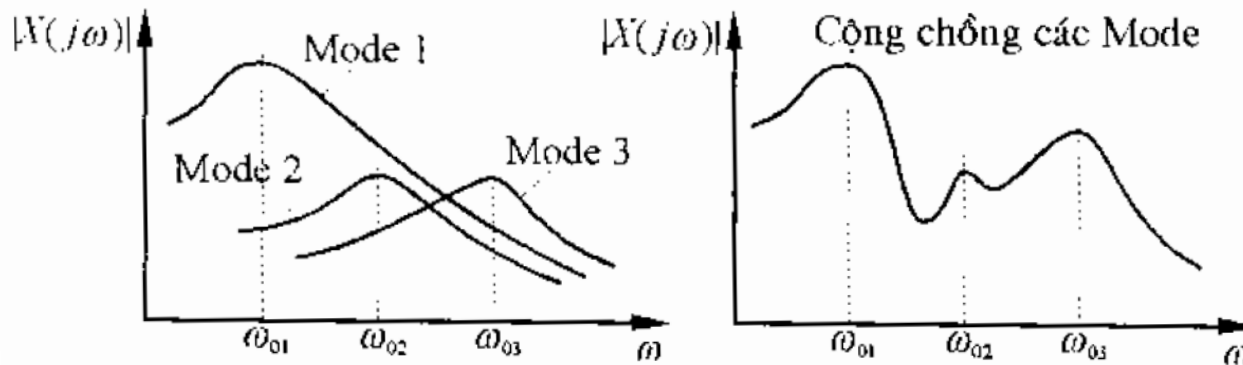
$$X(p) = \sum_{i=1}^N X_i(p) = \sum_{i=1}^N \frac{x_{0i}(p + 2\delta_i) + v_{0i}}{(p + \delta_i)^2 + \omega_i^2}$$

$$x_{0i} = \hat{x}_i \cos \varphi_i$$

$$X_i(j\omega) = \frac{x_{0i}(j\omega + 2\delta_i) + v_{0i}}{(j\omega + \delta_i)^2 + \omega_i^2} = \frac{x_{0i}(j\omega + 2\delta_i) + v_{0i}}{\omega_{0i}^2 - \omega^2 + 2\delta_i\omega j}$$

$$\omega_{0i}^2 = \omega_i^2 + \delta_i^2$$

$$|X_i(j\omega)| = \sqrt{\frac{(2x_{0i}\delta_i + v_{0i})^2 + x_{0i}^2\omega^2}{(\omega_{0i}^2 - \omega^2)^2 + 4\delta_i^2\omega^2}}$$



Hình 4.9: Chồng chất của các đặc tính biên độ tần số

4.2 CÁC TÍN HIỆU RỜI RẠC

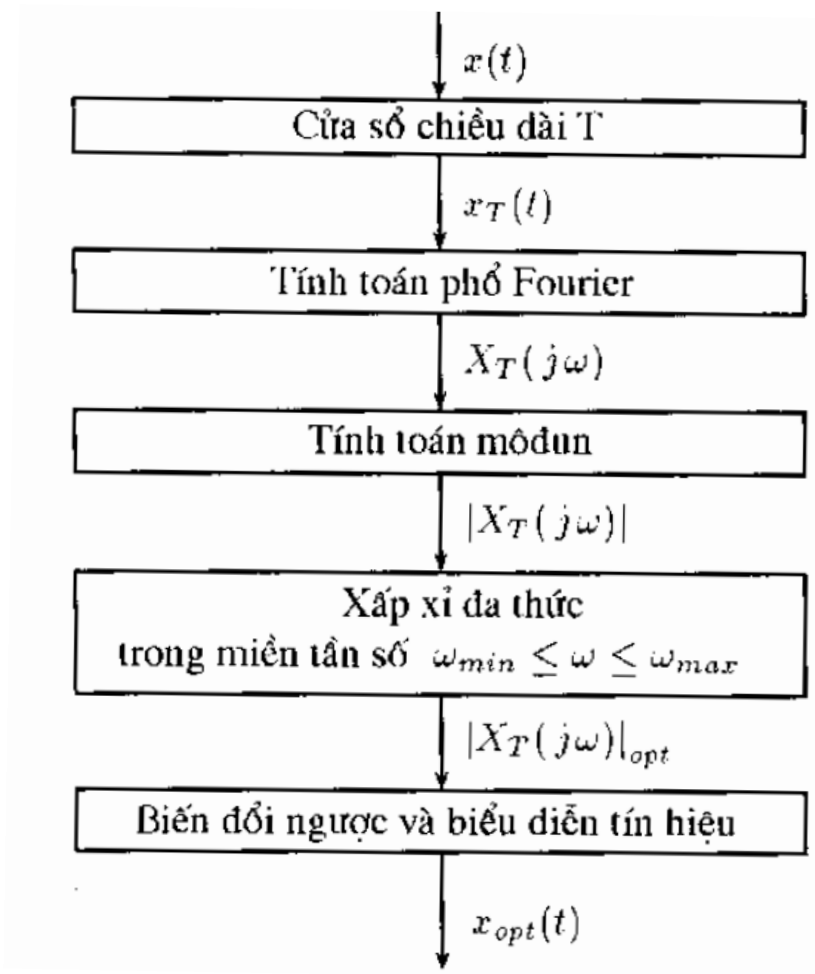
- Các tín hiệu rời rạc được lấy mẫu từ các tín hiệu liên tục thông qua bộ biến đổi ADC (Analog-Digital Converter)
- Các bước thực hiện:
 - Rời rạc hóa biến thời gian
 - Lấy mẫu
- Quá trình lấy mẫu có thể được biểu diễn thông qua phép nhân tín hiệu liên tục với một dãy xung tuần hoàn

$$i(t) = T_0 \sum_{l=0}^{N-1} \delta(t - lT_0),$$

$$x_d(t) = x(t) \cdot i(t) = T_0 \sum_{l=0}^{N-1} x(l) \delta(t - lT_0)$$

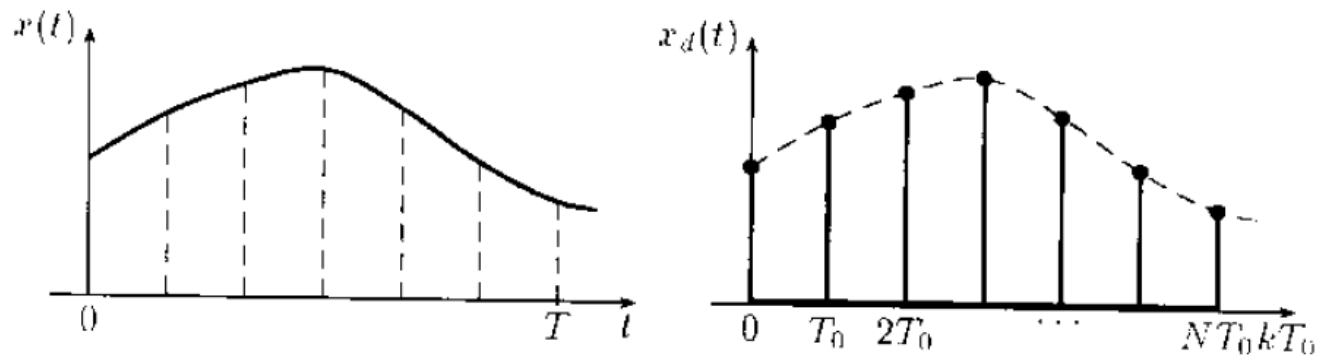
T_0 : chu kỳ lấy mẫu

4.2 CÁC TÍN HIỆU RỜI RẠC



Hình 4.10: Xấp xỉ tín hiệu và lọc trong miền tần số

4.2 CÁC TÍN HIỆU RỜI RẠC



Hình 4.11: Lấy mẫu với một dãy xung tuần hoàn

$$F\{i(t)\} = T_0 \sum_{l=0}^{N-1} e^{-j\omega l T_0}$$

$$i(t) = T_0 \sum_{l=0}^{N-1} e^{j\omega_s l T_0}, \quad \omega_s = \frac{2\pi}{T_0}$$

$$X_d(j\omega) = F\{x_d(t)\} = T_0 \sum_{l=0}^{N-1} X(j\omega - j\omega_s l)$$

Phổ Fourier của $X_d(j\omega)$ là sự chồng chất của các phổ Fourier $X(j\omega - j\omega_s l)$

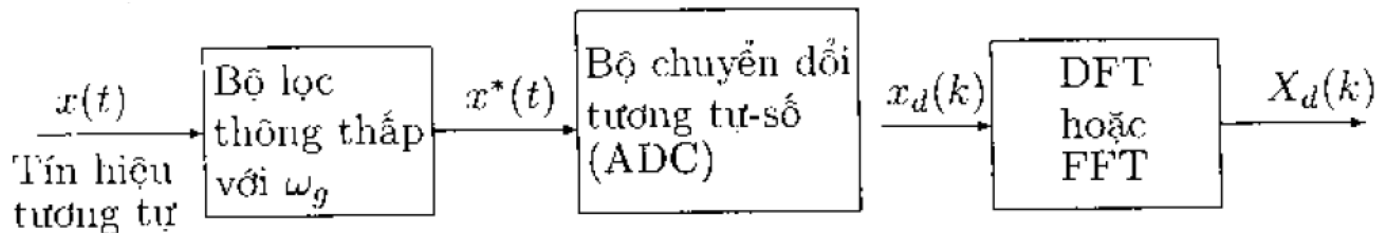
4.2 CÁC TÍN HIỆU RỜI RẠC

➤ Hiệu ứng chồng phổ (*Aliasing*) xuất hiện trong quá trình lấy mẫu tín hiệu. Thời gian đo T sẽ quyết định độ phân dải tần số $\Delta f = \frac{1}{T}$ của tín hiệu rời rạc.

Để tránh hiệu ứng chồng phổ ta lấy tần số lấy mẫu sao cho:

$$\omega_s > 2\omega_{\max} \quad \text{hay} \quad f_s > 2f_{\max}$$

➤ Việc hạn định dải tần của tín hiệu được tiến hành bởi bộ lọc *Antialiasing* (bộ lọc thông thấp với tần số biên ω_g)



Hình 4.12: Bộ lọc antialiasing và ADC

BIẾN ĐỔI FOURIER RỜI RẠC DFT VÀ FOURIER NHANH FFT

- Tín hiệu rời rạc được biểu diễn:

$$x_d(t) = \sum_{l=0}^{N-1} \underbrace{x(l) \cdot T_0}_{\text{Xấp xỉ với cửa sổ chữ nhật}} \cdot \underbrace{\delta(t - lT_0)}_{\text{Hàm DIRAC}}$$

- DFT thuận:

$$X_d(k) = \frac{1}{N} \sum_{l=0}^{N-1} x(l) e^{-j2\pi \frac{k}{N} l}, \quad k = 0, 1, \dots, N-1$$

- DFT ngược:

$$x(k) = \sum_{l=0}^{N-1} X_d(l) e^{j2\pi \frac{k}{N} l}, \quad k = 0, 1, \dots, N-1$$

- Sử dụng biến đổi Z:

$$X_d(z) = \frac{1}{N} \sum_{l=0}^{N-1} x(l) z^{-l}, \quad z = e^{j\omega T_0} = e^{j2\pi \frac{k}{N}}$$

- Biến đổi nhanh Fourier (FFT) là một phương pháp đặc biệt để tính toán có hiệu quả DFT