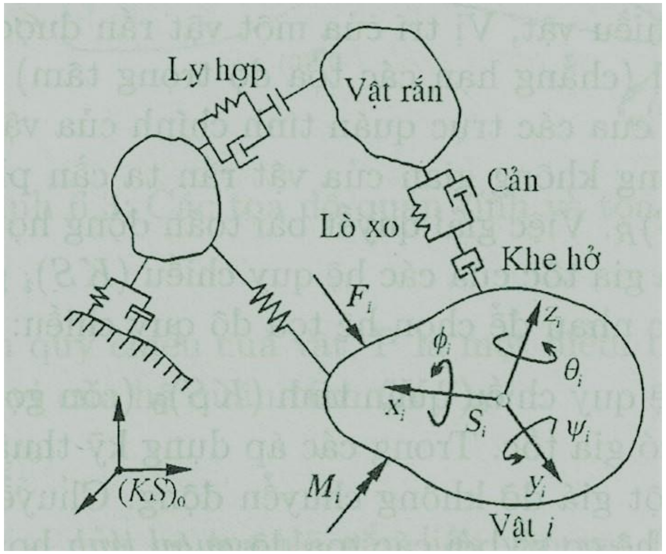
TRƯỜNG ĐH CÔNG NGHỆ GTVT

Chương 5 XÂY DỰNG MÔ HÌNH CỦA CÁC HỆ NHIỀU VẬT

Giảng viên: TS. Dương Quang Khánh
Bộ môn: Cơ điện tử
Năm học: 2020-2021

MỘT HỆ NHIỀU VẬT (MKS)

- Một hệ nhiều vật (MKS) là một mô hình cơ học có các tính chất sau:
  - Hệ gồm N vật rắn
  - Các vật rắn được nối ghép với nhau bởi các phần tử chủ động (các motor dẫn động), các phần tử bị động hoặc các phần tử cơ điện tử.
  - Các liên kết về mặt động học nhờ các ổ đỡ, các khớp, các bộ phận dẫn động. Các liên kết này tạo thành các điều kiện ràng buộc, hạn chế bậc tự do của hệ nhiều vật
  - Các ngoại lực hoặc moment tác dụng lên vật rắn



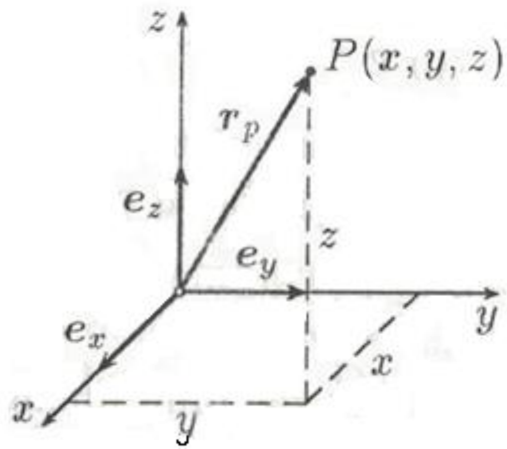
Hình 5.1: Hệ nhiều vật

- **Một bậc tự do** thường được gọi là bậc tự do chủ động nếu nó được xác định bởi một khâu dẫn động độc lập.
- **Cấu trúc cây**: nếu có thể đi từ vật *i* đến vật *j* mà mỗi khớp nối chỉ đi qua một lần
- **Cấu trúc mạch vòng**: ngược với cấu trúc cây, thường phức tạp hơn vì cần phải xét các điều kiện liên kết

5.1 ĐỘNG HỌC HỆ NHIỀU VẬT (MKS)

- **Nhiệm vụ** động học hệ nhiều vật: xác định vị trí, vận tốc, gia tốc của từng vật rắn của hệ nhiều vật
- **Hệ tọa độ quy chiếu** $(KS)_R$ để mô tả chuyển động trong không gian của vật rắn. Việc giải quyết bài toán động học có thể đưa về tính toán vị trí, vận tốc, gia tốc của các hệ quy chiều $(KS)_i$ gắn liền với vật rắn.
- Có 2 khả năng chọn hệ quy chiếu:
  - Hệ quy chiếu quán tính (hệ cơ sở) tức là hệ tọa độ không có gia tốc, thường được gắn liền với một giá đỡ không chuyển động. Chuyển động của vật rắn được mô tả bởi các tọa độ *quán tính* hay còn gọi là tọa độ *tuyệt đối*
  - Hệ tọa độ chuyển động gắn liền với vật rắn thứ *i* của hệ nhiều vật. Các tọa độ được mô tả bởi tọa độ *tương đối*.

5.1 CÁC HỆ TỌA ĐỘ VÀ CÁC PHÉP BIẾN ĐỔI TỌA ĐỘ



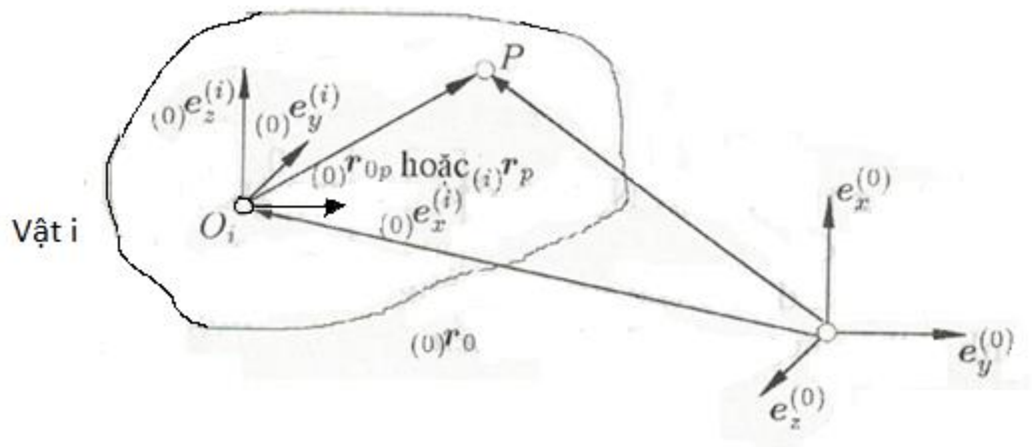
Hình 5.2: Các vector đơn vị của hệ tọa độ

- Tọa độ của điểm P:

$$r_p = xe_x + ye_y + ze_z$$

$$r_p = [x, \quad y, \quad z]^T$$

5.1 CÁC HỆ TỌA ĐỘ VÀ CÁC PHÉP BIẾN ĐỔI TỌA ĐỘ



Hình 5.3: Các vector đơn vị của hệ tọa độ

- Các vector đơn vị của hệ quán tính *(KS)₀*: $e_x^{(0)}, \quad e_y^{(0)}, \quad e_z^{(0)}$

- Các vector đơn vị của hệ tọa độ gắn liền vào vật *(KS)ᵢ* , biểu diễn trong *(KS)₀*

$$ {}_{(0)}e_x^{(i)}, \quad {}_{(0)}e_y^{(i)}, \quad {}_{(0)}e_z^{(i)} $$

- Vector vị trí trong hệ tọa độ *(KS)₀* $\quad {}_{(0)}r_p = xe_x^{(0)} + ye_y^{(0)} + ze_z^{(0)}$

- Vector vị trí trong hệ tọa độ *(KS)ᵢ* $\quad {}_{(i)}r_p = ue_x^{(i)} + ve_y^{(i)} + \omega e_z^{(i)}$

6.1 CÁC HỆ TỌA ĐỘ VÀ CÁC PHÉP BIẾN ĐỔI TỌA ĐỘ

- Ma trận quay của các vector đơn vị xác định hướng của hệ *(KS)i* đối với hệ *(KS)0* :

$$ {}^{0i}R = \left[{}_{(0)}e_x^{(i)}, \quad {}_{(0)}e_y^{(i)}, \quad {}_{(0)}e_z^{(i)} \right] \in \mathrm{R}^{3\times 3} $$

- Phép tịnh tiến:

$$ {}_{(0)}r_p = {}_{(0)}r + {}_{(i)}r_p $$

- Phép quay:

$$ {}_{(0)}r_p = {}^{0i}R r_p $$

- Kết hợp lại ta có (bài toán động học thuận):

$$ \boxed{ {}_{(0)}r_p = {}_{(0)}r + {}^{0i}R_{(i)}r_p } $$

Khi biết các tọa độ ${}_{(i)}r_p$ vị trí điểm định vị và hướng quay của hệ tọa độ gắn liền vào vật rắn đối với hệ tọa độ cố định, ta có thể xác định được tọa độ điểm P trong hệ tọa độ cố định:

- Bài toàn động học ngược:

$$ \boxed{ {}_{(i)}r_p = \left({}^{0i}R \right)^T \left({}_{(0)}r_p - {}_{(0)}r \right) - {}^{0i}R_{(0)}r_p } $$

5.1.2 CÁC THÍ DỤ VỀ MA TRẬN QUAY

CÁC PHÉP QUAY SƠ CẤP

- Phép quay quanh trục x: ${}_{(0)}\mathbf{r} = \left[x, \quad y, \quad z\right]^T \qquad {}_{(R)}\mathbf{r} = \left[u, \quad v, \quad \omega\right]^T$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\phi & -\sin\phi \\ 0 & \sin\phi & \cos\phi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \\ \omega \end{pmatrix}$$

$${}_{(0)}\mathbf{r} = \mathbf{R}_x(\phi) . {}_{(R)}\mathbf{r}$$

$$\mathbf{R}_x(\phi) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\phi & -\sin\phi \\ 0 & \sin\phi & \cos\phi \end{pmatrix}$$

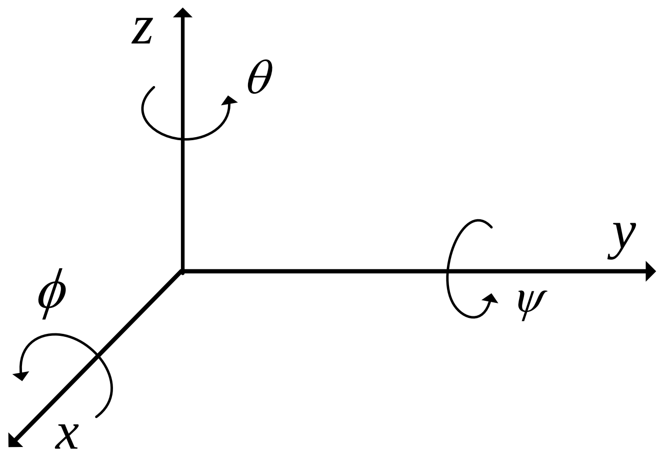
- Phép quay quanh trục y:

$$\mathbf{R}_y(\phi) = \begin{pmatrix} \cos\phi & 0 & \sin\phi \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\phi & 0 & \cos\phi \end{pmatrix}$$

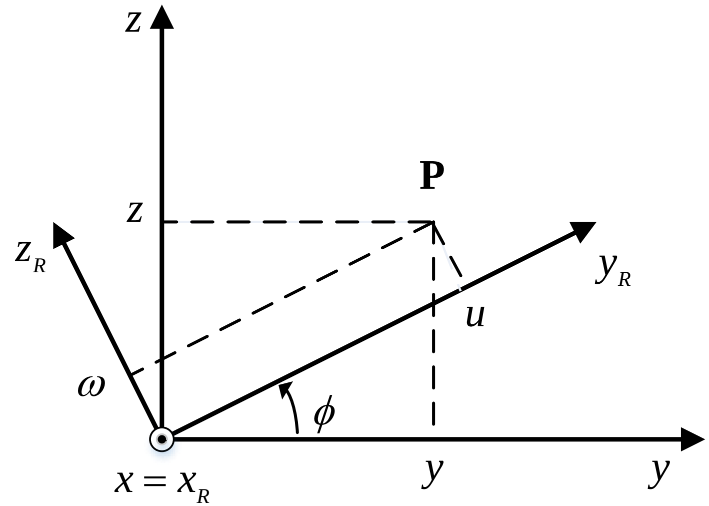
- Phép quay quanh trục z:

$$\mathbf{R}_z(\phi) = \begin{pmatrix} \cos\phi & -\sin\phi & 0 \\ \sin\phi & \cos\phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

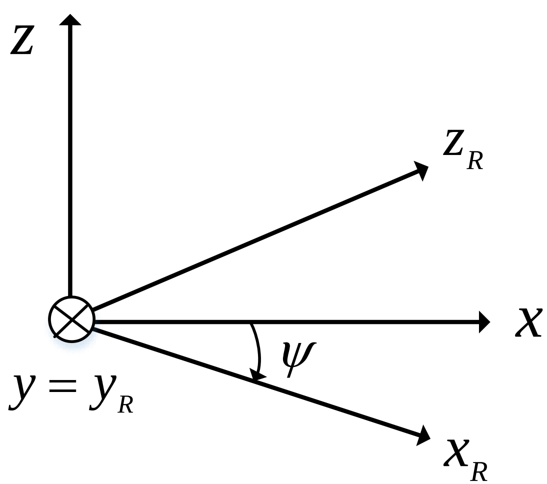
5.1.2 CÁC THÍ DỤ VỀ MA TRẬN QUAY



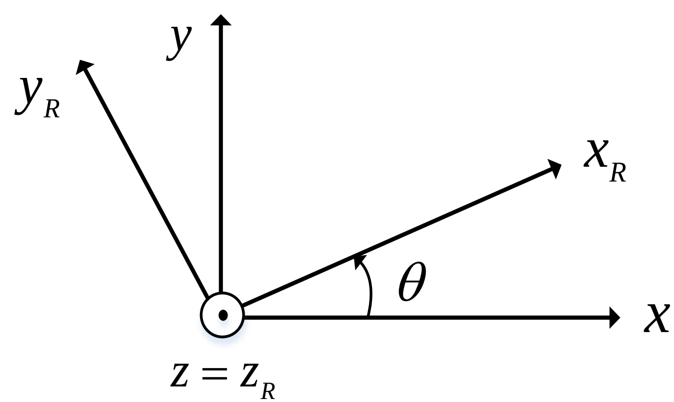
Hình 5.4: Hương quay dương



Hình 5.5: Phép quay sơ cấp quanh trục x



Hình 5.6: Phép quay sơ cấp quanh trục y



Hình 5.7: Phép quay sơ cấp quanh trục z

5.1.2 CÁC THÍ DỤ VỀ MA TRẬN QUAY

CÁC PHÉP QUAY TỔNG HỢP

- Các góc Kardan:
  - Quay quanh trục x $\mathbf{R}_x(\phi)$
  - Quay quanh trục y mới $\mathbf{R}_y(\psi)$
  - Quay quanh trục z mới $\mathbf{R}_z(\theta)$

$$_{(0)}r = \mathbf{R}_x(\phi)r' \qquad r' = \mathbf{R}_y(\psi)r'' \qquad r'' = \mathbf{R}_z(\theta)\,_{(R)}r$$

$$_{(0)}r = \underbrace{\mathbf{R}_x(\phi)\mathbf{R}_y(\psi)\mathbf{R}_z(\theta)}_{\mathbf{R}_{KARD}(\phi,\psi,\theta)}\,_{(R)}r$$

$$\mathbf{R}_{KARD}(\phi,\psi,\theta) = \mathbf{R}_x(\phi)\mathbf{R}_y(\psi)\mathbf{R}_z(\theta)$$

$$= \begin{pmatrix} C_\psi C_\theta & -C_\psi S_\theta & S_\psi \\ C_\phi S_\theta + S_\phi S_\psi C_\theta & C_\phi C_\theta - S_\phi S_\psi S_\theta & -S_\phi C_\psi \\ S_\phi S_\theta - C_\phi S_\psi C_\theta & S_\phi C_\theta + C_\phi S_\psi S_\theta & C_\phi C_\psi \end{pmatrix}$$

$$S_\phi = \sin\phi, C_\theta = \cos\theta$$

5.1.2 CÁC THÍ DỤ VỀ MA TRẬN QUAY

CÁC PHÉP QUAY TỔNG HỢP

- Các góc Euler:
  - Quay quanh trục z $\mathbf{R}_z(\phi)$
  - Quay quanh trục x mới $\mathbf{R}_x(\psi)$
  - Quay quanh trục z mới $\mathbf{R}_z(\theta)$

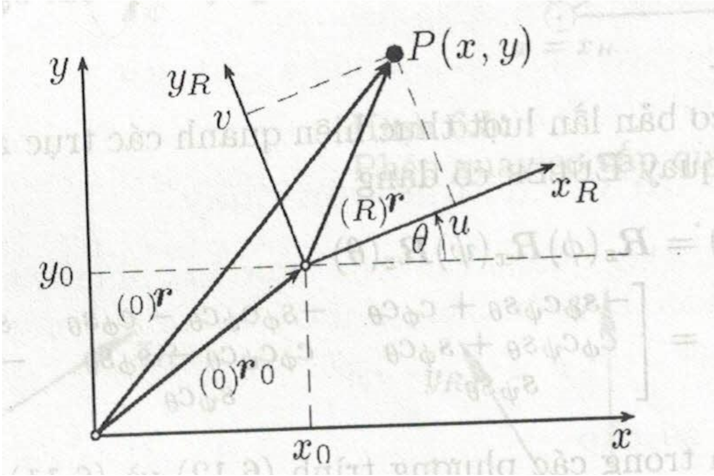
$$\mathbf{R}_{EULER}(\phi,\psi,\theta) = \mathbf{R}_z(\phi)\mathbf{R}_x(\psi)\mathbf{R}_z(\theta)$$

$$= \begin{pmatrix} -S_\phi C_\psi S_\theta + C_\phi C_\theta & -S_\phi C_\psi S_\theta - C_\phi S_\theta & S_\phi S_\psi \\ C_\phi C_\psi S_\theta + S_\phi C_\theta & C_\phi C_\psi C_\theta - S_\phi S_\theta & -C_\phi S_\psi \\ S_\psi S_\theta & S_\psi C_\theta & C_\psi \end{pmatrix}$$

6.1.2 CÁC THÍ DỤ VỀ MA TRẬN QUAY

CÁC PHÉP QUAY TỔNG HỢP

- **Thí dụ 6.1**: chuyển động trên mặt phẳng (z = 0)



$$_{(R)}r = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}, \quad _{(0)}r = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \quad _{(0)}r_0 = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$$

$$R_z(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

Hình 5.8: Chuyển động phẳng

- Vị trí: $_{(0)}r = {}_{(0)}r_0 + R_z(\theta)\,{}_{(R)}r$

- Vận tốc: $_{(0)}\dot{r} = {}_{(0)}\dot{r}_0 + \dot{R}_z(\theta)\,{}_{(R)}r + R_z(\theta)\,{}_{(R)}\dot{r}$

5.1.3 CÁC TỌA ĐỘ THUẦN NHẤT VÀ PHÉP BIẾN ĐỔI THUẦN NHẤT

- Phép biến đổi các điểm từ *(KS)i* sang *(KS)0* :

$$y = Ax + b$$

$$y^* = \begin{pmatrix} y \\ 1 \end{pmatrix}, \quad x^* = \begin{pmatrix} x \\ 1 \end{pmatrix}, \quad A^* = \left(\begin{array}{c:c} A & b \\ \hdashline 0^T & 1 \end{array}\right)$$

$$y = Ax + b \Leftrightarrow y^* = A^* x^* + b$$

-> Phép biến đổi thuần nhất dùng để biểu diễn hai phép biến đổi tịnh tiến và phép quay

- Định nghĩa:

Ký hiệu $r = (x, \quad y, \quad z)^T$ và $r_0 = (x_0, \quad y_0, \quad z_0)^T$, khi đó ta gọi

$$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} r \\ 1 \end{pmatrix} \in R^4 \qquad \boldsymbol{x}_0 = \begin{pmatrix} r_0 \\ 1 \end{pmatrix} \in R^4$$

là *các tọa độ thuần nhất* và

$$T = \left(\begin{array}{c:c} \text{Ma trận quay} & \text{Vector tịnh tiến} \\ \hdashline 000 & \text{Hệ số tỷ lệ} \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c:c} R & r_0 \\ \hdashline 000 & 1 \end{array}\right) \in \mathrm{R}^4$$

là *ma trận biến đổi thuần nhất*

5.1.3 CÁC TỌA ĐỘ THUẦN NHẤT VÀ PHÉP BIẾN ĐỔI THUẦN NHẤT

- Áp dụng định nghĩa vào chuyển động của vật rắn ta có:

$$ {}_{(0)}x_p = \begin{pmatrix} {}_{(0)}r_p \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad {}_{(i)}x_p = \begin{pmatrix} {}_{(i)}r_p \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad T_i^0 = \left(\begin{array}{c|c} {}^{0i}R & {}_{(0)}r \\ \hdashline 000 & 1 \end{array}\right) $$

$$ {}_{(0)}x_p = T_i^0 \, {}_{(i)}x_p $$

- Các tính chất của ma trận thuần nhất ***T***:

- Ma trận T chứa đựng thông tin về hướng quay được xác định bởi ma trận quay **R** và điểm định vị của hệ tọa độ gắn chặt với vật rắn được xác định bởi vector định vị **r**
- Đối với hệ tọa độ thuận $\det(T) = \det(R) = 1$

  Đối với hệ tọa độ ngược $\det(T) = \det(R) = -1$
- Ma trận nghịch đảo:

$$ T^{-1} = \left(\begin{array}{c|c} R^T & -R^T r_0 \\ \hdashline 000 & 1 \end{array}\right) $$

- Tổng quát, tọa độ thuần nhất có dạng $x = \begin{pmatrix} r \\ \lambda \end{pmatrix} \Rightarrow x = \dfrac{x_1}{\lambda}, \quad y = \dfrac{x_2}{\lambda}, \quad z = \dfrac{x_3}{\lambda}$

5.1.3 CÁC TỌA ĐỘ THUẦN NHẤT VÀ PHÉP BIẾN ĐỔI THUẦN NHẤT

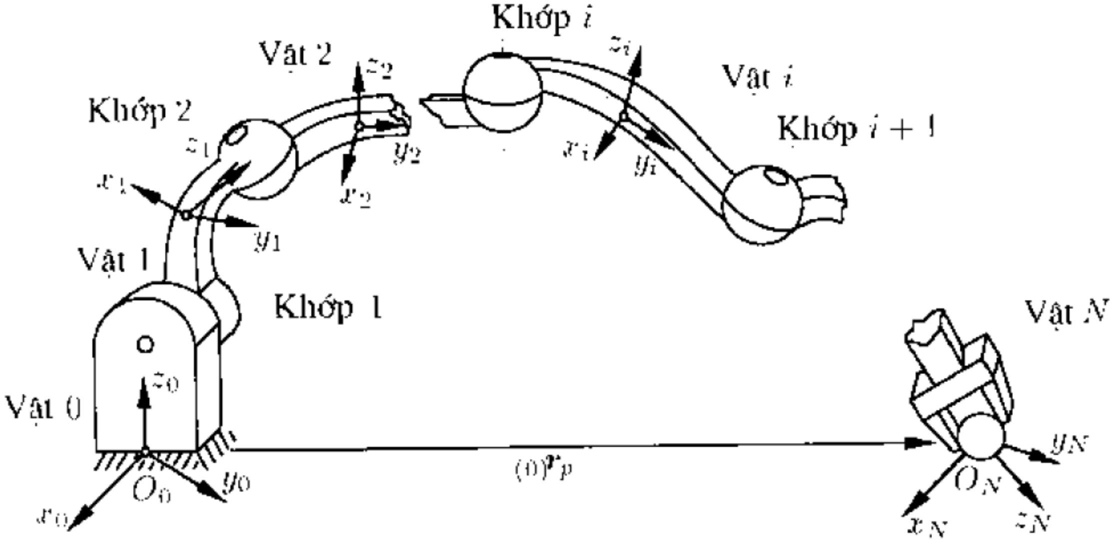
- Phép quay thuần túy $\left(r=0\right)$:

$$Rot = T\left(r=0\right) = \left(\begin{array}{c:c} R & 0 \\ \hdashline 000 & 1 \end{array}\right)$$

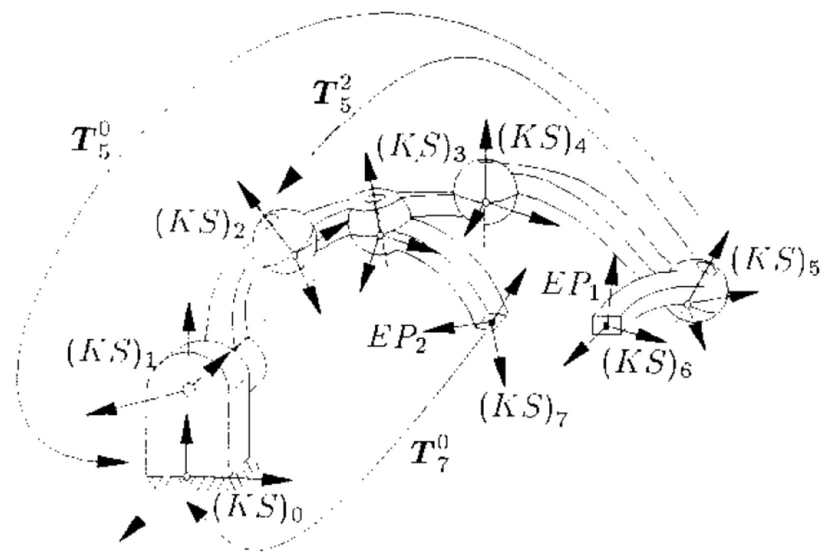
Phép tịnh tiến thuần túy $\left(R=I\right)$:

$$Trans = T\left(R=I\right) = \left(\begin{array}{c:c} I & r \\ \hdashline 000 & 1 \end{array}\right)$$

5.1.4 CÁC MÔ HÌNH CƠ HỌC CÓ CẤU TRÚC CÂY



Hình 5.9: Chuỗi động hở và không rẽ nhánh



Hình 5.10: Chuỗi động hở và rẽ nhánh

6.1.4 CÁC MÔ HÌNH CƠ HỌC CÓ CẤU TRÚC CÂY

- Phép biến đổi thuần nhất cho anh xạ *(KS)j* → *(KS)i* :

$$_{(i)}x_p = T_j^i \, _{(j)}x_p \qquad\qquad i, j = 1, 2, \ldots, N$$

Đối với hệ quy chiếu cơ sở:

$$_{(0)}x_p = T_1^0 T_2^1 \ldots T_N^{N-1} \, _{(N)}x_p$$

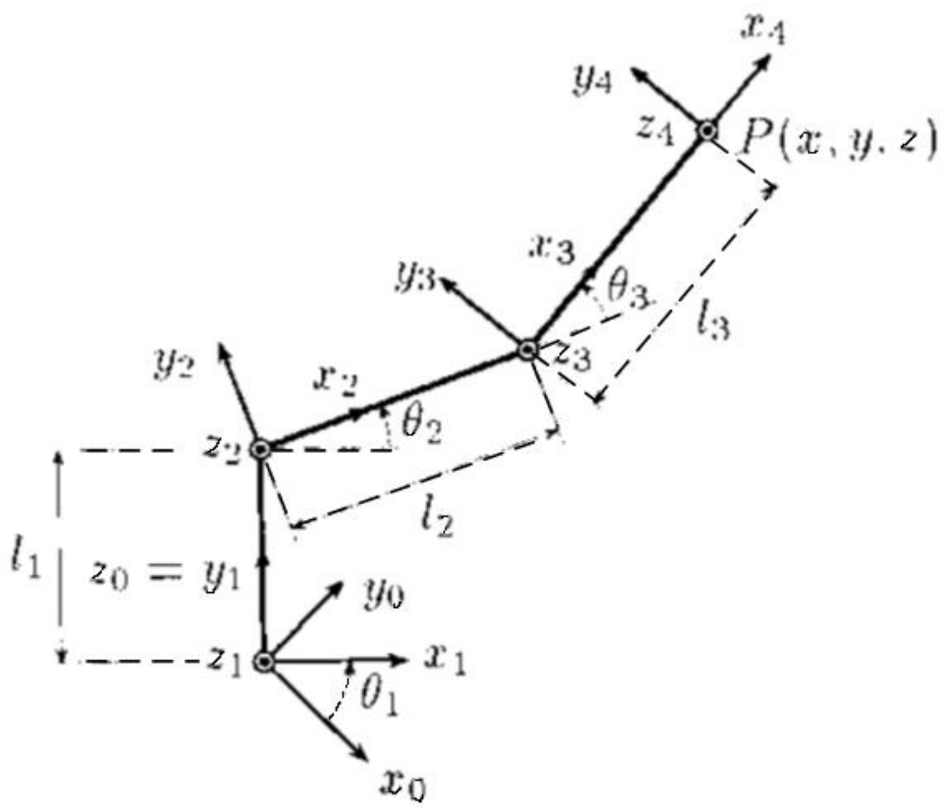
$$T_N^0 = T_1^0 T_2^1 \ldots T_N^{N-1}$$

- Ma trận toàn thể có thể tìm được nhờ phép nhân ma trận khi biết vị trí của các hệ tọa độ *(KS)i*
- Người ta thường sắp xếp các hệ tọa độ gắn liền với vật rắn ở các khớp

- **Thí dụ 5.3**: Giải thích việc đánh số các khâu các khớp

5.1.4 CÁC MÔ HÌNH CƠ HỌC CÓ CẤU TRÚC CÂY

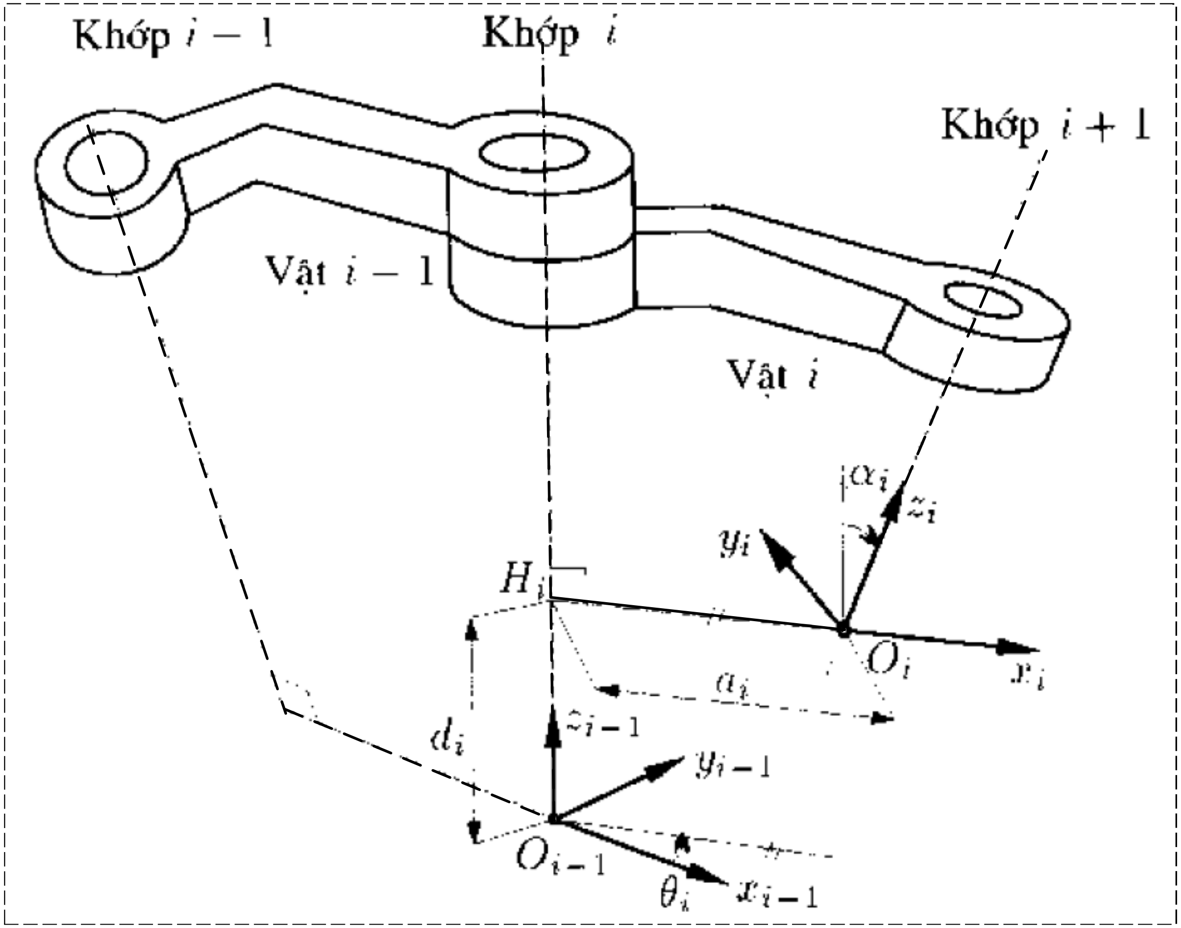
➢ **Thí dụ 5.4**: Xác định ma trận biến đổi và tìm phương trình chuyển động của các hệ tọa độ định vị của điểm thao tác trong hệ tọa độ quy chiếu cơ cở *(KS)0*



Hình 5.11: Robot có 3 khớp quay

5.1.5 KÝ HIỆU DENAVIT – HARTENBERG

➢ Ký hiệu Denavit – Hartenberg là phương pháp mô tả một cách hệ thống các điều kiện động học và đã được sử dụng để tính toán động học các cơ cấu không gian



Hình 5.12: Ký hiệu Denavit – Hartenberg

5.1.5 KÝ HIỆU DENAVIT – HARTENBERG

- Các hệ tọa độ được chọn theo quy tắc:
- **Quy tắc 1**: Gốc tọa độ của hệ *(KS)i* nằm ở giữa giao điểm của đường pháp tuyến chung của các khớp *i* và *i+1* với trục khớp *i+1*
- **Quy tắc 2**: Hướng của hệ *(KS)i* được chọn sao cho
- Trục *z* hướng theo trục khớp *(i+1)*
- Trục *x* hướng theo đường pháp tuyến chung kéo dài
- Trục *y* được chọn sao cho *xyz* tạo thành hệ tọa độ thuận

- Vị trí của hệ quy chiếu *(KS)i* so với hệ quy chiếu *(KS)i-1* được xác định bởi bốn tham số Denavit-Hartenberg (θ, d, a, α)
- θ_i: Góc quay quanh trục z_{i-1}, tức $\angle(x_{i-1}, H_iO_i)$
- d_i: Dịch chuyển dọc trục z_{i-1}, tức $O_{i-1}H_i$
- a_i: Độ dài của pháp tuyến chung H_iO_i
- α_i: Góc quay quanh trục x_i, tức $\angle(z_{i-1}, z_i)$
- Trường hợp đặc biệt:
- Khi 2 trục khớp song song với nhau, chọn d_i tùy ý, chẳng hạn $d_i = 0$
- Khi 2 trục khớp giao nhau $a_i = 0$
- Khi 2 trục khớp vuông góc với nhau $\alpha_i = \pm\pi/2$

5.1.5 KÝ HIỆU DENAVIT – HARTENBERG

- Biến đổi hệ tọa độ *(KS)i* sang *(KS)i-1* được thực hiện bằng các phép cơ bản:

1. Quay hệ *(KS)i-1* quanh trục Z_{i-1} (một góc θ_i)
2. Tịnh tiến theo hướng của trục Z_{i-1} (một đoạn d_i) và theo hướng của x_i (một đoạn a_i)
3. Quay quanh trục x_i (một góc α_i)

5.1.5 KÝ HIỆU DENAVIT – HARTENBERG

$$T_i^{i-1} = ROT(z,\theta_i).TRANS(a_i,0,d_i).ROT(x,\alpha_i)$$

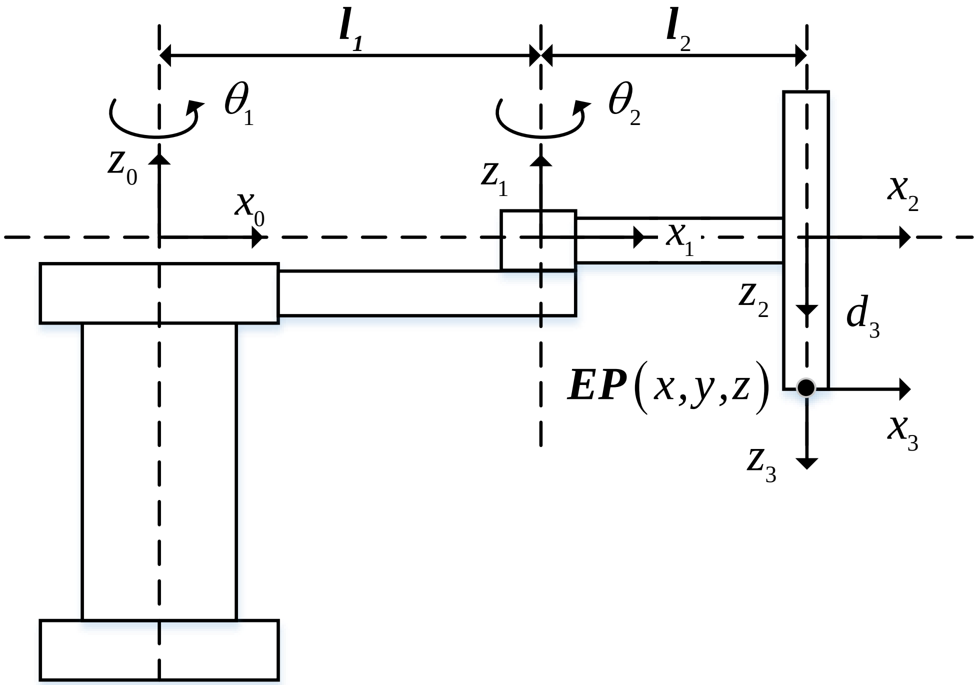
$$ROT(z,\theta_i) = \begin{pmatrix} \cos\theta_i & -\sin\theta_i & 0 & 0 \\ \sin\theta_i & \cos\theta_i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$TRANS(a_i,0,d_i) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & a_i \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$ROT(x,\alpha_i) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha_i & -\sin\alpha_i & 0 \\ 0 & \sin\alpha_i & \cos\alpha_i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{T_i^{i-1} = A_i^{i-1} = \begin{pmatrix} \cos\theta_i & -\sin\theta_i\cos\alpha_i & \sin\theta_i\sin\alpha_i & a_i\cos\theta_i \\ \sin\theta_i & \cos\theta_i\cos\alpha_i & -\cos\theta_i\sin\alpha_i & a_i\sin\theta_i \\ 0 & \sin\alpha_i & \cos\alpha_i & d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}$$

5.1.5 KÝ HIỆU DENAVIT – HARTENBERG



Hình 5.13: Robot SCARA

5.1.5 KÝ HIỆU DENAVIT – HARTENBERG

TT	θ	d	a	α
1	θ_1	0	l_1	0
2	θ_2	0	l_2	π
3	0	d_3	0	0

$C_1 = \cos\theta_1 \qquad C_2 = \cos\theta_2$

$S_1 = \sin\theta_1 \qquad S_2 = \sin\theta_2$

$C_{12} = \cos(\theta_1 + \theta_2)$

$S_{12} = \sin(\theta_1 + \theta_2)$

- Biến đổi hệ tọa độ *(KS)*3 sang *(KS)*0 :

$$A_3^0 = A_1^0 A_2^1 A_3^2$$

$$A_1^0 = \begin{pmatrix} c_1 & -s_1 & 0 & l_1c_1 \\ s_1 & c_1 & 0 & l_1s_1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad A_2^1 = \begin{pmatrix} c_2 & s_2 & 0 & l_2c_2 \\ s_2 & -c_2 & 0 & l_2s_2 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad A_3^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A_3^0 = \begin{pmatrix} c_{12} & s_{12} & 0 & l_1c_1 + l_2c_{12} \\ s_{12} & -c_{12} & 0 & l_1c_1 + l_2s_{12} \\ 0 & 0 & -1 & -d_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$x = l_1\cos\theta_1 + l_2\cos(\theta_1 + \theta_2)$$

$$y = l_1\sin\theta_1 + l_2\sin(\theta_1 + \theta_2)$$

$$z = -d_3$$

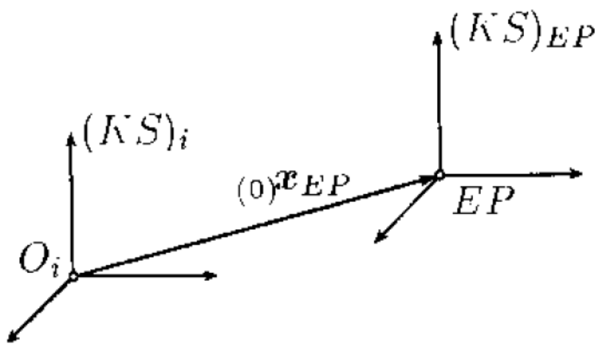
5.1.6 ĐỘNG HỌC THUẬN VÀ ĐỘNG HỌC NGƯỢC

➢ **Động học thuận**: Mọi vị trí của khâu thao tác (bàn kẹp) trong hệ quy chiếu quán tính ${}_{(0)}\mathbf{x} = (x, y, z, \phi, \psi, \theta)^T$ tương ứng với một vector tọa độ suy rộng $\mathbf{q} = (q_1, q_2, ..., q_n)^T \in$ R

$$\boxed{\mathbf{x} = f(\mathbf{q})}$$

$${}_{(0)}\mathbf{x}_{EP} = T_i^0 \, {}_{(i)}\mathbf{x}_{EP}$$

$$T_i^0 = T_1^0 T_2^1 ... T_i^{i-1} = \begin{pmatrix} t_{11} & t_{12} & t_{13} & t_{14} \\ t_{21} & t_{22} & t_{23} & t_{24} \\ t_{31} & t_{32} & t_{33} & t_{34} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$



Giả thiết (KS)i với (KS)0 có cùng hướng quay

$$T_{EP}^0 = T_i^0 TRANS\left({}_{(i)}x_{EP}, \quad {}_{(i)}y_{EP}, \quad {}_{(i)}z_{EP}\right)$$

Hình 5.14: Tính toán vị trí của điểm thao tác EP

5.1.6 ĐỘNG HỌC THUẬN VÀ ĐỘNG HỌC NGƯỢC

➢ **Động học ngược**: Cho biết vị trí của điểm định vị và hướng của khâu thao tác, xác định các tọa độ suy rộng **q** tương ứng, tức là xác định cấu hình tương ứng của hệ nhiều vật.

$$\boxed{\mathbf{q} = f^{-1}(\mathbf{x})}$$

➢ **Đặc điểm**:

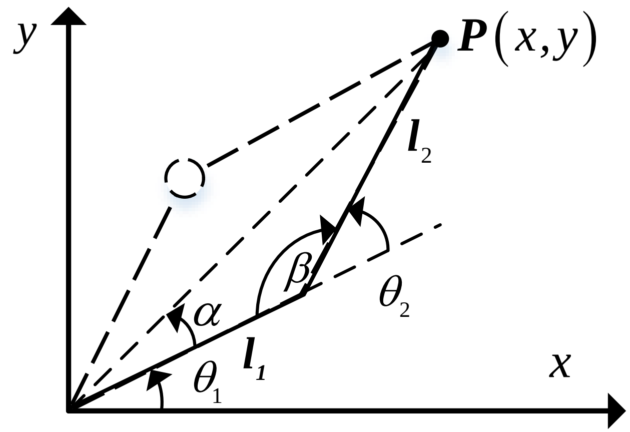
- Do tính chất phi tuyến của hàm $f(\mathbf{q})$ nên nghiệm giải tích của bài toán ngược chỉ có thể tìm được trong một số trường hợp đặc biệt
- Nghiệm thường không duy nhất (hữu hạn hoặc vô hạn)

➢ **Các trường hợp**:

- $\dim(\mathbf{q}) = \dim(\mathbf{x})$: hệ chuẩn. PT có nghiệm duy nhất trong đa số các trường hợp. Số bậc tự do bằng số chiều của vector tọa độ không gian.
- $\dim(\mathbf{q}) < \dim(\mathbf{x})$: hệ không xác định. PT chỉ có lời giải trong một số trường hợp đặc biệt. Hệ có quá ít bậc tự do.
- $\dim(\mathbf{q}) > \dim(\mathbf{x})$: hệ siêu xác định, có vô số nghiệm. Hệ có nhiều bậc tự do hơn số cần thiết thực hiện chuyển động.

5.1.6 ĐỘNG HỌC THUẬN VÀ ĐỘNG HỌC NGƯỢC

➢ **Động học thuận và ngược của cơ cấu phẳng hai khâu**: Cho biết vị trí của điểm định vị và hướng của khâu thao tác, xác định các tọa độ suy rộng tương ứng, tức là xác định cấu hình tương ứng của hệ nhiều vật.



Hình 5.15

➢Bài toán thuận:

$$x = l_1 \cos\theta_1 + l_2 \cos(\theta_1 + \theta_2)$$

$$y = l_1 \sin\theta_1 + l_2 \sin(\theta_1 + \theta_2)$$

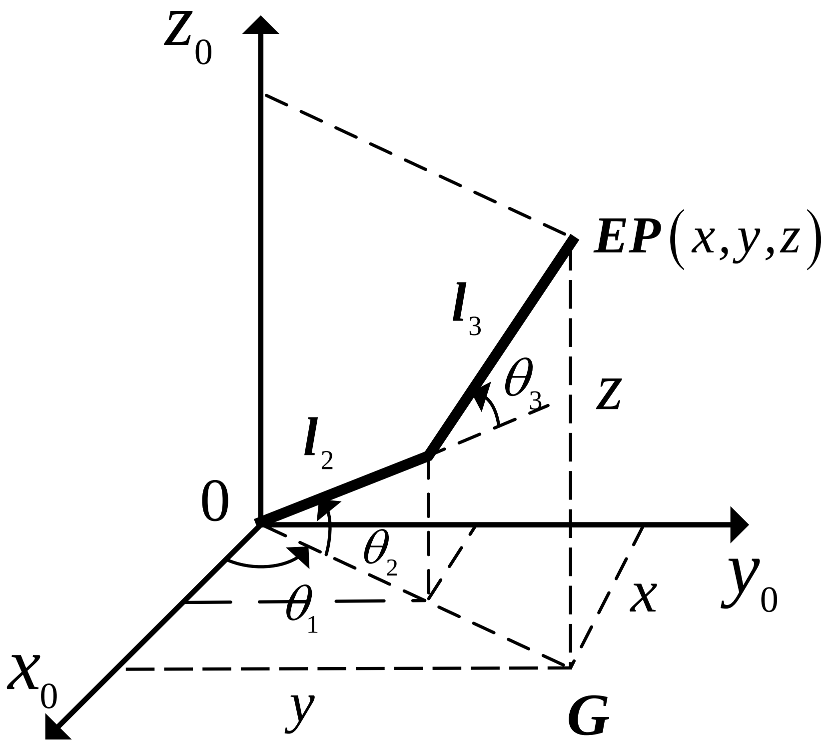
➢Bài toán ngược:

$$\theta_2 = \pm \arccos\left(\frac{x^2 + y^2 - l_1^2 - l_2^2}{2l_1 l_2}\right)$$

$$\theta_1 = \pm \arctan\left(\frac{y}{x}\right) \mp \arcsin\left(\sqrt{\frac{(2l_1 l_2)^2 - (x^2 + y^2 - l_1^2 - l_2^2)^2}{4l_1^2 (x^2 + y^2)}}\right)$$

5.1.6 ĐỘNG HỌC THUẬN VÀ ĐỘNG HỌC NGƯỢC

➢ **Động học thuận và ngược của cơ cấu phẳng ba khâu**: Cho biết vị trí của điểm định vị và hướng của khâu thao tác, xác định các tọa độ suy rộng tương ứng, tức là xác định cấu hình tương ứng của hệ nhiều vật.



Hình 5.16

5.1.6 ĐỘNG HỌC THUẬN VÀ ĐỘNG HỌC NGƯỢC

- **Bài toán ngược**:

$$\theta_1 = \arctan\left(\frac{y}{x}\right)$$

$$\theta_2 = \pm\arctan\left(\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2}}\right) \mp \arcsin\left(\sqrt{\frac{(2l_2l_3)^2 - (x^2+y^2+z^2-l_2^2-l_3^2)^2}{4l_2^2(x^2+y^2+z^2)}}\right)$$

$$\theta_3 = \pm\arccos\left(\frac{x^2+y^2+z^2-l_2^2-l_3^2}{2l_2l_3}\right)$$

5.1.7 ĐỘNG HỌC VI PHÂN VÀ MA TRẬN JACOBI

➢ **Ma trận Jacobi**: xây dựng quan hệ giữa các vận tốc suy rộng và vận tốc tương ứng của điểm thao tác của hệ nhiều vật.

- Ma trận Jacobi giải tích
- Ma trận Jacobi hình học

➢ Ma trận Jacobi giải tích: $x = f(q) \rightarrow \dot{x} = J(q)\dot{q}$

$$\dot{q} = (\dot{q}_1 \quad \dot{q}_2 ...., \quad \dot{q}_n)^T$$

$$\dot{x} = (\dot{x}_1 \quad \dot{x}_2 ...., \quad \dot{x}_m)^T$$

Ta có: $J(q) = \dfrac{\partial f}{\partial q} = \left(\dfrac{\partial f}{\partial q_1}, \quad \dfrac{\partial f}{\partial q_2}, ... \quad \dfrac{\partial f}{\partial q_n} \right) \in \mathbb{R}^{m\times n}$

Các phần tử của ma trận Jacobi được xác định theo công thức:

$$J_{ik} = \frac{\partial f_i}{\partial q_k} \qquad i = 1, 2..., m \qquad k = 1, 2..., n$$

5.1.7 ĐỘNG HỌC VI PHÂN VÀ MA TRẬN JACOBI

- **Lưu ý:**
  - Khi khâu thao tác chuyển động trong không gian m = 6

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} \dot{x}_T \\ \dot{x}_R \end{pmatrix} \qquad \dot{x}_T = \begin{pmatrix} \dot{x} & \dot{y} & \dot{z} \end{pmatrix}^T \qquad \dot{x}_R = \begin{pmatrix} \dot{\phi} & \dot{\psi} & \dot{\theta} \end{pmatrix}^T$$

$$\dot{x}_T = J_T \dot{q} \qquad \dot{x}_R = J_R \dot{q}$$

J_T : ma trận Jacobi tịnh tiến
J_R : ma trận Jacobi quay

  - Khi $n = m$ và $\det\left(J\left(q\right)\right) \neq 0$

$$\dot{q} = J^{-1}\left(q\right)\dot{x}$$

  - Khi $n = m$ và $\det\left(J\left(q\right)\right) = 0$ tức là $J\left(q\right)$ là ma trận kỳ dị, ta có cấu hình tương ứng kỳ dị.

5.1.7 ĐỘNG HỌC VI PHÂN VÀ MA TRẬN JACOBI

- Ma trận Jacobi hình học: dùng để thiết lập quan hệ giữa $\dot{q}$ với các vận tốc tịnh tiến $\dot{x}_T = (\dot{x}, \dot{y}, \dot{z})^T$ và các vận tốc góc $\omega = (\omega_x, \omega_y, \omega_z)^T$ của *khâu thao tác* trong hệ quy chiếu quán tính
  - Khi sử dụng các góc KARDAN

$$J_G = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & T_{KARD} \end{pmatrix} J$$

J_G : Jacobi hình học

J : Jacobi giải tích

$$T_{KARD} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & S_\psi \\ 0 & C_\phi & -C_\phi S_\psi \\ 0 & S_\phi & C_\phi C_\psi \end{pmatrix}$$

$$_{(0)}\omega = T_{KARD}\dot{x}_R$$

  - Khi sử dụng các góc EULER

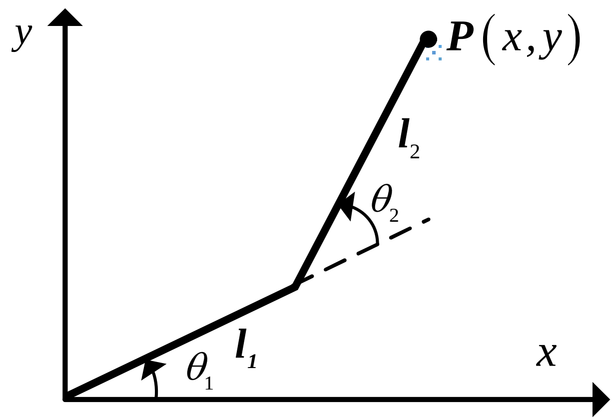
$$J_G = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & T_{EULER} \end{pmatrix} J$$

$$T_{EULER} = \begin{pmatrix} 0 & C_\phi & S_\psi S_\phi \\ 0 & S_\phi & -S_\psi C_\phi \\ 1 & 0 & C_\psi \end{pmatrix}$$

$$_{(0)}\omega = T_{KARD}\dot{x}_R$$

5.1.7 ĐỘNG HỌC VI PHÂN VÀ MA TRẬN JACOBI

- **Thí dụ 5.5**: Tìm ma trận Jacobi đối với cơ cấu hai khâu như Hình 5.15



$$x = l_1 \cos\theta_1 + l_2 \cos(\theta_1 + \theta_2)$$
$$y = l_1 \sin\theta_1 + l_2 \sin(\theta_1 + \theta_2)$$

$$\mathbf{J} = \frac{\partial f}{\partial q} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial \theta_1} & \dfrac{\partial x}{\partial \theta_2} \\ \dfrac{\partial y}{\partial \theta_1} & \dfrac{\partial y}{\partial \theta_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -l_1 sin(\theta_1) - l_2 sin(\theta_1+\theta_2) & -l_2 sin(\theta_1+\theta_2) \\ l_1 cos(\theta_1) + l_2 cos(\theta_1+\theta_2) & l_2 cos(\theta_1+\theta_2) \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{det}(\mathbf{J}) = l_2 cos(\theta_1+\theta_2)\left[-l_1 sin(\theta_1) - l_2 sin(\theta_1+\theta_2)\right] + l_2 sin(\theta_1+\theta_2)\left[l_1 cos(\theta_1) + l_2 cos(\theta_1+\theta_2)\right]$$

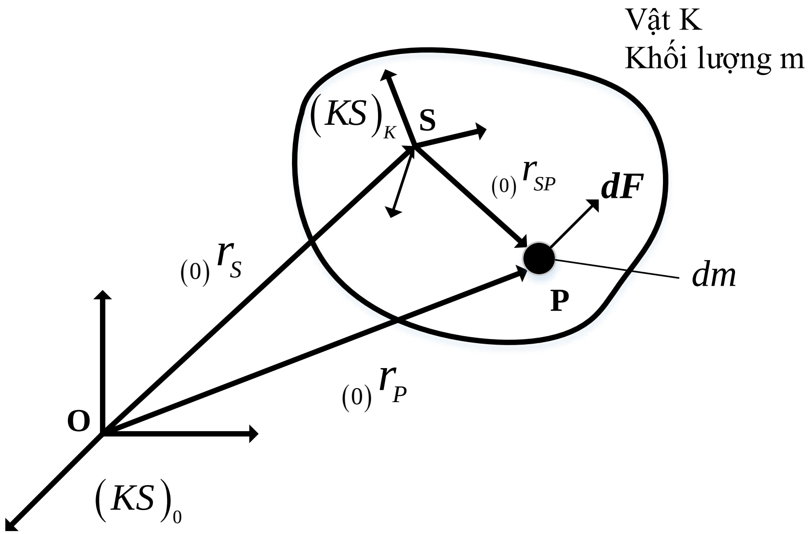
$$\mathbf{det}(\mathbf{J}) = -l_1 l_2 sin(\theta_1) cos(\theta_1+\theta_2) - l_2^2 sin(\theta_1+\theta_2) cos(\theta_1+\theta_2)$$
$$+ l_1 l_2 cos(\theta_1) sin(\theta_1+\theta_2) + l_2^2 sin(\theta_1+\theta_2) cos(\theta_1+\theta_2)$$

$$\mathbf{det}(\mathbf{J}) = -l_1 l_2 sin(\theta_1) cos(\theta_1+\theta_2) + l_1 l_2 cos(\theta_1) sin(\theta_1+\theta_2) = l_1 l_2 \sin\theta_2$$

5.2 ĐỘNG LỰC HỌC CÁC HỆ NHIỀU VẬT

- **Động lực học (Dynamics)** là lý thuyết chuyển động của các vật thể có khối lượng dưới tác dụng của các lực và các ngẫu lực. Trong động lực học ta cần thiết lập các quan hệ giữa *các đại lượng động học* và *các đại lượng về lực*. Các phương trình chuyển động tạo nên *mô hình động lực (dynamic model)*. Đối với hệ các vật rắn n bậc tự do ta có n phương trình vi phân thường cấp 2.
- Các bài toán của động lực học:
  - *Mô phỏng tính chất chuyển động (Động lực học thuận):* dựa trên các số liệu về các lực tác dụng lên hệ cơ và các số liệu về điều kiện đầu hoặc các điều kiện biên
  - *Phân tích các cấu trúc cơ điện tử:* xác định các ứng xử động cho việc thiết kế mẫu
  - *Tổng hợp điều khiển (Động lực học ngược*): tổng hợp các giải thuật điều khiển
- Các phương pháp thiết lập mô hình động lực:
  - Phương pháp Newton-Euler (áp dụng định lý biến thiên động lượng, định lý biến thiên moment động lượng cho mỗi vật)
  - Phương pháp Lagrange (áp dụng các nguyên lý cơ học)

5.2.1 CÁC PHƯƠNG TRÌNH CƠ BẢN CỦA VẬT RẮN



Hình 1.4: Các ký hiệu trên một vật rắn

S **:** khối tâm vật rắn
P: một điểm bất kỳ nằm trên vật rắn
d*m*: một phần tử khối lượng
d**F**: ngoại lực tác dụng lên phần tử d*m*

$\mathbf{F} = \int_K d\mathbf{F}$: Vector chính của các ngoại lực

$\mathbf{M}^{(0)} = \int_K {}_{(0)}\mathbf{r}_P \times d\mathbf{F} = \int_K {}_{(0)}\tilde{\mathbf{r}}_\mathbf{P} d\mathbf{F}$: moment chính của các ngoại lực

Áp dụng định lý động lượng:

$$m\,{}_{(0)}\ddot{r}_S = \int_K {}_{(0)}\ddot{r}_p dm = \mathbf{F}$$

Áp dụng định lý moment động lượng:

$\dot{\mathbf{L}}^{(0)} = \mathbf{M}^{(0)}$ trong đó **M**: moment lực, **L**: moment động lượng

$$\mathbf{L}^{(0)} = \int_K \left({}_{(0)}r_p \times {}_{(0)}v_p \right) dm = \int_K {}_{(0)}\tilde{r}_p \, {}_{(0)}v_p dm$$

${}_{(0)}\tilde{r}_p$: biểu thị toán tử sóng

Moment động lượng của vật rắn: $\boxed{\mathbf{L}^{(0)} = {}_{(0)}r_S \times {}_{(0)}v_S m + L_{rel}^{(S)}} = {}_{(0)}\tilde{r}_S \, {}_{(0)}v_S m + L_{rel}^{(S)}$

5.2.1 CÁC PHƯƠNG TRÌNH CƠ BẢN CỦA VẬT RẮN

- Moment động lượng tương đối:

$$\boxed{L_{rel}^{(S)} = {}_{(0)}I^{(S)}\,{}_{(0)}\omega}$$

${}_{(0)}I^{(S)}$: Ma trận moment quán tính (3x3)

Biểu thức ma trận moment quán tính được xác định trong hệ quy chiếu cố định do đó phụ thuộc vào hướng quay của vật rắn

- Đối với vật rắn quay quanh một điểm cố định:

$$\boxed{{}_{(0)}I^{(S)} = {}^{0K}R\,{}_{(K)}I^{(S)}\left({}^{0K}R\right)^T}$$

${}^{0K}R$: Ma trận quay của hệ tọa độ gắn liền với vật rắn K so với hệ tọa độ gốc

${}_{(K)}I^{(S)}$: là ma trận moment quán tính của vật rắn đối với hệ tọa độ động gắn liền vào vật rắn. Nếu chọn hệ tọa độ là các trục quán tính chính của vật rắn thì ma trận ${}_{(K)}I^{(S)}$ có dạng đường chéo.

5.2.1 CÁC PHƯƠNG TRÌNH CƠ BẢN CỦA VẬT RẮN

- Định lý biến thiên moment động lượng (trong hệ quy chiếu động $(KS)_K$ gắn liền vào vật rắn):

$$\frac{d}{dt}L^{(S)} = \frac{d}{dt}\left({}_{(0)}I^{(S)}{}_{(0)}\omega\right) = {}_{(0)}I^{(S)}\dot{\omega} + {}^{0K}\tilde{\omega}_{(0)}I^{(S)}{}_{(0)}\omega = M^{(S)}$$

$$M^{(S)} = \int_K \tilde{r}_{Sp}dF$$

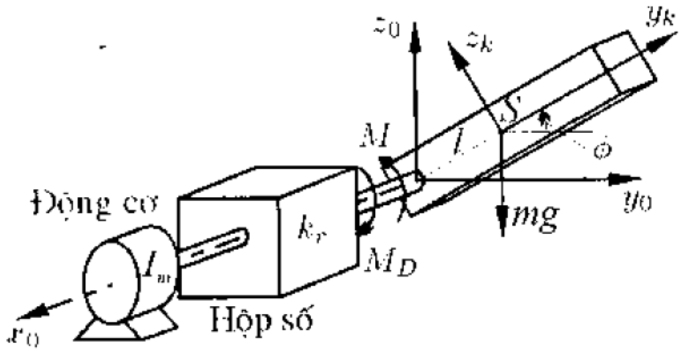
- Động năng:

$$\boxed{T = \frac{1}{2}\int_K {}_{(0)}v_P^T{}_{(0)}v_P dm}$$

$$= \frac{1}{2}\left(\underbrace{{}_{(0)}v_S^T{}_{(0)}v_S m}_{\text{Phan tinh tien}} + \underbrace{{}_{(0)}\omega^T \underbrace{{}^{OK}R_{(K)}I^{(S)}\left({}^{OK}R\right)^T}_{{}_{(0)}I^{(S)}}{}_{(0)}\omega}_{\text{Phan quay}}\right)$$

5.2.1 CÁC PHƯƠNG TRÌNH CƠ BẢN CỦA VẬT RẮN

- **Thí dụ 5.6**: Thiết lập phương trình vi phân chuyển động của một trục dẫn động:



Hình 5.18: Mô hình đơn giản của hệ thống dẫn động

Hệ có một bậc tự do vì chỉ thực hiện chuyển động quay quanh trục *x*. Tác động một ngẫu lực phát động M vào con lắc (khối lượng *m*). Hộp số nối từ động cơ có tỷ số truyền K_R. Moment quán tính của động cơ là I_m. Moment cản có dạng:

$$M_D = b_D\phi + b_R\, sgn\,\dot{\phi}$$

b_D : hệ số cản nhớt

b_R : hệ số ma sát Coulomb

Ma trận moment quán tính của con lắc đối với hệ tọa độ $(KS)_K$ gắn liền vào vật rắn có dạng:

$$_{(K)}I^{(S)} = \begin{pmatrix} I_x & 0 & 0 \\ 0 & I_y & 0 \\ 0 & 0 & I_z \end{pmatrix}$$

1.1.1 CÁC PHƯƠNG TRÌNH CƠ BẢN CỦA VẬT RẮN

$$ {}_{(0)}r_S = l\begin{pmatrix} 0 \\ C_\phi \\ S_\phi \end{pmatrix}, \quad {}_{(0)}v_S = l\dot{\phi}\begin{pmatrix} 0 \\ -S_\phi \\ C_\phi \end{pmatrix}, \quad \omega = \begin{pmatrix} \dot{\phi} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad R_x(\phi) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & C_\phi & -S_\phi \\ 0 & S_\phi & C_\phi \end{pmatrix} $$

$$ {}_{(0)}I^{(S)} = R_x(\phi)\,{}_{(K)}I^{(S)}R_x^T(\phi) = \begin{pmatrix} I_x & 0 & 0 \\ 0 & I_yC_\phi^2 + I_zS_\phi^2 & (I_y - I_z)C_\phi S_\phi \\ 0 & (I_y - I_z)C_\phi S_\phi & I_yS_\phi^2 + I_zC_\phi^2 \end{pmatrix} $$

$$ L_{rel}^{(S)} = {}_{(0)}I^{(S)} \cdot {}_{(0)}\omega = I_x\dot{\phi} $$

Moment động lượng khi chưa tính đến lực phát động của động cơ:

$$ L^{(0)} = {}_{(0)}r_S \times {}_{(0)}v_S m + L_{rel}^{(S)} = ml^2\dot{\phi} + I_x\dot{\phi} $$

Do con lắc chỉ thực hiện chuyển động quay quanh trục *x* nên chỉ có một phương trình vi phân chuyển động:

$$ \dot{L}_x^{(0)} = \left(I_x + ml^2\right)\ddot{\phi} + k_r^2 I_m \ddot{\phi} $$

$$ M_x^{(0)} = M - mgl\cos\phi - M_D $$

Phương trình vi phân chuyển động của con lắc:

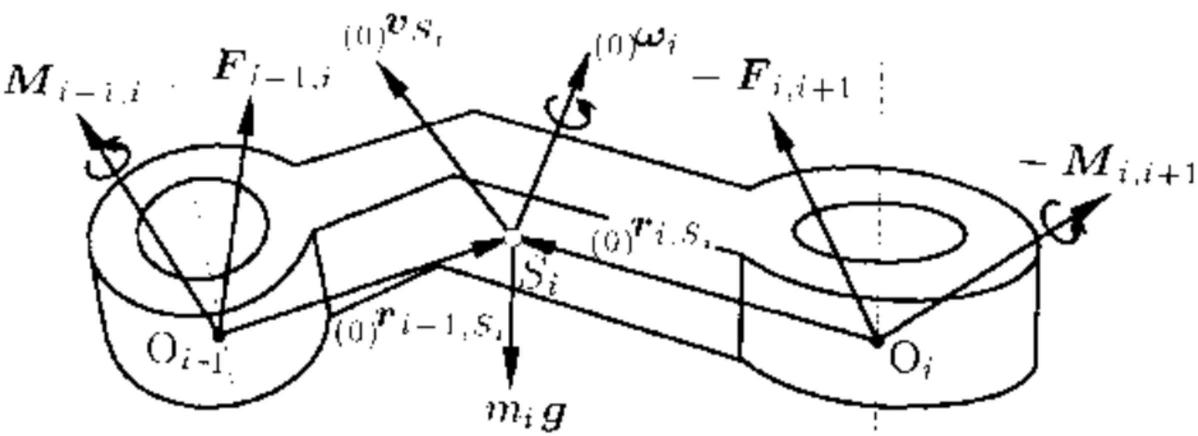
$$ \dot{\mathbf{L}}^{(0)} = \mathbf{M}^{(0)} $$

$$ \left(I_x + ml^2 + k_r^2 I_m\right)\ddot{\phi} + b_D\dot{\phi} + b_R \operatorname{sgn}\dot{\phi} + mgl\cos\phi = M $$

5.2.2 PHƯƠNG PHÁP NEWTON-EULER

- Để áp dụng phương pháp Newton-Euler ta cần:
  - Giải phóng các liên kết
  - Tách một hệ nhiều vật thành các vật rắn riêng lẻ
  - Áp dụng các định lý biến thiên động lượng và định lý biến thiên moment động lượng cho tất cả các vật rắn và khử các phản lực liên kết.

5.2.2 PHƯƠNG PHÁP NEWTON-EULER



Hình 5.19: Mô hình vật rắn thứ *i* được tách riêng ra

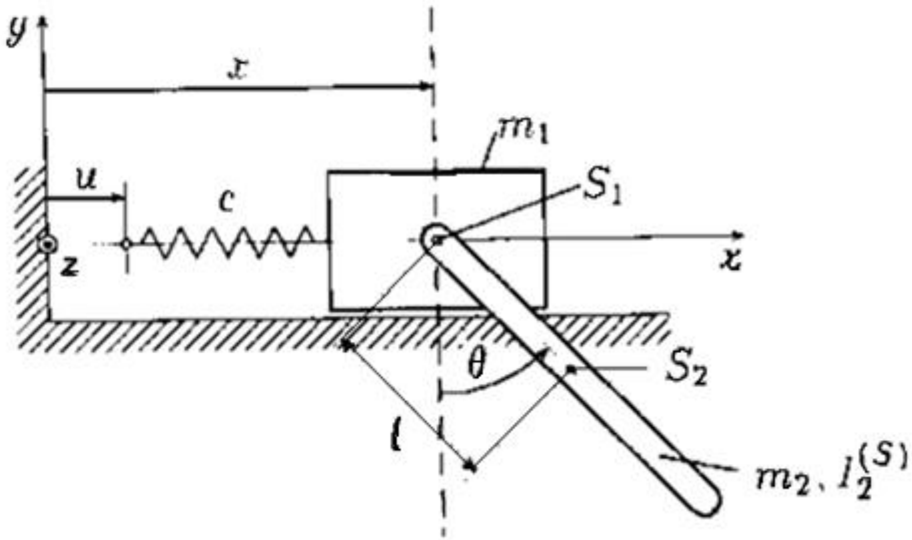
$\boldsymbol{F}_{i-1,i}$, $\boldsymbol{M}_{i-1,i}$: lực và moment do vật rắn thứ *i-1* tác dụng lên vật thứ *i*

$\boldsymbol{F}_{i,i+1}$, $\boldsymbol{M}_{i,i+1}$: lực và moment do vật rắn thứ *i* tác dụng lên vật thứ *i+1*

5.2.2 PHƯƠNG PHÁP NEWTON-EULER

- **Ví dụ**: con lắc eliptic

Áp dụng phương pháp Newton-Euler thành lập phương trinh vi phân chuyển động của hệ nhiều vật như Hình 5.20



Hình 5.20: Con lắc với điểm treo chuyển động

Cho biết: $I_2^{(S)} = \frac{1}{3} m_2 l^2$; *u(t)* kích động động học

Hệ có n = 2 bậc tự do. Các tọa độ suy rộng được chọn như hình vẽ

$$q = [x, \ \theta]^T$$

5.2.2 PHƯƠNG PHÁP NEWTON-EULER

Các tọa độ không gian của trọng tâm:

- Vật 1:

$$x_{S1} = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} \qquad x_1 = x, \qquad y_1 = 0$$

- Vật 2:

$$x_{S2} = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} \qquad x_2 = x + l\sin\theta, \qquad y_2 = -l\cos\theta$$

Các quan hệ động học:

$$\dot{x}_{S1} = J_1(q)\dot{q}$$

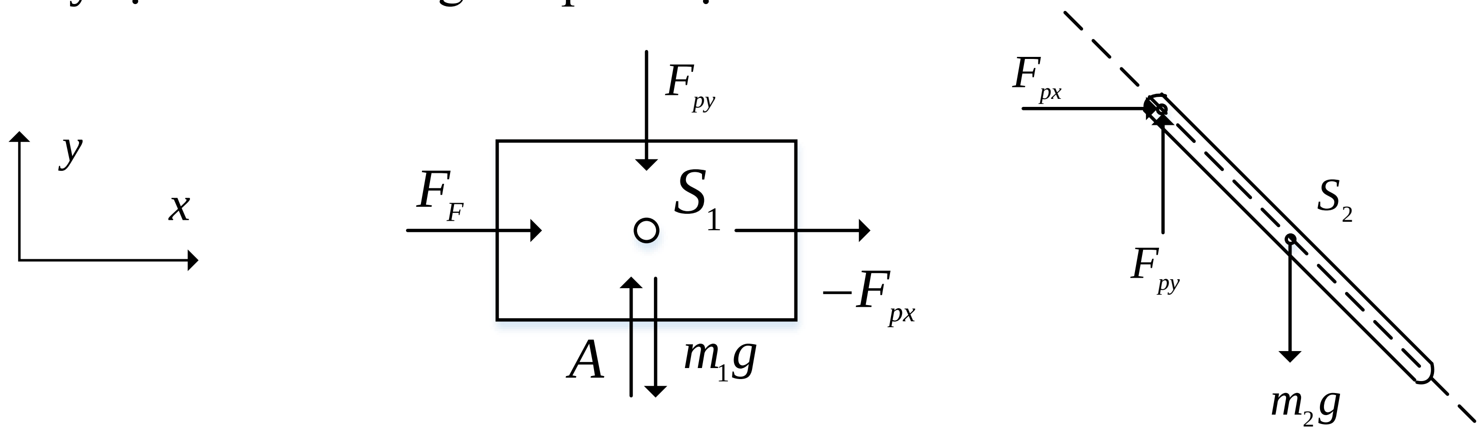
$$\dot{x}_{S2} = J_2(q)\dot{q}$$

trong đó ma trân JACOBI có dạng:

$$J_1 = \begin{pmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial x} & \frac{\partial x_1}{\partial \theta} \\ \frac{\partial y_1}{\partial x} & \frac{\partial y_1}{\partial \theta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad J_2 = \begin{pmatrix} \frac{\partial x_2}{\partial x} & \frac{\partial x_2}{\partial \theta} \\ \frac{\partial y_2}{\partial x} & \frac{\partial y_2}{\partial \theta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & l\cos\theta \\ 0 & l\sin\theta \end{pmatrix}$$

5.2.2 PHƯƠNG PHÁP NEWTON-EULER

Thay lực liên kết bằng các phản lực liên kết:



Hình 5.19: Tách hệ thành hai vật tự do (F_F lực đàn hồi, A phản lực của nền, F_{px}, F_{py} là các lực liên kết tại khớp

Áp dụng định lý biến thiên động lượng và moment biến thiên động lượng:

Vật 1:

$$m_1\ddot{x}_1 = -F_{px} + F_F \rightarrow m_1\ddot{x}_1 = -F_{px} + F_F$$

$$m_1\ddot{y}_1 = -F_{py} + A - m_1 g = 0 \rightarrow A = F_{py} + m_1 g$$

(bỏ qua định lý biến thiên moment động lượng do không có chuyển động quay)

Vật 2:

$$m_2\ddot{x}_2 = F_{px} \rightarrow m_2\left(\ddot{x} - l\sin\theta\ddot{\theta}\right) = F_{px}$$

$$m_2\ddot{y}_2 = F_{py} - m_2 g \rightarrow F_{py} = m_2\left(-l\cos\theta\ddot{\theta} + g\right)$$

$$I_2^{(S)}\ddot{\theta} = -F_{px} l\cos\theta - F_{py} l\sin\theta$$

5.2.2 PHƯƠNG PHÁP NEWTON-EULER

Lực đàn hồi:

$$F_F = -c\left(x-u\right)$$

Khử các lực liên kết ta được hai phương trình vi phân chuyển động:

$$\left(m_1+m_2\right)\ddot{x}+m_2 l\cos\theta\ddot{\theta}-m_2 l\dot{\theta}^2\sin\theta+cx=cu$$

$$\left(I_2^{(S)}+m_2 l^2\right)\ddot{\theta}+m_2 l\cos\theta\ddot{x}+m_2\, lg\sin\theta=0$$

$$\begin{pmatrix} m_1+m_2 & m_2 l\cos\theta \\ m_2 l\cos\theta & I_2^{(0)} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{\theta} \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} -m_2 l\dot{\theta}^2\sin\theta \\ 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} cu \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$I_2^{(0)}=I_2^{(S)}+m_2 l^2$$

Phản lực liên kết:

$$A=m_1 g+F_{py}=\left(m_1+m_2\right)g+m_2 l\left(\ddot{\theta}\sin\theta+\dot{\theta}^2\cos\theta\right)$$

5.2.3 PHƯƠNG TRÌNH LAGRANGE

- Phương trình Lagrange loại 2:

$$\boxed{\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}}\right)-\frac{\partial T}{\partial q}=Q}$$

T : động năng của hệ

$Q=\left(Q_1 \quad Q_2 \quad \dots \quad Q_n\right)^T$: vector các lực suy rộng

Nếu trong hệ có các lực bảo toàn Q_k thì lực suy rộng có thể biểu diễn:

$$Q=Q_k+Q_n=-\frac{\partial U(q)}{\partial q}+Q_n$$

$$\boxed{\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}}\right)-\frac{\partial T}{\partial q}+\frac{\partial U}{\partial q}=Q_n}$$

$U(q)$: hàm thế năng của hệ

Q_n : các thành phần lực suy rộng ứng với lực không thế

5.2.3 PHƯƠNG TRÌNH LAGRANGE

- Tổng động năng T: $T=\frac{1}{2}\dot{q}^T M(q)\dot{q}$

$M(q)=M^T(q)>0$: ma trận khối lượng, ma trận xác định dương, đối xứng

- Vector các lực suy rộng Q: $Q=Q_k+Q_n$

- Các phương trình chuyển động của hệ nhiều vật:

$$\underbrace{\sum_{j=1}^{n} M_{\mathbf{ij}}(q)\ddot{q}_j}_{cac\quad luc\quad quan\quad tinh} + \underbrace{\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} c_{i,jk}(q)\dot{q}_j\dot{q}_k}_{cac\quad luc\quad Euler\quad va\quad Coriolis} + \underset{cac\quad luc\quad bao\quad toan}{g_i(q)} = \underset{cac\quad luc\quad khong\quad bao\quad toan}{Q_{ni}}$$

$$\boxed{M(q)\ddot{q}+c(q,\dot{q})+g(q)+Q_R(q,\dot{q})=Q_{Antr.}(t)}$$

$c(q,\dot{q})$: Các lực Euler và Coriolis

$Q_R(q,\dot{q})$: lực suy rộng của lực hao tán

$Q_{Antr}(q,\dot{q})$: lực suy rộng của lực phát động

$g(q)$: lực bảo toàn (lực thế)

5.2.3 PHƯƠNG TRÌNH LAGRANGE

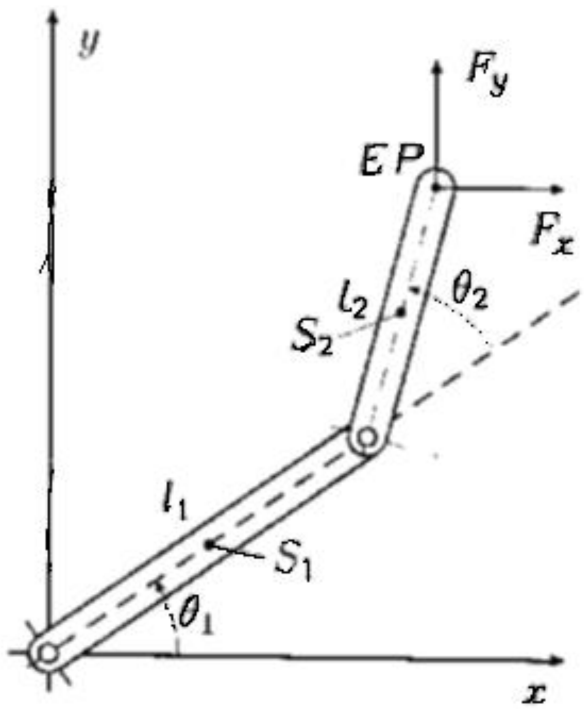
- Các bước tiến hành sử dụng phương trình Lagrange:
  - Chọn các tọa độ suy rộng $\boldsymbol{q}$
  - Thiết lập các điều kiện ràng buộc động học
  - Tính động năng T và thế năng U
  - Tính các lực suy rộng không bảo toàn
  - Thực hiện các phép tính đạo hàm

5.2.3 PHƯƠNG TRÌNH LAGRANGE

- **Ví dụ**: Cho cơ cấu phẳng hai khâu. Mỗi khâu là một thanh trụ đồng chất. Tại điểm thao tác EP có tác dụng của ngoại lực $F = \left(F_x, F_y\right)^T$. Bỏ qua ảnh hưởng của ma sát.

Cho biết: $l_1, l_2, m_1, m_2, S_1, S_2$ là các khối tâm

Viết phương trình chuyển động cho mỗi khâu.



5.2.3 PHƯƠNG TRÌNH LAGRANGE

- Các tọa độ suy rộng: $\boldsymbol{q} = [\theta_1, \theta_2]^T$
- Quan hệ động học:

$$ {}_{(0)}\boldsymbol{x}_{S1} = \frac{l_1}{2}\begin{bmatrix} c_1 \\ s_1 \end{bmatrix}, \qquad {}_{(0)}\boldsymbol{x}_{S2} = \begin{bmatrix} l_1 c_1 + \frac{1}{2} l_2 c_{12} \\ l_1 s_1 + \frac{1}{2} l_2 s_{12} \end{bmatrix} $$

$$ {}_{(0)}\boldsymbol{v}_{S1} = \boldsymbol{J}_{T1}.\dot{\boldsymbol{q}} \qquad {}_{(0)}\boldsymbol{v}_{S2} = \boldsymbol{J}_{T2}.\dot{\boldsymbol{q}} $$

với ma trận Jacobi:

$$ \boldsymbol{J}_{T1} = \frac{l_1}{2}\begin{bmatrix} -\frac{1}{2} l_1 s_1 & 0 \\ \frac{1}{2} l_1 c_1 & 0 \end{bmatrix}, \qquad \boldsymbol{J}_{T2} = \begin{bmatrix} -l_1 s_1 - \frac{1}{2} l_2 s_{12} & -\frac{1}{2} l_2 s_{12} \\ l_1 c_1 + \frac{1}{2} l_2 c_{12} & \frac{1}{2} l_2 c_{12} \end{bmatrix} $$

5.2.3 PHƯƠNG TRÌNH LAGRANGE

- Động năng:

$$T = \frac{1}{2} m_1 \left({}_{(0)}v_{S1} \right)^2 + \frac{1}{2} m_1 \left({}_{(0)}v_{S1} \right)^2 + \frac{1}{2} I_1 \left({}_{(0)}\omega_1 \right)^2 + \frac{1}{2} I_2 \left({}_{(0)}\omega_2 \right)^2$$

với

$$ {}_{(0)}\omega_1 = \dot{\theta}_1, \qquad {}_{(0)}\omega_2 = \dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2, \qquad I_1 = \frac{1}{12} m_1 l_1^2, \qquad I_2 = \frac{1}{12} m_2 l_2^2$$

- Chú ý đến các điều kiện ràng buộc động học ta có biểu thức động năng:

$$T = \frac{1}{2} M_{11} \dot{\theta}_1^2 + M_{12} \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 + \frac{1}{2} M_{22} \dot{\theta}_2^2$$

$$M_{11} = \frac{1}{3} m_1 l_1^2 + \frac{1}{3} m_2 l_2^2 + m_2 l_1^2 + m_2 l_1 l_2 c_2,$$

$$M_{12} = M_{21} = \frac{1}{3} m_2 l_2^2 + \frac{1}{2} m_2 l_1 l_2 c_2,$$

$$M_{22} = \frac{1}{3} m_2 l_2^2$$

5.2.3 PHƯƠNG TRÌNH LAGRANGE

- Thế năng: $$U = m_1 g y_1 + m_2 g y_2 = m_1 g \frac{l_1}{2} s_1 + m_2 g \left(l_1 s_1 + \frac{1}{2} l_2 s_{12} \right)$$

$$U = m_1 g y_1 + m_2 g y_2 = m_1 g \frac{l_1}{2} s_1 + m_2 g \left(l_1 s_1 + \frac{1}{2} l_2 s_{12} \right)$$

$$\boldsymbol{Q}_k = -\frac{\partial \boldsymbol{U}}{\partial \boldsymbol{q}} = \begin{bmatrix} -g_1(\boldsymbol{q}) \\ -g_2(\boldsymbol{q}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\dfrac{\partial \boldsymbol{U}}{\partial \theta_1} \\ -\dfrac{\partial \boldsymbol{U}}{\partial \theta_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m_1 g \dfrac{l_1}{2} c_1 + m_2 g \left(l_1 c_1 + \dfrac{1}{2} l_2 c_{12} \right) \\ -\dfrac{1}{2} m_2 g l_2 c_{12} \end{bmatrix}$$

- Lực suy rộng không bảo toàn:

Ngoại lực đặt tại điểm thao tác EP:

$$\begin{aligned} x &= l_1 c_1 + l_2 c_{12} \\ y &= l_1 s_1 + l_2 s_{12} \end{aligned} \quad \text{hay} \quad \boldsymbol{J}_T = \begin{bmatrix} -l_1 s_1 - l_2 s_{12} & -l_2 s_{12} \\ l_1 c_1 + l_2 c_{12} & l_2 c_{12} \end{bmatrix}$$

Từ $\boldsymbol{Q}_n = \boldsymbol{J}_T^T \boldsymbol{F}$ ta suy ra:

$$\boldsymbol{Q}_n = \begin{bmatrix} Q_{n1} \\ Q_{n2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \left(-l_1 s_1 - l_2 s_{12}\right) F_x + \left(l_1 c_1 + l_2 c_{12}\right) F_y \\ -l_2 s_{12} F_x + l_2 c_{12} F_y \end{bmatrix}$$

5.2.3 PHƯƠNG TRÌNH LAGRANGE

- Các phương trình chuyển động:

$$M_{11}\ddot{\theta}_1 + M_{12}\ddot{\theta}_2 + c_{1,12}\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2 + c_{1,22}\dot{\theta}_2^2 + g_1 = Q_{n1}$$

$$M_{12}\ddot{\theta}_1 + M_{22}\ddot{\theta}_2 + c_{2,11}\dot{\theta}_1^2 + g_2 = Q_{n2}$$

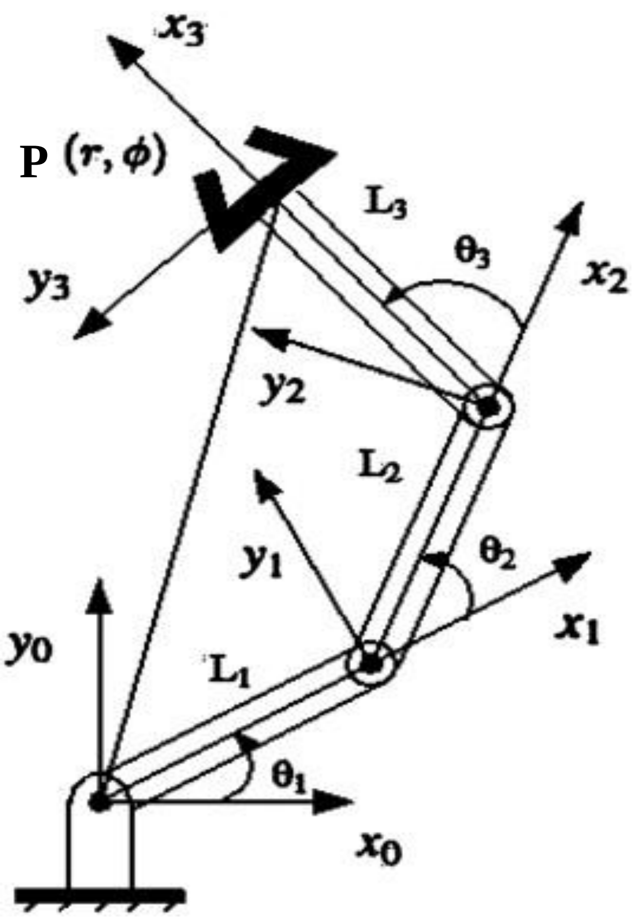
Trong đó:

$$c_{1,12} = \frac{\partial M_{11}}{\partial \theta_2} - \frac{1}{2}\frac{\partial M_{12}}{\partial \theta_1} = -m_2 l_1 l_2 s_2$$

$$c_{1,22} = \frac{\partial M_{12}}{\partial \theta_2} - \frac{1}{2}\frac{\partial M_{22}}{\partial \theta_1} = -\frac{1}{2} m_2 l_1 l_2 s_2$$

$$c_{2,11} = \frac{\partial M_{21}}{\partial \theta_1} - \frac{1}{2}\frac{\partial M_{11}}{\partial \theta_2} = \frac{1}{2} m_2 l_1 l_2 s_2$$

1. Cho sơ đồ robot như hình vẽ. Viết phương trình xác định vị trí cho điểm thao tác P bằng phép biến đổi thuần nhất hoặc ký hiệu Denavit-Hartenberg.



2. Cho sơ đồ robot như hình vẽ. Viết phương trình xác định vị trí cho điểm thao tác P bằng phép biến đổi thuần nhất hoặc ký hiệu Denavit-Hartenberg.