LÊ CHÍ LUẬN (Chủ biên)
LÊ TRUNG KIÊN
ĐOÀN THỊ THANH HẰNG
PHẠM QUANG DŨNG

TOÁN RỜI RẠC

NHÀ XUẤT BẢN KHOA HỌC TỰ NHIÊN VÀ CÔNG NGHỆ

Nguồn bìa 1:

https://en.wikipedia.org/wiki/Seven_Bridges_of_K%C3%B6nigsberg
https://www.britannica.com/science/Konigsberg-bridge-problem
https://vi.wikipedia.org/wiki/Leonhard_Euler

MỤC LỤC

DANH MỤC BẢNG

DANH MỤC HÌNH

DANH MỤC TỪ VIẾT TẮT

Từ viết tắt	**Từ đầy đủ**
GTVT	Giao thông vận tải
CNTT	Công nghệ Thông tin
Đpcm	Điều phải chứng minh
Poset	Partially ordered set
DFS	Depth First Search
BFS	Breadth First Search

LỜI NÓI ĐẦU

Giáo trình “Toán rời rạc” được biên soạn nhằm cung cấp cho sinh viên ngành Hệ thống thông tin của Trường Đại học Công nghệ GTVT những kiến thức của một môn học được xem là cơ sở của chuyên ngành.

Toán rời rạc là một lĩnh vực của toán học nghiên cứu các vấn đề rời rạc, được ứng dụng làm cơ sở toán học cho các lĩnh vực nghiên cứu của công nghệ thông tin. Cuốn giáo trình này nhằm giới thiệu những kiến thức cơ bản trong ba lĩnh vực có nhiều ứng dụng là: Lý thuyết tổ hợp, lý thuyết đồ thị và đại số logic.

Giáo trình gồm 3 chương:

CHƯƠNG 1: LÝ THUYẾT TỔ HỢP

Nội dung của Chương 1 trình bày các vấn đề liên quan đến tập hợp, tính chất của tập hợp, các nguyên lý được sử dụng để đếm các đối tượng. Chương 1 ngoài việc trang bị cho sinh viên những kiến thức toán, còn hình thành tư duy giải quyết các vấn đề thực tế, rèn luyện kỹ năng lập trình, đánh giá và tối ưu các thuật toán.

CHƯƠNG 2: LÝ THUYẾT ĐỒ THỊ

Chương 2 trình bày các vấn đề liên quan đến đồ thị, các khái niệm, định nghĩa liên quan đến đồ thị như đồ thị vô hướng, đồ thị có hướng, đơn đồ thị, đa đồ thị, bậc của đồ thị, đường đi, chu trình, đồ thị liên thông, v.v. *Đồng thời trong chương này, còn trình bày các bài toán có rất nhiều ứng dụng trong đời sống như bài toán tìm đường đi ngắn nhất, xác định cây bao trùm, duyệt đồ thị theo chiều rộng và chiều sâu, bài toán hành trình người đưa thư, người bán hàng,* v.v.

CHƯƠNG 3: ĐẠI SỐ LOGIC

Nội dung của Chương 3, trình bày các vấn đề liên quan đến đại số logic, là cơ sở để nắm bắt các vấn đề phức tạp của kỹ thuật máy tính. Chương này sẽ trình bày các vấn đề liên quan đến logic mệnh đề, các phép toán với logic, luật logic, luật suy diễn và đại số Boole, v.v. *Ngoài ra Chương 3 còn giới thiệu một số thuật toán để tối thiểu hóa các hàm logic.*

Cuối mỗi chương đều xây dựng hệ thống câu hỏi và bài tập để sinh viên ôn tập, rèn luyện và củng cố lý thuyết môn học. Giáo trình “Toán rời rạc” được biên soạn công phu, nghiêm túc dựa trên kinh nghiệm giảng dạy môn Toán rời rạc cho sinh viên các khóa 64, 65, 67, 68 tại Trường Đại học Công nghệ GTVT của các giảng viên bộ môn Hệ thống thông tin. Khi biên soạn giáo trình này, nhóm tác giả có tham khảo một số giáo trình Toán rời rạc của một số trường Đại học có uy tín ở Việt

Nam và một số tài liệu uy tín của nước ngoài, được sự tham gia và đóng góp ý kiến của nhiều thầy cô đã và đang giảng dạy môn Toán rời rạc ở các trường Đại học trên địa bàn Hà Nội. Nhóm tác giả chân thành cảm ơn Th.S Võ Thị Hải Yến, giảng viên Trường Đại học Kinh doanh và Công nghệ Hà Nội, Th.S Phạm Thị Thuận, giảng viên Trường Đại học Công nghệ GTVT đã góp nhiều ý kiến quý báu, chia sẻ nhiều kinh nghiệm trong quá trình nhóm biên soạn cuốn giáo trình này.

Trong quá trình biên soạn, nhóm tác giả đã rất cố gắng để có được một tài liệu tham khảo có chất lượng, tuy nhiên không thể tránh khỏi những thiếu sót. Rất mong được sự đóng góp ý kiến để giáo trình được cập nhật và hoàn thiện hơn.

Hà Nội, tháng 2 năm 2019

Nhóm tác giả

CHƯƠNG 1
LÝ THUYẾT TẬP HỢP

Toán rời rạc là một lĩnh vực của toán học nghiên cứu các đối tượng rời rạc. Chúng ta sẽ sử dụng công cụ của toán rời rạc khi phải đếm các đối tượng, khi nghiên cứu quan hệ giữa các tập rời rạc, khi phân tích các quá trình hữu hạn.

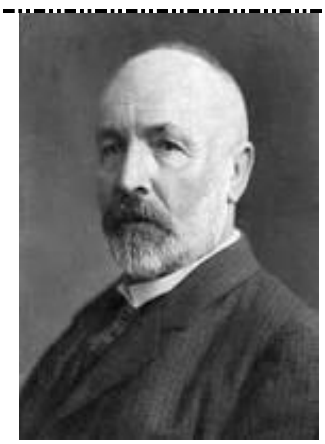
Tổ hợp là một lĩnh vực của toán học rời rạc, xuất hiện vào đầu thế kỷ XVII. Trong một thời gian dài, dường như tổ hợp nằm ngoài guồng máy phát triển của toán học cũng như các ứng dụng của nó. Tình thế bắt đầu đổi khác khi xuất hiện các máy tính và cùng với nó là sự phát triển của toán hữu hạn. Hiện nay lý thuyết tổ hợp được áp dụng trong nhiều lĩnh vực khác nhau: lý thuyết số, hình học hữu hạn, biểu diễn nhóm, đại số không giao hoán v.v.

Lý thuyết tổ hợp là một phần quan trọng của toán rời rạc, đối tượng chính của nó là các cấu hình tổ hợp, các phương pháp lựa chọn phần tử hoặc bộ các phần tử trong các tập hữu hạn theo các cách khác nhau. Các kết quả của nó là cơ sở để xây dựng nhiều thuật toán có hiệu quả để trong các chương trình ứng dụng như các thuật toán vét cạn, các thuật toán sinh phần tử mới, các thuật toán lựa chọn phương án tối ưu v.v..

Nội dung chính của Chương 1, lý thuyết tập hợp giúp sinh viên tìm hiểu các khái niệm về tập hợp, các phép toán trên tập hợp, ứng dụng của tập hợp trong khoa học máy tính. Bên cạnh đó, Chương 1 giới thiệu các nguyên lý cộng, nguyên lý nhân, nguyên lý bù trừ, cách xác định số lượng phần tử của tập hợp thông qua lý thuyết tổ hợp. Phần cuối của chương này, đề cập đến cách chứng minh toán học thông qua nguyên lý Dirichlet, hệ quy hồi.

1.1. TẬP HỢP VÀ CÁC PHÉP TOÁN TẬP HỢP

1.1.1. Sơ lược về tập hợp



Georg Ferdinand Ludwig Philipp Cantor (03/3/1845 – 06/01/1918) là một nhà toán học người Đức, được biết đến nhiều nhất với tư cách cha đẻ của lý thuyết tập hợp, một lý thuyết đã trở thành một lý thuyết nền tảng trong toán học. Cantor đã cho thấy tầm quan trọng của quan hệ song ánh giữa các phần tử của hai tập hợp, định nghĩa các tập vô hạn và chứng minh rằng các số thực là *"đông đúc"* hơn các số tự nhiên. Trên thực tế, phương pháp chứng minh định lý này của Cantor ngụ ý sự tồn tại *"vô hạn các tập vô hạn"*. Ông định nghĩa bản số và số thứ tự và phép tính về chúng. Sự nghiệp toán học vĩ đại của ông nhận được sự quan tâm lớn về mặt triết học, nhờ đó khiến ông càng được biết đến nhiều hơn.

Tập hợp là một trong những khái niệm quan trọng nhất của toán học. Có thể nói rằng *"lý thuyết tập hợp"* là cái gốc của các ngành toán học. Chúng ta có thể xem việc nghiên cứu mỗi ngành toán học là nghiên cứu tập hợp của các đối tượng loại này hay loại khác.

Vào nửa đầu thế kỷ XIX, nhà toán học người Đức Georg Cantor (1845-1918), lần đầu tiên đã nghiên cứu các tập hợp và ứng dụng của chúng theo ý nghĩa là nền tảng của các ngành toán học (các công trình nghiên cứu đã được công bố trong khoảng từ 1871-1883). Từ đó lý thuyết tập hợp đã thống nhất được nhiều quan niệm toán học tưởng chừng như không có liên hệ với nhau và đã giúp xây dựng các cơ sở logic cho nhiều ngành toán học khác nhau.

1.1.1.1. Khái niệm về tập hợp

Tập hợp một khái niệm cơ bản trong toán học, dùng để mô tả một *"nhóm đối tượng"* không sắp thứ tự, có cùng đặc điểm hay tính chất nào đó.

Các đối tượng trong một tập hợp được gọi là *các phần tử* của tập hợp. Một tập hợp được nói là *chứa* các phần tử của nó.

Ký hiệu tập hợp bằng các chữ cái viết hoa A, B, C, v.v.. Các phần tử của tập hợp ký hiệu bằng các chữ cái viết thường a, b, c, v.v..

Ví dụ 1.1

- Các số tự nhiên là một tập hợp, kí hiệu là N. Đặc điểm chung của các phần tử của N là các *số nguyên dương*.

- Các số nguyên trong khoảng từ 1 đến 250 mà chia hết cho một trong các số nguyên tố 2, 3, 5, 7 là một tập hợp, kí hiệu là K. Đặc điểm chung của các phần tử của K là *nguyên dương không quá 250 và chia hết cho một trong các số 2, 3, 5, 7.*

- Các sinh viên trong lớp 68DCHT23 là một tập hợp, đặc điểm là *sinh viên và học lớp 68DCHT23, học cùng một chương trình môn học*.

- Đội tuyển quốc gia Việt Nam thi đấu tại Asian Cup 2019 là một tập hợp. Đặc điểm chung của tập hợp này là các cầu thủ đang thi đấu cho các câu lạc bộ trong nước hoặc thi đấu cho các câu lạc bộ trên thế giới, có quốc tịch Việt Nam. Số lượng phần tử tối đa của tập hợp này là 23 phần tử.

1.1.1.2. Định nghĩa toán học về tập hợp

Định nghĩa 1.1
Định nghĩa toán học của tập hợp:

$$A = \{x \in \cup \mid P(x)\}$$

Tập hợp A bao gồm các phần tử x thuộc không gian ∪, thỏa mãn tính chất P(x) nào đó.

Ví dụ 1.2

- A = $\{x \in N\}$: tập hợp các số tự nhiên.

- B = $\{x \in Z^+ | x \le 10\}$: tập hợp các số nguyên dương nhỏ hơn hoặc bằng 10.

- C = $\left\{\frac{p}{q} \middle| p \in Z, q \in Z, q \neq 0\right\}$: tập hợp các số hữu tỷ.

- D = $\{x \in R | \ 2x^2 + 5x - 7 = 0\}$: tập các số thực, là nghiệm của phương trình bậc hai $2x^2 + 5x - 7 = 0$.

Định nghĩa 1.2
Cho tập hợp A. Ta viết $a \in A$ nếu phần tử a thuộc tập hợp A và viết $a \notin A$ nếu phần tử a không thuộc tập hợp A.

Ví dụ 1.3

Cho tập hợp A = $\{x \in N | x \vdots 2\}$. Dễ dàng nhận thấy $4 \in A$ và $5 \notin A$.

1.1.1.3. Xác định tập hợp

Xác định tập hợp
Tập hợp có thể được mô tả bằng 3 cách: - Cách 1: Liệt kê các phần tử của tập hợp. - Cách 2: Nêu các tính chất của các phần tử của tập hợp. - Cách 3: Biểu diễn hình học (sử dụng biểu đồ Venn).

Cách 1: Biểu diễn tập hợp bằng cách liệt kê các phần tử của tập hợp.

Với cách xác định này, tên tập hợp là chữ cái viết hoa, các phần tử của tập hợp được viết trong hai dấu ngoặc nhọn “{ }”.

Mỗi phần tử được liệt kê một lần theo thứ tự tùy ý, được ngăn cách với nhau bằng dấu “,” hoặc “;”. Trong trường hợp nếu các phần tử của tập hợp là số, người ta thường sử dụng dấu “;” để tránh nhầm lẫn giữa số tự nhiên và số thập phân.

Ví dụ 1.4

- Tập hợp tất cả các nguyên âm trong bảng chữ cái tiếng Anh có thể viết như sau: *V={a, e, i, o, u};*

- Tập hợp A ={1; 2; 3; 4; 5}.

- Tập hợp các số tự nhiên N = {0; 1; 2; 3,…}.

- Tập hợp các số nguyên Z = {…; -2; -1; 0; 1; 2;…}.

- Tập hợp các số nguyên dương Z^+ = {1; 2; 3; …}.

- Tập hợp B gồm các số tự nhiên lớn hơn hoặc bằng 9 và nhỏ hơn hoặc bằng 16: B = {9; 10; 11; 12; 13; 14; 15; 16}.

Cách 2: Biểu diễn bằng cách chỉ ra tính chất của tập hợp.

Với cách xác định tập hợp này, người ta thường chỉ ra các đặc điểm chung của các phần tử trong tập hợp thông qua biểu thức toán học.

Ví dụ 1.5

- Tập hợp A = $\{x \in N | x \leq 100 \text{ và } x \vdots 2\}$: tập hợp các số tự nhiên nhỏ hơn hoặc bằng 100 và chia hết cho 2. A là tập hợp các số tự nhiên chẵn nhỏ hơn hoặc bằng 100. Nếu biểu diễn A bằng cách liệt kê các phần tử, thì A có thể được viết như sau: A = {0, 2, 4, 6,…, 96, 98, 100}.

- Tập hợp B = $\{x \in R | x^2 - 3x + 2 = 0\}$: tập hợp các nghiệm của phương trình $x^2 - 3x + 2 = 0$. Nếu biểu diễn B bằng cách liệt kê các phần tử, thì B = {1, 2}.

- Tập hợp C = $\{x \in N | 9 \leq x \leq 16\}$: tập hợp các số tự nhiên lớn hơn hoặc bằng 9 và nhỏ hơn hoặc bằng 16.

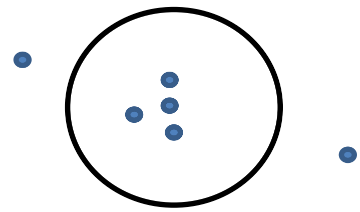
- Tập hợp D = $\{x \in N | \mathrm{x} = \mathrm{n}.(\mathrm{n}+1), n \in N, 1 \leq n \leq 5\}$. Nếu biểu diễn D bằng cách liệt kê, thì D được xác định như sau: D = {2, 6, 12, 20, 30}.

Cách 3: Biểu diễn hình học, sử dụng biểu đồ Venn để thể hiện mối quan hệ giữa phần tử và tập hợp.

Sơ đồ Venn (còn được gọi là biểu đồ Venn hoặc sơ đồ tập hợp) là một sơ đồ cho thấy tất cả các mối quan hệ logic có thể có giữa một số lượng hữu hạn các tập hợp. Sơ đồ Venn đã được John Venn xây dựng khoảng năm 1880.

Trong cách biểu diễn này, sử dụng các hình tròn giao nhau để mô tả các đại lượng và mối quan hệ giữa chúng.

Biểu đồ Venn cho ta cách nhìn trực quan về quan hệ giữa các đại lượng, từ đó dễ dàng xác định được các yếu tố chưa biết.



Hình 1.1: Biểu đồ Venn thể hiện mối quan hệ giữa phần tử và tập hợp.

1.1.1.4. Mối quan hệ giữa các tập hợp.

Định nghĩa 1.3

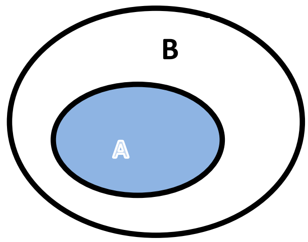
Tập con.

Cho hai tập hợp A, B. Tập A là tập con của tập B khi và chỉ khi mọi phần tử của tập A đều là phần tử của tập B. Ký hiệu $A \subseteq B$ thể hiện tập A là tập con của tập B.

Định nghĩa về mặt toán học:

$$A \subseteq B \Leftrightarrow \forall x(x \in A \rightarrow x \in B)$$

Thể hiện mối quan hệ tập hợp A là tập con của tập B bằng biểu đồ Venn:



Hình 1.2: Biểu đồ Venn thể hiện tập A là tập con của tập B.

Chứng minh tập A là tập con của tập B

Để chứng minh tập A là tập con của tập B ($A \subseteq B$), cần chứng tỏ nếu một phần tử bất kỳ x thuộc tập A thì phần tử x phải thuộc vào tập B:

$$A \subseteq B \Leftrightarrow \forall x(x \in A \rightarrow x \in B)$$

Chứng minh tập A không phải là tập con của tập B

Để chứng minh tập A không phải là tập con của tập B ($A \nsubseteq B$), chỉ cần chỉ ra một giá trị x thuộc tập A nhưng x không thuộc tập B:

$$A \nsubseteq B \Leftrightarrow \exists x(x \in A \land x \notin B)$$

Ví dụ 1.6

Cho tập hợp A = $\{x \in N | x^2 - 3x + 2 = 0\}$ và tập hợp B = {1, 2, 3, 4, 5}. Chứng minh tập A là tập con của tập B.

Hướng dẫn:

Vì phương trình $x^2 - 3x + 2 = 0$ có hai nghiệm phân biệt $x_1 = 1$, $x_2 = 2$ nên tập hợp A = {1, 2}.

Vì $1 \in B$ và $2 \in B$, nên mỗi phần tử của tập A đều là phần tử của tập B. Do đó tập A là tập con của tập B.

Ví dụ 1.7

Cho tập hợp A = $\{x \in N | x \leq 10 \wedge x \vdots 3\}$ và tập hợp B = $\{x \in N | x \vdots 2\}$. Chứng tỏ tập A không phải tập con của tập B.

Hướng dẫn:

Xác định các phần tử của tập hợp A:

Tập A = $\{x \in N | x \leq 10 \wedge x \vdots 3\}$ bao gồm các phần tử là các số tự nhiên, nhỏ hơn 10 và chia hết cho 3. Do đó A = {0, 3, 6, 9}.

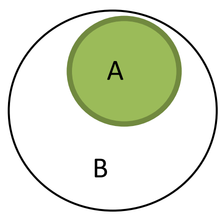
Xác định các phần tử của tập hợp B:

Tập B = $\{x \in N | x \vdots 2\}$ bao gồm các phần tử là các số tự nhiên, chia hết cho 2. Do đó, tập B gồm các phần tử có dạng *2n* với n ∈ N: B = {0, 2, 4, 6, 8, 10,…};

Nhận thấy $3 \in A$ nhưng $3 \notin B$, nên tập A không phải là tập con của tập B.

Lưu ý:

Nếu tập A là tập con của tập B và tập A không bằng tập B thì tập A được gọi là tập con thực sự của tập B, kí hiệu là $A \subset B$.



Hình 1.3: Biểu đồ Venn thể hiện tập A là tập con thực sự của tập B.

Định nghĩa 1.4

Tập con thực sự

Cho hai tập hợp A, B.

A là tập con thực sự của B, $A \subset B$ khi và chỉ khi:

(1) $A \subseteq B$;

(2) Có ít nhất một phần tử của B không thuộc A.

Định nghĩa 1.5

Hai tập hợp bằng nhau

Cho hai tập hợp A, B. Tập A và tập B bằng nhau, ký hiệu A = B, khi và chỉ khi, với mọi phần tử thuộc tập A đều thuộc tập B và mọi phần tử thuộc tập B đều thuộc tập A.

Định nghĩa về mặt toán học:

$$A = B \Leftrightarrow A \subseteq B \text{ và } B \subseteq A$$

Ví dụ 1.8

Ví dụ 1.8a

Cho các tập hợp sau đây:

Tập $\mathbb{N}$: tập các số tự nhiên.

Tập $\mathbb{Z}$: tập các số nguyên.

Tập $\mathbb{Q}$: tập các số hữu tỉ.

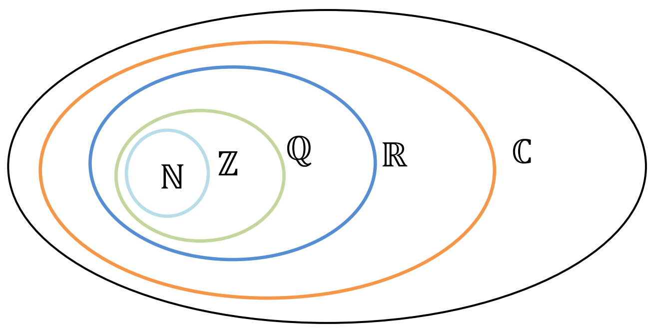
Tập $\mathbb{R}$: tập các số thực.

Tập $\mathbb{C}$: tập các số phức.

Xác định mối quan hệ giữa các tập hợp trên?

Hướng dẫn:

Mối quan hệ giữa các tập hợp là: $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$.



Hình 1.4: Mối quan hệ giữa các tập hợp số trong toán học.

Ví dụ 1.8b

Cho tập A = {x ∈ Z| x^2 < 6} và tập B = {-2, -1, 0, 1, 2}. Chứng tỏ A = B.

Hướng dẫn:

Xét tập A = {x ∈ Z| x^2 < 6}. Vì x^2 < 6 và x ∈ Z nên x^2 nhận một trong các giá trị {4, 1, 0}. Do đó, tập A = {-2, -1, 0, 1, 2}.

Vì tập B = {-2, -1, 0, 1, 2} nên mọi phần tử của tập A đều thuộc tập B và ngược lại. Do đó A = B.

1.1.1.5. Lực lượng của tập hợp

Như trên đã trình bày, đặc trưng của một tập hợp là các phần tử của nó. Một vấn đề rất quan trọng khi nghiên cứu tập hợp là đánh giá định lượng số lượng các phần tử của chúng. Để đánh giá một cách định lượng số lượng các phần tử của một tập hợp, người ta sử dụng khái niệm gọi là lực lượng của tập hợp, kí hiệu là N(A) hoặc |A|.

Định nghĩa 1.6
Cho tập hợp A, nếu tập hợp A có n phần tử phân biệt ($n \in Z^+$) thì ta nói rằng tập A là tập hữu hạn và n là lực lượng của tập A. Lực lượng của tập A được ký hiệu là N(A), hoặc |A|.

Lưu ý:

Tập hợp không có phần tử nào gọi là tập rỗng, ký hiệu $\emptyset$.

Ví dụ 1.9

- A = {1, 2, 3, 4, 5}⇒ N(A) = 5.

- B = $\{x \in Z^+ | \, x \leq 10 \text{ và } x \text{ là số lẻ}\}$. Dễ dàng nhận thấy B = {1, 3, 5, 7, 9} ⇒ N(B) = 5.

- C là tập hợp các ký tự của bảng chữ cái Latinh. ⇒ $N(C) = 26$.

- D = tập nghiệm thực của phương trình $x^2 + 1 = 0 \Rightarrow D = \emptyset \Rightarrow N(D) = 0$.

- E = $\{x \in N | \mathrm{x} = \mathrm{n.(n+1)}, n \in N, 1 \leq n \leq 5\}$. Tập E được biểu diễn bằng cách liệt kê phần tử: E = {2, 6, 12, 20, 30}. Do đó, N(E) = 5.

- Tập θ (rỗng) không có phần tử nào. Do đó N(θ) = 0

Định nghĩa 1.7
Tập hữu hạn và vô hạn
Tập hợp có lực lượng hữu hạn gọi là tập hữu hạn.
Tập có lực lượng vô hạn gọi là các tập vô hạn.

Ví dụ 1.10

- A = {1, 2, 3, 4, 5}. Do N(A) = 5 nên A là tập hữu hạn.

- B = $\{x \in N | \, x \leq 100 \wedge x \vdots 3\}$: là tập các số tự nhiên, nhỏ hơn hoặc bằng 100 và chia hết cho 3. Dễ dàng xác định được các phần tử của B = {0, 3, 6, …, 96, 99}, số lượng phần tử của B được xác định: N(B) = $\left\lceil \frac{100}{3} \right\rceil$ = 33. B là tập hữu hạn.

- Cho các tập hợp sau đây:

Tập ℕ: tập các số tự nhiên.

Tập ℤ: tập các số nguyên.

Tập ℚ: tập các số hữu tỉ.

Tập ℝ: tập các số thực.

Tập ℂ: tập các số phức.

ℕ, ℤ, ℚ, ℝ, ℂ là các tập vô hạn.

Lưu ý:

Trong giáo trình này chúng ta chỉ đề cập đến những tập hữu hạn.

Định nghĩa 1.8
Tập các tập con Cho A là một tập hợp, một trường hợp đặc biệt thường được xem xét là tập các tập con của tập A bao gồm cả tập rỗng của A, kí hiệu là *P(A)*, trong tập này mỗi phần tử là một tập con của tập A.

Ví dụ 1.11

Xác định P(A) của tập A = {0, 1, 2}.

Hướng dẫn:

P({0, 1, 2}) là tập các tập con của tập A = {0, 1, 2}. Do đó:

P(A) = {θ, {0}, {1}, {2}, {0, 1}, {0, 2}, {1, 2}, {0, 1, 2}}.

1.1.2. Các phép toán tập hợp

1.1.2.1. Phép hợp

Định nghĩa 1.9
Cho tập hợp A và tập hợp B. Hợp của tập A và tập B, ký hiệu $A \cup B$, là một tập hợp bao gồm tất cả các phần tử thuộc tập A hoặc tập B. Định nghĩa toán học phép hợp của tập hợp A và tập hợp B: $\mathrm{A} \cup \mathrm{B} = \{\mathrm{x} \mid \mathrm{x} \in \mathrm{A} \text{ hoặc } \mathrm{x} \in \mathrm{B}\}.$

Ví dụ 1.12

Ví dụ 1.12a.

Tập A = {1, 2, 3, 4, 5}, tập B = {1, 3, 5, 7, 9}. Xác định A ∪ B?

Hướng dẫn:

$\mathrm{A} \cup \mathrm{B} = \{1, 2, 3, 4, 5, 7, 9\}.$

Ví dụ 1.12b.

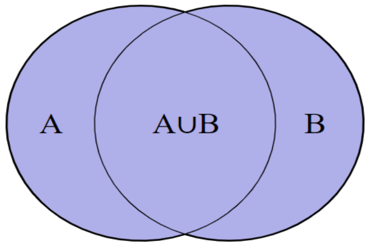
Cho tập C = $\{x \in N | x \leq 10 \text{ và } x \vdots 3\}$ và tập D = $\{x \in N | x \leq 10 \text{ và } x \vdots 2\}$. Xác định các phần tử của tập $C \cup D$?

Hướng dẫn:

Xác định các phần tử của C = {0, 3, 6, 9}.

Xác định các phần tử của D = {0, 2, 4, 6, 8, 10}.

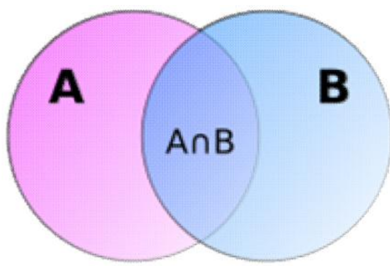
Do đó, $C \cup D$ = {0, 2, 3, 4, 6, 8, 9, 10}.



Hình 1.5: Biểu đồ Venn biểu diễn hợp của 2 tập A và tập B.

1.1.2.2. Phép giao

Định nghĩa 1.10
Cho tập hợp A và tập hợp B. Giao của tập A và tập B, ký hiệu $A \cap$ B, là một tập hợp bao gồm tất cả các phần tử vừa thuộc tập A, vừa thuộc tập B. Định nghĩa toán học phép giao của hai tập hợp A, B: $A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ và } x \in B\}$



Hình 1.6: Biểu đồ Venn biểu diễn phép giao của tập A và tập B

Ví dụ 1.13

Ví dụ 1.13a

Cho tập hợp A = {1, 2, 3, 4, 5}, tập hợp B = {1, 3, 5, 7, 9}. Xác định A ∩ B?

Hướng dẫn:

Theo định nghĩa của phép giao: Giao của tập A và tập B là tập hợp gồm các phần tử vừa thuộc tập A, vừa thuộc tập B, nên $A \cap B = \{1, 3, 5\}$.

Ví dụ 1.13b

Tập hợp C = $\{x \in N | x \leq 10 \text{ và } x \vdots 3\}$

Tập hợp D = $\{x \in N | x \leq 10 \text{ và } x \vdots 2\}$.

Xác định các phần tử của tập $C \cap D$?

Hướng dẫn:

Xác định các phần tử của tập hợp C = {0, 3, 6, 9}.

Xác định các phần tử của tập hợp D = {0, 2, 4, 6, 8, 10}.

Do đó, theo định nghĩa của phép giao: Giao của tập C và tập D là tập hợp gồm các phần tử vừa thuộc tập C, vừa thuộc tập D, $C \cap D$ = {0, 6}.

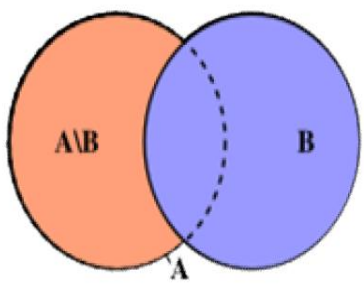
1.1.2.3. Phép hiệu

Định nghĩa 1.11

Cho tập hợp A và tập hợp B. Phép hiệu của tập hợp A với tập hợp B, ký hiệu A\B, là một tập hợp bao gồm tất cả các phần tử thuộc tập A nhưng không thuộc tập B.

Định nghĩa toán học phép hiệu của tập hợp A với tập hợp B:

$$A \backslash B = \{x \mid x \in A \text{ và } x \notin B\}.$$



Hình 1.7: Biểu đồ Venn biểu diễn phép hiệu của tập A và tập B.

Ví dụ 1.14

Ví dụ 1.14a.

Cho tập A = {1, 2, 3, 4, 5} và tập B = {1, 3, 5, 7, 9}. Xác định A\B và B\A?

Hướng dẫn:

Theo định nghĩa của phép hiệu: Hiệu của tập A và tập B là tập hợp gồm các phần tử thuộc tập A, mà không thuộc tập B, do đó: $A \backslash B = \{2, 4\}$ và B\A = {7, 9}.

Nhận xét: A\B ≠ B\A.

Ví dụ 1.14b.

Cho tập C = $\{x \in N | x \leq 10 \text{ và } x \vdots 3\}$ và tập D = $\{x \in N | x \leq 10 \text{ và } x \vdots 2\}$. Xác định các phần tử của tập $C \backslash D$ và tập $D \backslash C$?

Hướng dẫn:

Xác định các phần tử của tập C = {0, 3, 6, 9}.

Xác định các phần tử của tập D = {0, 2, 4, 6, 8, 10}.

Do đó, C\D = {3, 9} và D\C = {2, 4, 6, 8}.

1.1.2.4. Phép lấy phần bù

Định nghĩa 1.12

Cho tập hợp A và tập hợp B và tập A là tập con thực sự của tập B (A ⊂ B). Khi đó phần bù của tập A xét trong tập B, kí hiệu là $\overline{B_A}$, chính là hiệu của tập B với tập A (B\A).

Định nghĩa toán học của phép lấy phần bù của tập A xét trong tập B là:

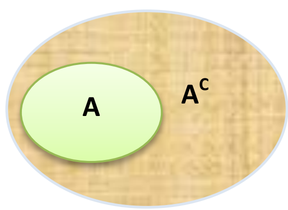
$$\overline{B_A} = \mathrm{B} \backslash \mathrm{A} = \{\mathrm{x} \mid \mathrm{x} \in \mathrm{B} \text{ và } \mathrm{x} \notin \mathrm{A}\}$$

Định nghĩa 1.13

Cho tập hợp A xét trong tập không gian ∪. Phần bù của tập A xét trên không gian ∪, ký hiệu là $\bar{A}$ (hoặc A^C), là tập hợp các phần tử thuộc ∪ mà không thuộc A.

Định nghĩa toán học phần bù của tập A xét trong không gian U:

$$A^C = \cup \backslash \mathrm{A} = \{\mathrm{x} \mid \mathrm{x} \in \cup \text{ và } \mathrm{x} \notin \mathrm{A}\}$$



Hình 1.8: Phần bù của A xét trong không gian U.

Ví dụ 1.15

Cho tập hợp A = {1, 2, 3, 4, 5}.

Tập hợp B ={1, 3, 5, 7, 9} và tập không gian U = {x |x ∈ N}.

Xác định $\overline{B_A}$ và A^C.

Hướng dẫn:

Tập A là tập con thực sự của tập B. Theo định nghĩa phần bù của tập hợp A xét trong tập B, ta có: $\overline{B_A} = \mathrm{B} \backslash \mathrm{A} = \{7, 9\}$.

Phần bù của tập A xét trong không gian U: $A^C = \{x \mid x \in N \wedge x \geq 6\}$.

Bảng 1.1: Tổng hợp các phép toán tập hợp

BẢNG TỔNG HỢP CÁC PHÉP TOÁN TRÊN TẬP HỢP
Cho A, B là các tập hợp xét trong không gian U. a. **Phép hợp** của A và B, ký hiệu $A \cup B$, là tập hợp bao gồm các phần tử thuộc tập A hoặc tập B. b. **Phép giao** của A và B, ký hiệu $A \cap B$, là tập hợp bao gồm các phần tử thuộc cả A và B. c. **Phép hiệu** của hai tập hợp A và B, ký hiệu là A\B, là tập hợp bao gồm các phần tử thuộc A mà không thuộc B. d. Nếu tập A là tập con thực sự của tập B, thì phần bù của tập A xét trong tập B, ký hiệu $\overline{B_A}$, chính là phép hiệu của tập B với tập A. e. **Phép lấy phần bù** của tập A xét trên không gian U, ký hiệu A^C, bao gồm các phần tử thuộc U mà không thuộc A. **Định nghĩa toán học:** $A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ hoặc } x \in B\}$ $A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ và } x \in B\}$ $A \backslash B = \{x \mid x \in A \text{ và } x \notin B\}$ $\overline{B_A} = B \backslash A = \{x \mid x \in B \text{ và } x \notin A\}$ với $A \subset B$ $A^C = \{x \mid x \in U \text{ và } x \notin A\}$

Ví dụ 1.16

Xét trên tập không gian U = {a, c, d, e, f, g}. Cho tập hợp A = {a, c, e, g} và tập hợp B = {d, e, f, g}. Xác định các phần tử của tập hợp sau đây:

a. $A \cup B$

b. $A \cap B$

c. A\B, B\A

d. A^C

Hướng dẫn:

a. Hợp của tập hợp A và tập hợp B là một tập hợp bao gồm các phần tử thuộc tập A hoặc tập B, do đó $A \cup B = \{a, c, d, e, f, g\}$.

b. Giao của tập hợp A và tập hợp B là một tập hợp bao gồm các phần tử vừa thuộc tập A, vừa thuộc tập B, do đó $A \cap B = \{e, g\}$.

c. Hiệu của tập hợp A với tập hợp B là một tập hợp bao gồm các phần tử thuộc tập A mà không thuộc tập B, do đó: $A \backslash B = \{a, c\}$.

Tương tự, ta có: B\A = {d, f}.

d. Phần bù của tập hợp A xét trên tập không gian U là tập hợp bao gồm các phần tử thuộc tập U mà không thuộc tập A, do đó: A^C = U\A = {d, f}.

1.1.2.5. Tính chất của tập hợp.

Trong phần 1.1.2.5, chúng ta sẽ tìm hiểu các tính chất của tập hợp, thực chất là các luật được áp dụng trên các tập hợp để biến đổi và thu gọn tập hợp.

Ví dụ 1.17

Chứng minh rằng với mọi tập hợp A, B, C ta luôn có:

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

Hướng dẫn:

Chứng minh hai tập hợp bằng nhau
Cho hai tập hợp A, B. Để chứng minh A = B, ta cần chứng tỏ rằng: $A \subseteq B: \forall x \in A \rightarrow x \in B$ (tập A là tập con của tập B). $B \subseteq A: \forall x \in B \rightarrow x \in A$ (tập B là tập con của tập A).

Để chứng minh $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ *ta chứng tỏ rằng:*

+ $A \cup (B \cap C) \subseteq ((A \cup B) \cap (A \cup C))$

+ $(A \cup B) \cap (A \cup C) \subseteq A \cup (B \cap C)$

a. Chứng tỏ $A \cup (B \cap C) \subseteq ((A \cup B) \cap (A \cup C))$

Giả sử rằng $x \in A \cup (B \cap C)$. Theo định nghĩa của phép hợp, ta có hoặc $x \in A$ hoặc $x \in B \cap C$.

Trường hợp 1: $x \in A$ (1. a)

Vì $x \in A$ nên $x \in A \cup B$

Vì $x \in A$ nên $x \in A \cup C$

Do đó $x \in \big((A \cup B) \cap (A \cup C)\big)$. (1. b)

Trường hợp 2: $x \in B \cap C$ (2. a)

Vì $x \in B \cap C$, theo định nghĩa của phép giao, nên $x \in B$ và $x \in C$.

Vì $x \in B$ nên $x \in A \cup B$

Vì $x \in C$ nên $x \in A \cup C$

Do đó $x \in ((A \cup B) \cap (A \cup C))$. (2. b)

Trong cả 2 trường hợp (1. a) và (2. a), nếu $x \in A \cup (B \cap C)$ ta đều đưa ra được kết luận $x \in ((A \cup B) \cap (A \cup C))$.

Do đó $A \cup (B \cap C) \subseteq ((A \cup B) \cap (A \cup C))$. (*)

b. Chứng tỏ $(A \cup B) \cap (A \cup C) \subseteq A \cup (B \cap C)$

Giả sử rằng $x \in ((A \cup B) \cap (A \cup C))$. Theo định nghĩa của phép giao của hai tập hợp, ta có $x \in (A \cup B)$ và $x \in (A \cup C)$.

Xét hai trường hợp $x \in A$ và $x \notin A$.

Trường hợp 1: $x \in A$

Vì $x \in A$ nên $x \in (A \cup (B \cap C))$ (theo định nghĩa phép hợp) (3. a)

Trường hợp 2: $x \notin A$

Vì $x \in (A \cup B)$ và $x \notin A$ nên $x \in B$ (3. b)

Vì $x \in (A \cup C)$ và $x \notin A$ nên $x \in C$ (3. c)

Từ (3. b) và (3. c), suy ra $x \in (B \cap C)$.

Do đó $x \in (A \cup (B \cap C))$ (3. d)

Trong cả hai trường hợp, nếu $x \in (A \cup B) \cap (A \cup C)$ thì ta đều đưa ra được kết luận $x \in (A \cup (B \cap C))$.

Do đó, $(A \cup B) \cap (A \cup C) \subseteq A \cup (B \cap C)$. (**)

Từ (*) và (**), ta kết luận $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$.

Ví dụ 1.18

Chứng minh rằng với mọi tập A, B ta luôn có:

$$(A \cap B)^C = A^C \cup B^C$$

Hướng dẫn:

Để chứng minh $(A \cap B)^C = A^C \cup B^C$*, ta chứng tỏ:*

+ $(A \cap B)^C \subseteq A^C \cup B^C$

+ $A^C \cup B^C \subseteq (A \cap B)^C$

a. Chứng minh $(A \cap B)^C \subseteq A^C \cup B^C$

Giả sử rằng $x \in (A \cap B)^C \Rightarrow x \notin A \cap B$

Có 3 trường hợp có thể xảy ra:

Trường hợp 1: $x \notin A$ và $x \notin B$

Vì $x \notin A$ nên $x \in A^C$

Vì $x \notin B$ nên $x \in B^C$

Do đó $x \in A^C \cup B^C$. *(1. a)*

Trường hợp 2: $x \in A \backslash B$

Vì $x \in A \backslash B$ *nên* $x \notin B \Rightarrow x \in B^C$

Do đó $x \in A^C \cup B^C$. *(2. a)*

Trường hợp 3: $x \in B \backslash A$

Vì $x \in B \backslash A$ *nên* $x \notin A \Rightarrow x \in A^C$

Do đó $x \in A^C \cup B^C$ *(3. a)*

Từ (1. a), (2. a) và (3. a), nếu $x \in (A \cap B)^C$ *thì* $x \in A^C \cup B^C$

Hay $(A \cap B)^C \subseteq A^C \cup B^C$ *(*)*

b. Chứng minh $A^C \cup B^C \subseteq (A \cap \mathrm{B})^C$

Giả sử $x \in A^C \cup B^C \Rightarrow x \in A^C$ *hoặc* $x \in B^C$;

Trường hợp 1: $x \in A^C \Rightarrow x \notin A$

Vì $x \notin A \Rightarrow x \notin A \cap B \Rightarrow x \in (A \cap B)^C$ *(1. b)*

Trường hợp 2: $x \in B^C \Rightarrow x \notin B$

Vì $x \notin B \Rightarrow x \notin A \cap B \Rightarrow x \in (A \cap B)^C$ *(2. b)*

Từ (1. b) và (2. b), nếu $x \in A^C \cup B^C$ *thì* $x \in (A \cap B)^C$

Hay $A^C \cup B^C \subseteq (A \cap \mathrm{B})^C$ *(**)*

Từ (*) và (**), ta có $(\mathrm{A} \cap \mathrm{B})^C \subseteq \mathrm{A}^C \cup \mathrm{B}^C$ và $A^C \cup B^C \subseteq (A \cap \mathrm{B})^C$ nên:

$$(A \cap \mathrm{B})^C = A^C \cup B^C \qquad \text{(Đpcm)}$$

Bằng cách sử dụng cách chứng minh giống ở Ví dụ 1.17 và Ví dụ 1.18, ta có bảng các tính chất của tập hợp như sau:

Bảng 1.2: Các tính chất của tập hợp

Tính chất	Công thức
Luật giao hoán	$\mathrm{A} \cap \mathrm{B} = \mathrm{B} \cap \mathrm{A}$ $\mathrm{A} \cup \mathrm{B} = \mathrm{B} \cup \mathrm{A}$
Luật kết hợp	$(\mathrm{A} \cap \mathrm{B}) \cap \mathrm{C} = \mathrm{A} \cap (\mathrm{B} \cap \mathrm{C})$ $(\mathrm{A} \cup \mathrm{B}) \cup \mathrm{C} = \mathrm{A} \cup (\mathrm{B} \cup \mathrm{C})$
Luật phân phối	$\mathrm{A} \cup (\mathrm{B} \cap \mathrm{C}) = (\mathrm{A} \cup \mathrm{B}) \cap (\mathrm{A} \cup \mathrm{C})$ $\mathrm{A} \cap (\mathrm{B} \cup \mathrm{C}) = (\mathrm{A} \cap \mathrm{B}) \cup (\mathrm{A} \cap \mathrm{C})$

Tính chất	Công thức
Luật phần tử trung hòa	$A \cup \emptyset = A$ $A \cap U = A$
Luật nuốt	$A \cup U = U$ $A \cap \emptyset = \emptyset$
Luật phần tử bù	$A \cup A^C = U$ $A \cap A^C = \emptyset$ A^C là phần bù của A xét trong không gian U
Luật phần tử bù của U và ∅	$U^C = \emptyset$ $\emptyset^C = U$
Luật phủ định kép	$(A^C)^C = A$
Luật lũy đẳng	$A \cup A = A$ $A \cap A = A$
Luật De Morgan	$(A \cup B)^C = A^C \cap B^C$ $(A \cap B)^C = A^C \cup B^C$
Luật hấp thụ	$A \cap (A \cup B) = A$ $A \cup (A \cap B) = A$

Ví dụ 1.19

Sử dụng các tính chất của tập hợp ở Bảng 1.2, chứng minh rằng:

$$(X \cup (Y \cap Z))^C = (Y^C \cup Z^C) \cap X^C$$

Hướng dẫn:

Sử dụng các tính chất của tập hợp, biến đổi vế trái về vế phải.

Sử dụng luật De Morgan:

$(X \cup (Y \cap Z))^C = X^C \cap (Y \cap Z)^C$

Sử dụng luật De Morgan cho $(Y \cap Z)^C$:

$$(X \cup (Y \cap Z))^C = X^C \cap (Y^C \cup Z^C).$$

Sử dụng luật kết hợp:

$$(X \cup (Y \cap Z))^C = (Y^C \cup Z^C) \cap X^C \qquad \text{(Đpcm)}$$

Ví dụ 1.20

Chứng minh rằng nếu A, B là các tập hợp xét trong không gian U, ta luôn có:

$$(A \cap B) \cup (A \cap B^C) = A.$$

Hướng dẫn:

Kết hợp các tính chất của tập hợp để chứng minh, biến đổi vế trái về vế phải.

Áp dụng luật phân phối:

$(A \cap B) \cup (A \cap B^C) = A \cap (B \cup B^C)$ (1)

Áp dụng luật phần tử bù $B \cup B^C = U$

$A \cap (B \cup B^C) = A \cap U$ (2)

Áp dụng luật phần tử trung hòa:

$A \cap U = A$ (3)

Từ (1), (2), (3) ta có $(A \cap B) \cup (A \cap B^C) = A$. (Đpcm)

Ví dụ 1.21

Chứng minh rằng, nếu X, Y, Z là các tập hợp, ta luôn có:

$$(X \cap Y \cap Z)^C = X^C \cup Y^C \cup Z^C$$

Hướng dẫn:

Áp dụng tính chất kết hợp:

$(X \cap Y \cap Z)^C = (X \cap (Y \cap Z))^C$

Áp dụng luật De Morgan:

$(X \cap (Y \cap Z))^C = X^C \cup (Y \cap Z)^C$

Áp dụng luật De Morgan cho biểu thức $(Y \cap Z)^C = Y^C \cup Z^C$

Do đó $(X \cap Y \cap Z)^C = X^C \cup Y^C \cup Z^C$.

1.2. CÁC NGUYÊN LÝ ĐẾM

Một trong những vấn đề đầu tiên của việc nghiên cứu tổ hợp là đếm xem có bao nhiêu cấu hình tổ hợp có thể được tạo ra với những quy tắc đã nêu? Những bài toán như vậy được gọi là bài toán đếm tổ hợp. Thông thường, lời giải của bài toán đếm phụ thuộc vào một số giá trị tham số ban đầu và người ta cố gắng biểu diễn sự phụ thuộc này bằng những công thức toán học. Nói chung, để đếm các cấu hình đã cho, người ta tìm cách đưa về các cấu hình quen thuộc bằng cách thiết lập một tương quan 1-1 giữa chúng. Đa phần các trường hợp, một bài toán đếm được phân thành từng lớp để áp dụng nguyên lý cộng hoặc phân tích cấu hình cần đếm như là việc ghép một số cấu hình khác để áp dụng nguyên lý nhân.

Chúng ta cùng trao đổi về ví dụ sau đây để hiểu về những nội dung sẽ được trình bày trong mục 1.2:

Ví dụ 1.22

a. An mời các bạn trong lớp đến dự sinh nhật của mình, bao gồm Bình, Cường, Dung, Nam, Thủy và Yến. (Ba bạn nữ là Dung, Thủy, Yến, ba bạn nam là Bình, Cường, Nam)

Nhóm bạn hẹn tập trung tại trường Đại học của mình để đến nhà An. Để đến nhà An có thể gọi taxi hoặc đi xe bus. Quanh khu vực này, nhóm bạn có thể gọi taxi của hãng Mai Linh, Thủ Đô, Hoàn Kiếm, Hương Lúa, Thành Lợi, Phú Gia, Thăng Long, Sun Vina, Taxi Group, Trường Tiền. Nếu nhóm bạn bắt xe bus, để đến nhà An cần chuyển trạm 3 lần. Ở mỗi trạm đều có thể bắt 2 tuyến xe bus để đến trạm tiếp theo;

Có bao nhiêu cách để nhóm bạn này đến nhà An?

Để đến nhà An, có 2 tình huống xảy ra:

Tình huống thứ nhất: Nhóm bạn này gọi taxi, có thể gọi một hãng trong số mười hãng taxi. Như vậy có 10 cách;

Tình huống thứ hai: Nhóm bạn này bắt xe bus, họ phải trải qua 3 trạm, mỗi trạm có thể lựa chọn một trong hai tuyến xe bus. Vậy số cách để nhóm bạn đi xe bus là 3. 2 = 6 cách;

Rõ ràng, số các cách để nhóm bạn này từ trường Đại học để đến nhà An là 10 + 6 = 16 cách.

b. Khi đến nơi, họ bắt tay nhau. Yến đã hỏi tất cả các bạn trong nhóm *"Tổng cộng chúng ta đã bắt tay bao nhiêu cái?"*

Bình: *"Tôi đã bắt tay với 6 người và tôi nghĩ mọi người cũng vậy"*.

Cường: *"Vì chúng ta có 7 người, nên sẽ có 7. 6 = 42 cái bắt tay"*.

Dung: *"Tôi nghĩ 42 cái bắt tay là quá nhiều! Cách suy luận trên của bạn sẽ dẫn đến tình huống có hai cái bắt tay nếu hai người gặp nhau, điều này rõ ràng là sai"*.

Nam: *"Đây là điểm mấu chốt của vấn đề: mỗi cái bắt tay được tính 2 lần. Chúng ta phải lấy 42 chia cho 2, nên đáp số đúng phải là 21"*.

c. Khi mọi người ngồi vào bàn, An đưa ra hướng dẫn *"Cứ sau 30 phút, chúng ta sẽ thay đổi chỗ ngồi, cho đến khi mỗi người đều ngồi qua mọi vị trí"*.

"Bạn phải ngồi ở vị trí đầu bàn, vì hôm nay là sinh nhật của bạn", Yến nói.

Bữa tiệc sinh nhật này sẽ kéo dài bao lâu? Có tất cả bao nhiêu cách sắp xếp chỗ ngồi khác nhau cho các thành viên (Vị trí của An là cố định).

Chúng ta sẽ lần lượt sắp xếp các khách mời vào các vị trí, bắt đầu từ bên tay phải của An. Với mỗi vị trí, có thể sắp xếp một khách mời bất kỳ.

Bây giờ hãy nhìn vào chiếc ghế thứ hai, nếu Bình đã ngồi vào chiếc ghế đầu tiên (trong những chiếc ghế bên tay phải của An), chúng ta có thể xếp bất kỳ một trong số năm khách mời còn lại vào chiếc ghế thứ hai này. Tương tự như vậy, nếu Cường ngồi vào chiếc ghế đầu tiên, thì có năm sự lựa chọn cho chiếc ghế thứ hai, v.v.. Như vậy, số cách để sắp xếp cho hai ghế đầu tiên là: 5 + 5 + 5 + 5 + 5 + 5 = 6. 5 = 30.

Với lập luận tương tự, số cách để xếp các khách mời vào ba chiếc ghế đầu tiên là 6. 5. 4 = 120 (có 4 sự lựa chọn cho chiếc ghế thứ ba).

Dễ dàng thấy rằng, để sắp xếp các khách mời vào các ghế thì số cách có thể sắp là 6. 5. 4. 3. 2. 1 = 720 (cách). (Với chiếc ghế thứ tư, giả sử các vị trí ghế thứ một, hai, ba đã sắp xếp, còn 3 sự lựa chọn. Với chiếc ghế thứ năm, còn 2 sự lựa chọn và chiếc ghế cuối cùng còn 1 số lựa chọn).

Theo lời An nói, cứ 30 phút thay đổi vị trí chỗ ngồi. Như vậy, thời gian để hoàn thành việc sắp xếp 720 cách xếp là $\frac{720}{2} = 360\ h = \frac{360}{24} = 15$ (ngày).

d. Có bao nhiêu cách sắp xếp, nếu như việc sắp xếp ghế cho An cũng giống như các khách mời khác?

Lập luận tương tự như trên, số cách để sắp xếp ghế ngồi cho bảy người là 7. 6. 5. 4. 3. 2. 1 = 5040 (cách).

e. Khiêu vũ được bắt đầu khi tiệc mặn kết thúc, một bạn nam sẽ xếp cùng một bạn nữ? Hỏi có bao nhiêu cặp có thể được hình thành?

Với 3 cô gái, mỗi cô gái này có thể lựa chọn một trong bốn chàng trai, do đó, số cặp (nam, nữ) để khiêu vũ có thể được hình thành là 3. 4 = 12 (cặp).

e. Nhóm bạn này cần một số ý tưởng để có tiền cho buổi tiệc tiếp theo, 10 ngày sau đó. Nam đưa ra ý tưởng *"Chúng ta sẽ dồn tiền mua vé số của Vietlott và giành lấy giải thưởng! Tất cả những gì mà chúng ta phải làm là mua đủ số vé có thể được tạo ra, như vậy nhất định chúng ta sẽ có vé trúng thưởng. Chúng ta tính xem sẽ phải mua bao nhiêu vé cần thiết để trúng thưởng cao nhất?"* (Vietlott chọn 6 số từ 45 số).

Yến nói: *"Mua vé Vietlott giống như việc xếp vị trí ngồi vừa rồi. Giả sử chúng ta cần mua 1 vé số, chọn 6 số từ 45 số từ 1 đến 45, tức là cần điền 6 số vào 6 vị trí trống, các số này hoàn toàn phải khác nhau. An sẽ là người chọn số đầu tiên, sao đó An chuyển cho Bình để Bình chọn 1 số, điền và chuyển tiếp cho Cường. Cường chọn 1 số khác với 2 số mà An và Bình đã chọn, điền và chuyển cho Dung.*

Dung phải lựa chọn 1 số khác với các số đã chọn, điền và chuyển cho Nam. Công việc tiếp của Nam là lựa chọn 1 số và điền tiếp vào vé, chuyển cho Thủy. Thủy là người cuối cùng chọn ra 1 số, như vậy chúng ta sẽ có 1 vé gồm có 6 số được chọn từ 45 số đã cho. Với An sẽ không có vấn đề gì khi bạn ấy chọn, có 45 sự lựa chọn 1 số. Bình sẽ còn 44 sự lựa chọn 1 số v.v.. *Với suy luận như vậy chúng ta sẽ có 45. 44. 43. 42. 41. 40 sự lựa chọn có thể cho dãy gồm 6 số".*

"Thực ra, tôi nghĩ việc này giống như câu hỏi về số bắt tay vừa nãy", An nói: *"Nếu chúng ta điền vào vé giống như cách Yến vừa đề xuất, chúng ta sẽ có nhiều hơn một vé giống hệt nhau. Ví dụ, sẽ có một vé khi tôi điền số 7, Bình điền số 23 và một vé khác khi tôi điền số 23 còn Bình điền số 7, về thực chất 2 vé này chỉ là một vé".*

Cường *"Ồ, tưởng tượng chúng ta mua 1 vé, với các số 7, 23, 31, 34, 40, 44. Có bao nhiêu cách để chúng ta nhận được tấm vé này? An có thể điền số bất kỳ trong 6 số này, Bình có thể điền một trong năm số còn lại (trừ số An đã chọn)* v.v. *Bây giờ chúng ta thấy vấn đề này giống hệt vấn đề xếp chỗ ngồi vừa nãy. Như vậy, chúng ta có (6. 5. 4. 3. 2. 1) số được tạo ra, nhưng chỉ được tính cho một bộ vé".*

Dung kết luận: *"Nếu chúng ta điền vé theo cách Yến đã đề xuất, thì số khả năng ban đầu là (45. 44. 43. 42. 41. 40), tuy nhiên thực tế với 1 vé gồm 6 số mà chúng ta đã chọn, có (6. 5. 4. 3. 2. 1) lần xuất hiện và cũng chỉ được tính là 1 bộ vé duy nhất!. Do đó số vé khác nhau chỉ là:*

$$\frac{45.44.43.42.41.40}{6.5.4.3.2.1} = 24,435,180$$

Để chắc chắn trúng thưởng, chúng ta phải mua số lượng vé này!"

Nam nói thêm: *"1 vé được bán ra với giá 10000 VNĐ, như vậy chúng ta cần 244, 351, 800, 000 VNĐ. Một con số thật kinh khủng, vượt quá xa so với khả năng tài chính của chúng ta, bên cạnh đó, nếu trúng, thì giải thưởng đạt được cũng thấp hơn nhiều lần so với số tiền bỏ ra"*

Và họ quyết định từ bỏ ý định mua xổ số Vietlott.

f. Nhóm bạn quyết định chơi bài tiến lên. An, Bình, Cường và Dung chơi cùng nhau. Lúc nhìn thấy quân bài trên tay mình, Cường nói *"Tôi nghĩ rằng những quân bài trên tay tôi giống hệt bài ván trước".*

"Điều này rất khó xảy ra" Dung nói.

Tại sao điều đó khó xảy ra? Nói cách khác, khả năng lặp lại các quân bài của ván trước là rất khó, câu hỏi đặt ra là, với mỗi người chơi, trong một ván bài, người chơi có tất cả bao nhiêu trường hợp nhận được tập gồm 13 quân bài khác nhau? (Bộ bài tiến lên có 52 quân, mỗi người chơi được chia 13 quân)

Câu hỏi đặt ra tương tự với câu hỏi về xổ số Vietlott. Hãy tưởng tượng rằng Cường nhặt từng quân bài của mình. Cây bài đầu tiên có thể là 1 trong 52 cây bài, khi nhặt cây bài thứ hai, Cường có thể nhặt được 1 trong 51 cây bài còn lại, v.v.. Như vậy để nhặt đủ 13 cây bài, số trường hợp xảy ra có thể là 52. 51. 50…. 42. 41. 40.

Với 13 cây bài trên tay, Cường có thể có nhiều cách sắp xếp khác nhau. Nếu Yến đang ngồi xem bên cạnh, nhìn liếc vào các lá bài của Cường, sau khi anh ta đã sắp xếp xong và tò mò đoán thứ tự các quân bài mà Cường đã nhặt ở mỗi lần. Cô có thể phân vân nghĩ rằng *"Ở lần nhặt đầu tiên, có thể là 1 trong 13 cây bài, ở lần nhặt thứ hai, cây bài được rút ở trong 12 cây bài còn lại,* v.v. *Và như vậy, giống bài toán xếp chỗ ngồi: có 13. 12. 11…. 3. 2. 1 trường hợp cho 13 quân bài được rút, tất cả các trường hợp này được xem là 1 tập duy nhất".*

Chính vì thế, số trường hợp 1 người chơi được chia 1 tập 13 quân bài là:

$$\frac{52.51.50\ldots 42.41.40}{13.12.11\ldots 3.2.1} = 635,013,559,600$$

Do đó, khả năng nhặt 1 tập 13 cây của ván bài nào đó chỉ là 1 trong số $635,013,559,600$ trường hợp có thể xảy ra, thực sự khả năng xảy ra ván bài sau có các quân bài giống ván bài trước là rất khó xảy ra;

Ví dụ 1.23

Có bao nhiêu cách xếp 5 người đứng thành một hàng ngang sao cho A không đứng cạnh B?

Hướng dẫn:

Để đếm số cách xếp này, ta đếm phần còn lại: Số cách xếp mà A đứng cạnh B. Xem A và B như một chỗ, ta có 4! = 24 cách xếp 4 chỗ, số này sẽ được nhân với 2 vì A và B có thể đổi chỗ cho nhau, như vậy có tất cả 48 cách xếp mà A đứng cạnh B.

Các cách xếp 5 người bất kỳ là 5! = 120 cách.

Từ đó số cách xếp A đứng cạnh B là 120 – 48 = 72 cách.

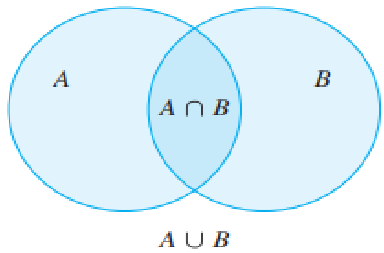
1.2.1. Nguyên lý bù trừ

Định nghĩa 1.14

Số các phần tử của tập hợp thu được sau khi lấy hợp của hai tập hợp A và B bằng tổng các phần tử của mỗi tập trừ đi số phần tử giao hai tập hợp, tức là:

$$N(A \cup B) = N(A) + N(B) - N(A \cap B)$$

Biểu đồ Venn biểu diễn nguyên lý bù trừ với hai tập A, B.



Ví dụ 1.24

Ví dụ 1.24a

Trong kỳ thi học sinh giỏi cấp tỉnh, một trường THPT có 20 học sinh đạt giải môn Toán, 11 học sinh đạt giải môn Văn, trong số đó có 7 em đạt giải đồng thời cả hai môn Văn và Toán. Hỏi trường có bao nhiêu học sinh đạt giải học sinh giỏi?

Hướng dẫn:

Gọi A là tập các học sinh đạt giải môn Toán. Theo đề bài có 20 học sinh đạt giải môn Toán, do đó N(A) = 20.

Gọi B là tập các học sinh đạt giải môn Văn. Theo đề bài có 11 học sinh đạt giải môn Văn, do đó N(B) = 11.

$A \cap B$ là tập các học sinh đạt giải cả hai môn. Theo đề bài có 7 học sinh đạt giải đồng thời cả hai môn Văn và Toán, do đó N($A \cap B$) = 7.

$A \cup B$ là tập các học sinh đạt giải của trường. N($A \cup B$) là tổng số học sinh đạt giải của trường. Theo nguyên lý bù trừ, áp dụng với tập hợp A và tập hợp B, ta có:

$N(A \cup B) = N(A) + N(B) - N(A \cap B)$ = 20 + 11 – 7 = 24.

Như vậy tổng số học sinh đạt giải là 24 (học sinh).

Ví dụ 1.24b

Xác định trong tập U ={x |$x \in N \wedge x \leq 1000$} có bao nhiêu số chia hết cho 3 hoặc 5?

Hướng dẫn:

U = {x |$x \in N \wedge x \leq 1000$}: tập các số tự nhiên từ 0 đến 1000.

Đặt tập A = {x| x ∈ $U \wedge x \vdots 3$}: là tập hợp các số tự nhiên, nhỏ hơn hoặc bằng 1000 và chia hết cho 3.

Đặt tập B = {x| x ∈ $U \wedge x \vdots 5$}: là tập hợp các số tự nhiên, nhỏ hơn hoặc bằng 1000 và chia hết cho 5.

Chúng ta xác định lực lượng của tập A và tập B:

$N(A) = \left[\frac{1000}{3}\right]$ = 333

$N(B) = \left[\frac{1000}{5}\right]$ = 200

Xác định lực lượng của $A \cap B$: $A \cap B$ là tập các số tự nhiên trong U chia hết cho cả 3 và 5 nên nó phải chia hết cho 15.

$N(A \cap B) = \left[\frac{1000}{15}\right] = 66.$

Theo nguyên lý bù trừ, áp dụng với hai tập A và B:

$N(A \cup B) = N(A) + N(B) - N(A \cap B)$ = 333 + 200 – 66 = 467.

Như vậy trong tập U, có 467 số chia hết cho 3 hoặc chia hết cho 5.

Lưu ý:

Cho tập hợp A là tập con của tập B. Khi đó:

N(B\A) = N(B) – N(A)

Cũng dễ dàng xác định được số lượng các số không chia hết cho 3 và cho 5, chính là số phần tử của tập U trừ đi số lượng các số chia hết cho 3 hoặc chia hết cho 5. Do đó, số lượng các số không chia hết cho 3 và cho 5 là:

N(U) – N($A \cup B$) = 1000 – 467 = 533 (số).

Ví dụ 1.25

Giả sử một trường Đại học có 1503 sinh viên năm thứ nhất. Trong số đó có 453 sinh viên tham gia câu lạc bộ Tin học, 267 sinh viên tham gia câu lạc bộ Toán học và 99 sinh viên tham gia cả hai câu lạc bộ. Hỏi có bao nhiêu sinh viên không tham gia câu lạc bộ nào?

Hướng dẫn:

Số sinh viên không tham gia câu lạc bộ Toán học cũng như Tin học sẽ là tổng số sinh viên trừ đi số sinh viên tham gia một trong hai câu lạc bộ.

Đặt U = tập các sinh viên của trường Đại học.

Đặt A là tập các sinh viên tham gia câu lạc bộ Tin học.

Đặt B là tập các sinh viên tham gia câu lạc bộ Toán học.

$A \cap B$ là tập các sinh viên tham gia cả câu lạc bộ Tin học và câu lạc bộ Toán học.

$A \cup B$ là tập các số sinh viên hoặc tham gia câu lạc bộ Tin học hoặc tham gia câu lạc bộ Toán học.

Khi đó theo dữ liệu đầu bài, ta có: N(U) = 503, N(A) = 453, N(B) = 267 và $N(A \cap B)$ = 99.

Theo nguyên lý bù trừ, số sinh viên tham gia hoặc câu lạc bộ Toán học hoặc câu lạc bộ Tin học là:

$N(A \cup B) = N(A) + N(B) - N(A \cap B)$ = 453 + 267 – 99 = 621.

Trong tổng số 1503 sinh viên của một trường Đại học, có 621 sinh viên tham gia ít nhất một trong hai câu lạc bộ Toán học hoặc Tin học.

Do vậy có: N(U) - $N(A \cup B)$ = 1503 – 621 = 882 sinh viên không tham gia câu lạc bộ nào.

Ví dụ 1.26

Có bao nhiêu chuỗi bit có độ dài 8 bắt đầu bằng bit 1 hoặc kết thúc bằng 2 bit 00?

Hướng dẫn:

Đặt A là tập hợp các chuỗi 8 bit bắt đầu bằng bit 1.

Đặt B là tập hợp các chuỗi 8 bit kết thúc với 2 bit 00.

Lực lượng của tập hợp A là N(A) = 2^7 =128.

Lực lượng của tập hợp B là N(B) = 2^6 = 64.

$A \cap B$ là tập hợp các chuỗi bắt đầu bằng bit 1 và kết thúc bằng 2 bit 00.

Lực lượng của $A \cap B$ là N($A \cap B$) = 2^5 = 32.

$A \cup B$ là tập hợp các chuỗi bắt đầu bằng bit 1 hoặc kết thúc bằng 2 bit 00. Áp dụng nguyên lý bù trừ với 2 tập A, B ta có:

$N(A \cup B) = N(A) + N(B) - N(A \cap B)$ = 128 + 64 – 32 = 160 (chuỗi).

Ví dụ 1.27

Một công ty máy tính nhận 330 các ứng viên cho một dự án phần mềm đang được triển khai. Giả sử trong số các ứng viên có 220 ứng viên tốt nghiệp chuyên ngành Khoa học máy tính, 147 ứng viên tốt nghiệp chuyên ngành Quản trị kinh doanh và 51 ứng viên tốt nghiệp cả 2 chuyên ngành Khoa học máy tính và Quản trị kinh doanh. Hỏi có bao nhiêu các ứng viên không tốt nghiệp Khoa học máy tính và không tốt nghiệp Quản trị kinh doanh?

Hướng dẫn:

Gọi A là tập hợp các ứng viên tốt nghiệp Khoa học máy tính.

Gọi B là tập hợp các ứng viên tốt nghiệp Quản trị kinh doanh.

$A \cap B$ là tập các ứng viên tốt nghiệp cả hai chuyên ngành Khoa học máy tính và Quản trị kinh doanh.

Từ các dữ liệu của đề bài, ta có N(A) = 220, N(B) =147, N($A \cap B$) = 51.

$A \cup B$ là tập hợp các ứng viên tốt nghiệp Khoa học máy tính hoặc Quản trị kinh doanh.

Theo công thức của nguyên lý bù trừ áp dụng cho 2 tập hợp A, B:

$$N(A \cup B) = N(A) + N(B) - N(A \cap B) = 220 + 147 - 51 = 316 \text{ (ứng viên)}$$

330 là tổng số các ứng viên được nhận cho dự án phần mềm.

Do đó, số các ứng viên không tốt nghiệp Khoa học máy tính và không tốt nghiệp Quản trị kinh doanh là: 330 – 316 = 14 (ứng viên).

Định nghĩa 1.15

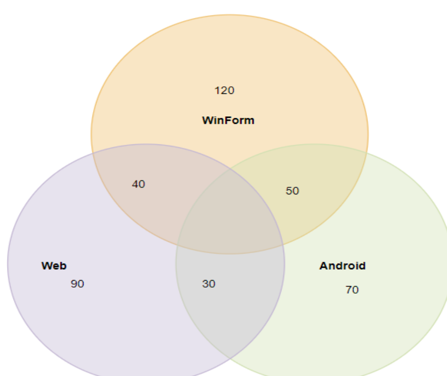
Nguyên lý bù trừ áp dụng với 3 tập hợp A, B, C:

$$N(A \cup B \cup C) = N(A) + N(B) + N(C) - N(A \cap B) - N(A \cap C) - N(B \cap C) + N(A \cap B \cap C)$$

Ví dụ 1.28.

Một khảo sát đối với 200 sinh viên K67 chuyên ngành Hệ thống thông tin, Khoa Công nghệ thông tin, Trường Đại học Công nghệ Giao thông vận tải, phát hiện ra rằng 120 sinh viên thích lập trình winform; 90 sinh viên thích lập trình web; 70 sinh viên thích lập trình android; 40 sinh viên thích cả lập trình win form và lập trình web; 30 sinh viên thích lập trình web và lập trình android; 50 sinh viên thích lập trình winform và lập trình android; 20 sinh viên không thích một trong ba ngôn ngữ lập trình trên. Hỏi số sinh viên thích tất cả môn lập trình trên?

Hướng dẫn:



Đặt tập U là tập hợp các sinh viên K67 chuyên ngành Hệ thống thông tin.

Đặt tập A là tập hợp các sinh viên thích lập trình winform.

Đặt tập B là tập hợp các sinh viên thích lập trình web.

Đặt tập C là tập hợp các sinh viên thích lập trình android.

$A \cap B$ là tập hợp các sinh viên thích lập trình winform và thích lập trình web.

$A \cap C$ là tập hợp các sinh viên thích lập trình winform và thích lập trình android.

$B \cap C$ là tập hợp các sinh viên thích lập trình web và thích lập trình android.

$A \cap B \cap C$ là tập hợp các sinh viên thích cả 3 môn lập trình.

$(A \cup B \cup C)^C$ là tập các sinh viên không thích một trong ba ngôn ngữ lập trình.

Từ các dữ kiện của đề bài, ta có N(U) = 200, N(A) = 120, N(B) = 90, N(C) = 70, N($A \cap B$) = 40, N($B \cap C$) = 30, N($A \cap C$) = 50.

N($(A \cup B \cup C)^C$) = 20

Từ công thức N($(A \cup B \cup C)^C$) + N($A \cup B \cup C$) = N(U) = 200

$\Rightarrow$ N($A \cup B \cup C$) = N(U) - N($(A \cup B \cup C)^C$) = 200 – 20 =180.

Áp dụng nguyên lý bù trừ cho ba tập hợp A, B, C:

$$N(A \cup B \cup C) = N(A) + N(B) + N(C) - N(A \cap B) - N(A \cap C) - N(B \cap C) + N(A \cap B \cap C)$$

Thay số ta có: 180 = 120 + 90 + 70 – 40 – 30 – 50 + $N(A \cap B \cap C)$

$\Rightarrow N(A \cap B \cap C)$ = 20.

Như vậy, có 20 sinh viên thích cả 3 môn lập trình winform, web, lập trình Android.

Ví dụ 1.29

Khảo sát về nhu cầu và sở thích đọc báo điện tử của người dân. Kết quả khảo sát trên 60 người dân cho thấy: 25 người thích đọc thông tin trên Dantri.com.vn; 26 người thích đọc trên Baomoi.com; 26 người thích đọc thông tin trên 24h.com.vn; 9 người đọc thông tin trên ở trang Dantri.com.vn và 24h.com.vn; 11 người đọc thông tin trên cả 2 trang Dantri.com.vn và Baomoi.com; 8 người đọc thông tin trên cả 2 trang Baomoi.com và 24h.com.vn; 3 người thích đọc trên cả 3 trang báo điện tử. Cho biết số người dân đọc ít nhất 1 loại báo điện tử trên?

Hướng dẫn:

Đặt X là tập hợp người dân thích đọc thông tin trên trang Dantri.com.vn.

Đặt Y là tập hợp người dân thích đọc thông tin trên trang Baomoi.com.

Đặt Z là tập hợp người dân đọc thông tin trên trang 24h.com.vn.

$X \cap Y$ là tập hợp người dân thích đọc thông tin trên trang Dantri.com.vn và trang Baomoi.com.

$X \cap Z$ là tập hợp người dân thích đọc thông tin trên trang Dantri.com.vn và trang 24h.com.vn.

$Y \cap Z$ là tập hợp người dân thích đọc thông tin trên trang Baomoi.com và trang 24h.com.vn.

$X \cap Y \cap Z$ là tập hợp người dân thích đọc cả ba trang báo nêu trên;

$X \cup Y \cup Z$ là tập hợp người dân thích đọc một trong ba trang báo Dantri.com.vn, 24h.com.vn, Baomoi.com.

Theo dữ liệu của đề bài, ta có:

N(X) = 25, N(Y) = 26, N(Z) = 26.

N($X \cap Y$) = 11, N($X \cap Z$) = 9, N($Y \cap Z$) = 8.

$N(X \cap Y \cap Z) = 3$.

Theo công thức bù trừ, áp dụng cho 3 tập hợp X, Y, Z:

$$N(X \cup Y \cup Z) = N(X) + N(Y) + N(Z) - N(X \cap Y) - N(X \cap Z) - N(Y) + N(X \cap Y \cap Z)$$

Do đó, $N(X \cup Y \cup Z) = 25 + 26 + 26 - 11 - 9 - 8 + 3 = 52$ (người).

Định nghĩa 1.16

Tổng quát

Cho $A_1, A_2, ..., A_n$ là các tập hữu hạn. Khi đó:

$N(\bigcup_{i=1}^{n} A_i) = \sum_{i=1}^{n} N(A_i) - \sum_{i \neq j=1}^{n} N\left(A_i \cap A_j\right) + \sum_{i \neq j \neq k=1}^{n} N\left(A_i \cap A_j \cap A_k\right) + (-1)^{n+1} N(A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n)$

1.2.2. Nguyên lý cộng

Định nghĩa 1.17

Cơ sở toán học của nguyên lý cộng

Nếu A và B là hai tập hợp rời nhau thì: N(A ∪ B) = N(A) + N(B)

Nguyên lý cộng:

Giả sử một công việc có thể được thực hiện theo phương án A hoặc phương án B. Có n cách thực hiện phương án A và có m cách thực hiện phương án B. Khi đó công việc có thể được thực hiện bởi m + n cách.

Cơ sở toán học của nguyên lý cộng mở rộng cho nhiều tập con rời nhau:

Nếu $\{A_1, A_2, \ldots, A_k\}$ là một phân hoạch của tập X thì:

$N(X) = N(A_1) + N(A_2) + \ldots + N(A_k)$

Nguyên lý cộng tổng quát:

Giả sử một công việc có thể được thực hiện theo k phương án khác nhau:

Phương án thứ nhất được thực hiện bằng n_1 cách.

Phương án thứ hai được thực hiện bằng n_2 cách.

…

Phương án thứ k được thực hiện bằng n_k cách.

Các cách thực hiện của các phương án là không giống nhau.

Khi đó để thực hiện công việc, có thể thực hiện bằng $n_1 + n_2 + \ldots + n_k$ cách.

Ví dụ 1.30

Một đoàn vận động viên gồm 2 môn bắn súng và bơi được cử đi thi đấu ở nước ngoài, nam có 10 người. Số vận động viên thi bắn súng (kể cả nam và nữ) là 14. Số nữ vận động viên thi bơi bằng số nam vận động viên thi bắn súng. Hỏi toàn đoàn có bao nhiêu người?

Hướng dẫn:

Gọi A là tập hợp các vận động viên nữ

Gọi A_1 là tập hợp các vận động viên nữ thi bắn súng

Gọi A_2 là tập hợp các vận động viên nữ thi bơi

Gọi B là tập hợp các vận động viên nam

Gọi B_1 là tập hợp các vận động viên nam thi bắn súng

Gọi B_2 là tập hợp các vận động viên nam thi bơi

Vì các tập hợp A_1, A_2, B_1, B_2 là các tập hợp rời nhau nên ta có:

$N(A) = N(A_1) + N(A_2)$ (1)

$N(B) = N(B_1) + N(B_2) = 10$ (2)

Số vận động viên thi bắn súng là $N(A_1) + N(B_1) = 14$ (3)

Theo đề bài, số vận động nữ thi bơi bằng số vận động viên nam thi bắn súng, nên ta có $N(A_2) = N(B_1)$, hay $N(B_1) = N(A_2)$. (4)

Thay (4) vào (3) ta có: $N(A_1) + N(B_1) = N(A_1) + N(A_2) = 14$

Như vậy số vận động viên nữ tham gia đại hội là 14.

Theo nguyên lý cộng, toàn đoàn có 10 +14 = 24 người.

Ví dụ 1.31

Trong một đợt phổ biến đề tài tốt nghiệp, Ban chủ nhiệm Khoa công bố danh sách các đề tài bao gồm 60 đề tài về chủ đề *"Xây dựng hệ thông tin quản lý"*, 5 đề tài về chủ đề *"Thiết kế website"* và 5 đề tài về chủ đề *"Kiểm thử phần mềm"*. Hỏi một sinh viên có bao nhiêu khả năng lựa chọn đề tài?

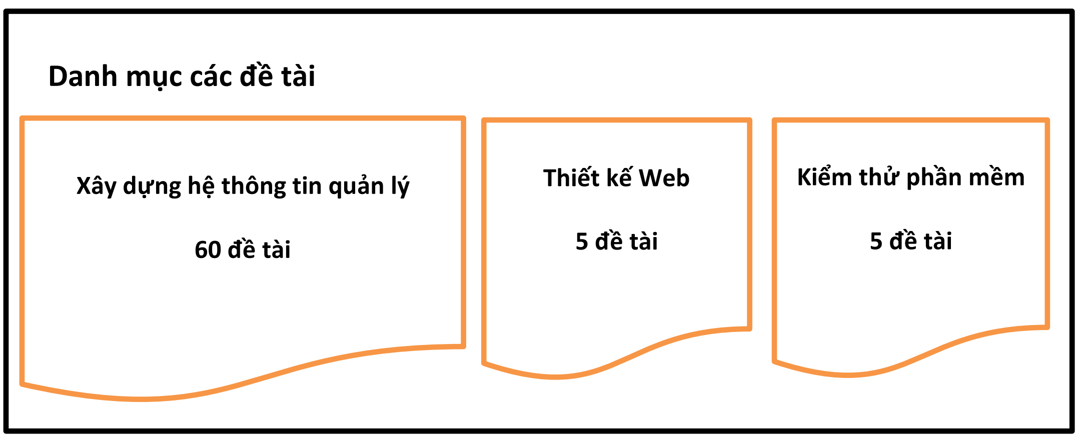
Hướng dẫn:

Nếu sinh viên chọn theo chủ đề thứ nhất, có 60 cách lựa chọn 1 đề tài.

Nếu chọn theo chủ đề thứ hai có 5 cách lựa chọn 1 đề tài.

Nếu chọn theo chủ đề thứ ba có 5 cách lựa chọn 1 đề tài.

Vậy tất cả có: 60 + 5 + 5 = 70 (cách) lựa chọn.



Hình 1.9: Danh mục các đề tài của Ví dụ 1.31.

Ví dụ 1.32

Đại hội liên chi đoàn Thanh niên của Khoa CNTT, Trường Đại học Công nghệ GTVT có sự tham gia của 10 thầy cô và 50 bạn sinh viên. Đại hội cần bầu ra một bí thư đoàn Thanh niên của liên chi đoàn, biết rằng tất cả các thành viên tham dự đại hội đều có thể được bầu. Hỏi có bao nhiêu cách để chọn ra 1 bí thư liên chi đoàn Thanh niên của Khoa?

Hướng dẫn:

Đặt A là tập hợp các thầy cô Khoa CNTT, Trường Đại học Công nghệ GTVT dự đại hội.

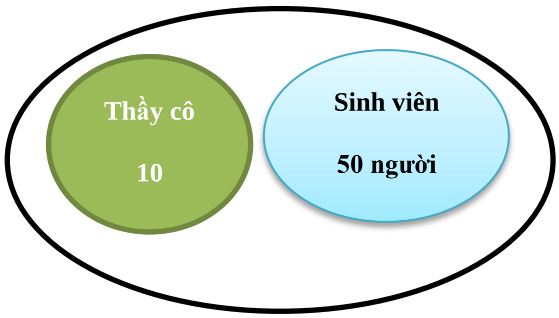
Đặt B là tập hợp các sinh viên Khoa CNTT dự đại hội.

Theo dữ kiện của đề bài, ta có: N(A) = 10, N(B) = 50.

Nếu chọn ra bí thư từ các thầy cô, có 10 sự lựa chọn.

Nếu chọn ra bí thư từ các sinh viên, có 50 sự lựa chọn.

Theo nguyên lý cộng, số cách để bầu ra một bí thư liên chi đoàn là: 10 + 50 = 60 (cách).



Hình 1.10: Minh họa Ví dụ 1.32.

Ví dụ 1.33

Hỏi rằng giá trị của k sẽ là bao nhiêu sau khi đoạn chương trình sau được thực hiện:

$n_1 = 10;$

$n_2 = 20;$

$n_3 = 30;$

k = 0;

For ($i_1 = 1; i_1 \le n_1; i_1$++) k++; (1)

For ($i_2 = 1; i_2 \le n_2; i_2$++) k++; (2)

For ($i_3 =1; i_3 \le n_3; i_3$++) k++; (3)

Hướng dẫn:

Đầu tiên giá trị của k được gán giá bằng 0.

Có 3 vòng lặp độc lập.

Khi thực hiện vòng lặp thứ nhất, biến điều khiển i_1 được tăng từ 1 đến 10, tức là thực hiện 10 lần câu lệnh k++. Giá trị k được ghi nhận khi kết thúc vòng lặp 1 là 10.

Tương tự, sau vòng lặp thứ 2, giá trị k được tăng so với trước là 20.

Sau vòng lặp thứ 3, giá trị k được tăng thêm 30.

Theo nguyên lý cộng, 3 vòng lặp for thực hiện 1 cách độc lập, nên khi kết thúc 3 vòng lặp for giá trị của k sẽ là: 10 + 20 + 30 = 60.

1.2.3. Nguyên lý nhân

Định nghĩa 1.18

Cơ sở toán học của nguyên lý nhân

Nếu A và B là hai tập hợp rời nhau thì: $N(A \text{ x } B) = N(A) \text{ x } N(B)$

Nguyên lý nhân:

Giả sử một công việc có thể được thực hiện theo hai giai đoạn A và B. Có n cách thực hiện giai đoạn A và có m cách thực hiện giai đoạn B. Khi đó công việc có thể được thực hiện bởi n x m cách.

Cơ sở toán học của nguyên lý nhân mở rộng cho nhiều tập con rời nhau:

Cho A_1, A_2, ..., A_n là các tập hữu hạn bất kỳ, khi đó:

$$N(A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n) = \prod_{i=1}^{n} N(A_i)$$

Nguyên lý nhân tổng quát:

Giả sử một công việc có thể được thực hiện theo k giai đoạn khác nhau:

Giai đoạn thứ nhất: được thực hiện bằng n_1 cách.

Giai đoạn thứ hai: được thực hiện bằng n_2 cách.

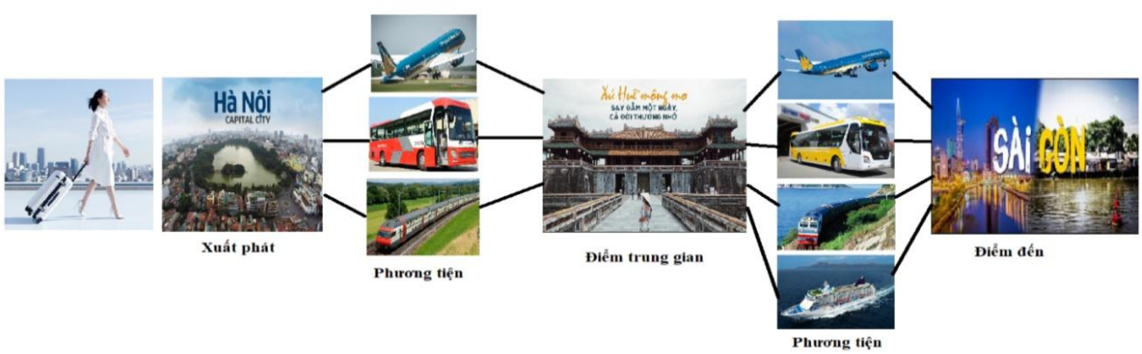
…

Giai đoạn thứ k: được thực hiện bằng n_k cách.

Các cách thực hiện của các giai đoạn là không giống nhau.

Khi đó để thực hiện công việc, có thể thực hiện bằng n_1. n_2. … n_{k-1}. n_k cách.

Ví dụ 1.34.



Hình 1.11: Minh họa Ví dụ 1.34.

Từ Hà Nội đến Huế có 3 cách đi: máy bay, ô tô, tàu hoả. Từ Huế đến Sài Gòn có 4 cách đi: máy bay, ô tô, tàu hoả, tàu thuỷ. Hỏi từ Hà Nội đến Sài Gòn (qua Huế) có bao nhiêu cách đi?

Hướng dẫn:

Mỗi cách đi từ Hà Nội đến Sài Gòn (qua Huế) được xem gồm 2 chặng: Hà Nội – Huế và Huế – Sài Gòn.

Từ đó theo nguyên lý nhân, số cách đi từ Hà Nội đến Sài gòn là 3. 4 = 12 cách.

Ví dụ 1.35

Có bao nhiêu xâu nhị phân có độ dài bằng 8?

Hướng dẫn:

Mỗi một bít của xâu nhị phân có thể chọn bằng 2 cách hoặc 0 hoặc 1.

Do đó 8 bít của xâu nhị phân sẽ có số cách chọn là $2^8 = 256$ xâu nhị phân khác nhau.

Ví dụ 1.36

Hỏi rằng giá trị của k sẽ là bao nhiêu sau khi đoạn chương trình sau được thực hiện:

$n_1 = 10;$

$n_2 = 20;$

$n_3 = 30;$

$k = 0;$

For ($i_1 = 1; i_1 \leq n_1; i_1$++) (1)

    For ($i_2 =1; i_2 \leq n_2; i_2$++) (2)

        For ($i_3 = 1; i_3 \leq n_3; i_3$++) (3)

        k++;

Hướng dẫn:

Đầu tiên giá trị của k được gán bằng 0.

Có 3 vòng lặp for lồng nhau.

Sau mỗi lần lặp của vòng lặp for, giá trị của k tăng lên 1.

Vòng for thứ nhất lặp 10 lần.

Vòng for thứ hai lặp 20 lần.

Vòng for thứ 3 lặp 30 lần.

Vậy theo nguyên lý nhân, kết thúc 3 vòng lặp for lồng nhau, giá trị của k sẽ là 10. 20. 30 = 6000.

Ví dụ 1.37

Ký hiệu giảng đường của một trường Đại học bắt đầu bằng một trong các chữ cái A, B, C, D, E, F và một số nguyên dương không vượt quá 50. Hỏi nhiều nhất có bao nhiêu giảng đường được ký hiệu khác nhau?

Hướng dẫn:

Thủ tục ghi ký hiệu một giảng đường gồm hai giai đoạn:

Giai đoạn 1: Gán một trong 6 chữ cái A, B, C, D, E, F. Có 6 lựa chọn để chọn chữ cái bắt đầu trong ký hiệu của giảng đường.

Giai đoạn 2: Gán một trong 50 số nguyên dương 1, 2, ..., 50. Có 50 lựa chọn để chọn một số nguyên dương tiếp theo trong ký hiệu của giảng đường

Theo nguyên lý nhân, có 6. 50 = 300 cách khác nhau để ký hiệu cho một giảng đường.

Ví dụ 1.38

Ví dụ 1.38a

Một sinh viên có 5 chiếc áo sơ mi khác màu, 3 cái quần khác màu, 2 đôi giày khác kiểu. Nếu mỗi ngày sinh viên đó mặc một kiểu khác nhau, thì sau bao nhiêu ngày sinh viên đó sẽ phải lặp lại cách ăn mặc trên?

Hướng dẫn:

Một bộ trang phục bao gồm: Quần, áo và giày. Mỗi cách chọn một bộ trang phục đi học của sinh viên thực hiện theo 3 giai đoạn sau đây:

Giai đoạn 1: Chọn và mặc áo. Vì có 5 cái áo sơ mi khác màu, nên có 5 cách để chọn áo.

Giai đoạn 2: Chọn và mặc quần. Có 3 quần khác màu nên có 3 cách chọn quần.

Giai đoạn 3: Chọn và đi giày. Có 2 đôi giày khác kiểu, do đó có 2 cách chọn giày.

Theo nguyên lý nhân, có tất cả 5. 3. 2 = 30 cách chọn một bộ trang phục, nghĩa là tối đa là sau 30 ngày sinh viên đó sẽ phải lặp lại trang phục.

Xem xét một ví dụ tương tự như Ví dụ 1.38a như sau:

Ví dụ 1.38b

Có bao nhiêu số tự nhiên có ba chữ số có thể được hình thành từ các chữ số 0, 1, 2,…, 8, 9? Quy tắc nào được áp dụng?

Hướng dẫn:

a	b	c

Để tạo ra số có ba chữ số, cần thực hiện qua 3 giai đoạn:

Giai đoạn 1: Chọn một chữ số cho vị trí ngoài cùng bên trái (chữ số a). Vì a là chữ số đầu tiên, $a \neq 0$, nên chọn a từ các chữ số $\{1, 2, 3, \ldots, 8, 9\} \Rightarrow$ Có 9 cách để chọn a.

Giai đoạn 2: Chọn một chữ số cho vị trí ở giữa (chữ số b). Vì số có 3 chữ số được tạo ra, không yêu cầu các chữ số phải đôi một khác nhau. Do đó có thể chọn b từ tập các chữ số $\{0, 1, 2, \ldots, 8, 9\} \Rightarrow$ Có 10 cách để chọn b.

Giai đoạn 3: Chọn một chữ số cho vị trí ngoài cùng bên phải (chữ số c). Lập luận tương tự khi chọn b, có thể chọn c từ tập các chữ số $\{0, 1, 2, \ldots, 8, 9\} \Rightarrow$ Có 10 cách để chọn c.

Áp dụng quy tắc nhân, số các số có 3 chữ số có thể được tạo ra là:

$9.\ 10.\ 10 = 900$ (số).

Ví dụ 1.39

Số điện thoại di động của Viettel tính đến đầu năm 2019 có dạng A.xxxx.xxx, trong đó A là nhóm có 3 con số, quy định đầu số của mạng Viettel. Các đầu số của Viettel bao gồm: 096, 097, 098, 086, 032, 033, 034, 035, 036, 037, 038, 039. xxxx.xxx quy định số của từng thuê bao, trong đó x có thể nhận các giá trị từ 0 đến 9. Hỏi có thể tạo ra bao nhiêu số điện thoại với đầu số như vậy?

Hướng dẫn:

Chọn một thuê bao di động Viettel có thể chia làm 2 giai đoạn:

Giai đoạn 1: Chọn đầu số A. Có thể chọn 1 trong 12 đầu số 096, 097, 098, 086, 032, 033, 034, 035, 036, 037, 038, 039 của Viettel. Có 12 cách để chọn một đầu số A.

Giai đoạn 2: Chọn số, gồm 7 con số xxxx.xxx, trong đó x có thể nhận các giá trị từ 0 đến 9. Như vậy có 10 cách chọn 1 con số. Vai trò của các con số này là như nhau, nên số cách chọn ra dãy gồm 7 con số này là: 10^7.

Theo nguyên lý nhân, số thuê bao có thể được tạo ra là $12.\ 10^7$ (thuê bao).

Lưu ý:

Trong thực tế, các bài toán đếm không chỉ sử dụng nguyên lý cộng hoặc nguyên lý nhân, mà là sự kết hợp của các nguyên lý này. Chúng ta cùng xem xét một số ví dụ sau đây:

Ví dụ 1.40

Tên biến trong ngôn ngữ C là 1 chuỗi được tạo thành từ các ký tự trong bộ 26 chữ cái Latinh viết thường {a, b, c, d,…, z}, 26 chữ cái Latinh viết hoa {A, B, C, D,…, Z} và các chữ số {0, 1, 2,…, 9}, dấu gạch dưới _. Ngoài ra tên biến phải được bắt đầu bằng một chữ cái, không được đặt trùng với 32 từ khóa trong C, không được sử dụng dấu cách.

a. Có thể tạo được bao nhiêu biến gồm 4 ký tự?

b. Có thể tạo ra bao nhiêu biến có 4 hoặc 5 ký tự?

Chẳng hạn, tên biến viết đúng Delta, _Delta, Delta1, delTa, v.v.. Tên biến viết sai: 1Delta, 1 Delta.

Hướng dẫn:

a. Giả sử biến được tạo ra gồm 4 ký tự có dạng xyzt.

Quá trình tạo ra biến có 4 ký tự gồm 4 giai đoạn:

Giai đoạn 1: x có thể được tạo ra từ 26 chữ cái viết thường {a, b, c,…, z}, 26 chữ cái viết hoa {A, B, C,…, Z} và dấu gạch dưới chân _. Như vậy có 53 cách để tạo ra x.

Giai đoạn 2, 3, 4 có thể tạo ra y, z, t trong bộ 26 chữ cái viết hoa {A, B, C,…, Z}, 26 chữ cái viết thường {a, b, c,…, z}, 10 chữ số {0, 1, 2, …, 9}, dấu gạch dưới chân _. Với mỗi ký tự như vậy có thể có 63 cách để tạo ra.

Như vậy, số biến có 4 ký tự có thể được tạo ra theo nguyên lý nhân là:

53. 63. 63. 63 =13,252,491 (biến).

b. Có hai trường hợp tạo ra biến có 4 hoặc 5 ký tự:

Trường hợp 1: Biến có 4 ký tự.

Ở câu a, chúng ta đã tính được có 13, 252, 491 biến.

Trường hợp 2: Biến có 5 ký tự.

Giả sử biến có 5 ký tự có dạng xyztu.

Lập luận tương tự câu a, chia quá trình tạo ra biến có 5 ký tự gồm 5 giai đoạn:

Giai đoạn 1: Tạo ra x, có 53 cách tạo ra từ 26 chữ cái viết thường, 26 chữ cái viết hoa và dấu gạch dưới chân _.

Giai đoạn 2, 3, 4, 5: Tạo ra y, z, t, u có 63 cách tạo với mỗi ký tự bao gồm 26 chữ cái viết thường, 26 chữ cái viết hoa, 10 chữ số và dấu gạch dưới chân _.

Theo nguyên lý nhân, số biến có 5 ký tự có thể được tạo ra là:

53. 63. 63. 63. 63 = 834,906,933 (biến);

Từ trường hợp 1 và trường hợp 2, theo nguyên lý cộng, số biến có thể được tạo ra có 4 hoặc 5 ký tự là: 13,252,491 + 834,906,933 = 848,159,424 (biến).

Ví dụ 1.41

Mỗi người dùng khi tạo tài khoản trên gmail.com đều phải cài đặt một mật khẩu, được khuyến cáo nên có độ dài tối thiểu từ 6 đến 8 ký tự, trong đó mỗi ký tự có thể là chữ cái viết thường hoặc một chữ số. Mỗi mật khẩu phải chứa ít nhất một chữ số. Có bao nhiêu mật khẩu có thể được tạo ra?

Hướng dẫn:

Đặt P là tổng số mật khẩu có thể tạo ra có độ dài tối thiểu từ 6 đến 8 ký tự.

P_6, P_7, P_8 là tổng số mật khẩu lần lượt có 6, 7 và 8 ký tự.

Theo nguyên lý tổng: $P = P_6 + P_7 + P_8$

Để tính P6: Ta thực hiện tính số lượng các mật khẩu có 6 ký tự thông qua việc tính toán:

+ Số lượng các mật khẩu có 6 ký tự mà mỗi ký tự của nó có thể là 26 chữ cái viết thường hoặc 10 chữ số. Các ký tự trong mật khẩu có thể giống nhau, do đó theo nguyên lý nhân, số mật khẩu có thể được tạo ra là 36^6.

+ Số lượng các mật khẩu có 6 ký tự, mỗi ký tự được lấy từ bộ chữ cái Latinh gồm 26 chữ cái viết thường. Số mật khẩu như vậy có thể được tạo ra là 26^6.

Theo nguyên lý bù trừ, số lượng mật khẩu được tạo ra từ 26 chữ cái, 10 chữ số và đảm bảo ít nhất một chữ số được tính bằng số lượng mật khẩu được tạo ra từ 26 chữ cái, 10 chữ số trừ đi số lượng mật khẩu có 6 ký tự, chỉ bao gồm các chữ cái.

Do đó $P_6 = 36^6 – 26^6$.

Lập luận tương tự, ta có:

$P_7 = 36^7 – 26^7$.

$P_8 = 36^8 – 26^8$.

Số mật khẩu của người dùng gmail.com tối thiểu có 6 ký tự và đảm bảo có ít nhất một chữ số là:

$P = P_6 + P_7 + P_8 = 36^6 – 26^6 + 36^7 – 26^7 + 36^8 – 26^8$ = 2,684,483,063,360 (mật khẩu).

Ví dụ 1.42

Có bao nhiêu số tự nhiên có 3 chữ số được tạo ra từ tập {0, 1, 2, 3, 4, 5} nếu:

a. Các chữ số không cần phải khác nhau đôi một.

b. Các chữ số phải khác nhau đôi một.

c. Các số đôi một khác nhau và là số chẵn.

d. Các số đôi một khác nhau và chia hết cho 5.

Hướng dẫn:

a. Gọi số có 3 chữ số là $\overline{abc}$

Chọn a có thể chọn từ {1, 2, 3, 4, 5}. Có 5 cách chọn a.

Chọn b có thể chọn từ {0, 1, 2, 3, 4, 5}. Có 6 cách chọn b.

Chọn c có thể chọn từ {0, 1, 2, 3, 4, 5}. Có 6 cách chọn c.

⇒ Theo nguyên lý nhân, có 5. 6. 6 = 180 số thỏa mãn.

b. Gọi số có 3 chữ số là $\overline{abc}$ (a, b, c đôi một khác nhau)

Chọn a có thể chọn từ {1, 2, 3, 4, 5}. Có 5 cách chọn a.

Chọn b có thể chọn từ {0, 1, 2, 3, 4, 5} – {a}. Có 5 cách chọn b

Chọn c có thể chọn từ {0, 1, 2, 3, 4, 5} – {a, b}. Có 4 cách chọn c.

⇒ Theo nguyên lý nhân, có 5. 5. 4 = 100 số thỏa mãn.

c. Gọi số có 3 chữ số là $\overline{abc}$ (với a, b, c đôi một khác nhau)

Vì $\overline{abc}$ là số chẵn nên c chỉ được chọn trong các số {0, 2, 4}.

Có 3 sự lựa chọn c. Có hai trường hợp cần xét:

Trường hợp 1: c = 0

Chọn a từ {1, 2, 3, 4, 5}. Có 5 cách chọn a.

Chọn b từ {1, 2, 3, 4, 5} – {a}. Có 4 cách chọn b.

Như vậy, có 5. 4. 1 = 20 số có tận cùng là 0.

Trường hợp 2: c$\neq$ 0

Có thể lựa chọn c trong 2 số {2, 4}. Có 2 cách chọn c.

Chọn a từ {1, 2, 3, 4, 5} – {c}. Có 4 cách chọn a.

Chọn b từ {0, 1, 2, 3, 4, 5} – {a, c}. Có 4 cách chọn b.

Như vậy, có 4. 4. 2 = 32 số chẵn có đuôi khác 0.

Từ trường hợp 1 và trường hợp 2, theo nguyên lý cộng, số các số có 3 chữ số đôi một khác nhau và là số chẵn là 20 + 32 = 52 số.

d. Gọi số có 3 chữ số là $\overline{abc}$ (với a, b, c đôi một khác nhau) chia hết cho 5.

Số chia hết cho 5 là số tận cùng là 0 hoặc 5.

Trường hợp 1: c = 0

Chọn a từ {1, 2, 3, 4, 5}. Có 5 cách chọn a.

Chọn b từ {1, 2, 3, 4, 5} – {a}. Có 4 cách chọn b.

Như vậy, có 5. 4. 1 = 20 số tận cùng bằng 0.

Trường hợp 2: c = 5

Chọn a từ {1, 2, 3, 4}. Có 4 cách chọn a.

Chọn b từ {0, 1, 2, 3, 4} – {a}. Có 4 cách chọn b.

Do đó, có 4. 4. 1 = 16 số.

Theo nguyên lý cộng, số có 3 chữ số đôi một khác nhau và chia hết cho 5 là: 20 + 16 = 36 (số).

1.3. CÁC CẤU HÌNH TỔ HỢP

1.3.1. Hoán vị

1.3.1.1. Hoán vị không lặp

Định nghĩa 1.19
Cho tập hợp A gồm n phần tử. Mỗi cách sắp xếp có thứ tự n phần tử của A được gọi là một hoán vị của n phần tử. Số các hoán vị của n phần tử, ký hiệu là P_n. Công thức tính số hoán vị của n phần tử là: $P_n = n. (n-1). (n-2). ... 2. 1 = n!$

Lưu ý:

Quy ước 0! = 1.

Ví dụ 1.43

Cho tập A = {1, 2, 3}. Có thể tạo ra bao nhiêu số có 3 chữ số từ tập A?

Hướng dẫn:

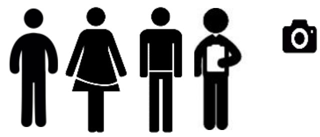
Liệt kê các số có thể được tạo ra từ A: 123, 132, 213, 231, 312, 321. Mỗi số là 1 hoán vị từ tập A.

Theo công thức tính hoán vị, dễ dàng tính được số hoán vị từ các phần tử của A là: $P_3 = 3! = 3. 2. 1 = 6$ (số).

Ví dụ 1.44

Có 4 người rủ nhau đi chụp ảnh là Anh, Bắc, Cúc, Dương. Hãy tính xem có bao nhiêu kiểu ảnh chụp mà tất cả bốn người đứng thành một hàng?

Hướng dẫn:



Cách 1: Áp dụng nguyên lý nhân:

Đầu tiên ta có 4 khả năng chọn người đứng ngoài cùng bên trái (đứng ở vị trí A).

Sắp xếp người vào vị trí B: có 3 cách chọn (sau khi đã xếp một người đứng ở vị trí A).

Sắp xếp người vào vị trí C: có 2 cách chọn (sau khi đã xếp hai người đứng ở vị trí A và vị trí B).

Sắp xếp người vào vị trí D: có 1 cách chọn (sau khi đã xếp ba người đứng ở vị trí A, vị trí B và vị trí C).

Như vậy theo nguyên lý nhân ta có số kiểu ảnh có thể chụp khác nhau về vị trí đứng là: 4. 3. 2. 1 = 4! = 24.

Cách 2: Sử dụng công thức tính hoán vị.

Mỗi bức ảnh có đầy đủ 4 người là một hoán vị.

Số bức ảnh có thể chụp là $P_4 = 4! = 24$.

Ví dụ 1.45

Có 5 phong bì thư và 5 bức ảnh gửi cho 5 người, có bao nhiêu phương án lựa chọn để gửi ảnh cho 5 người trên?

Hướng dẫn:

Mỗi phương án lựa chọn bức ảnh bỏ phong bì để gửi là một hoán vị từ 5 phần tử, vậy số phương án là 5! = 5. 4. 3. 2. 1 = 120.

Ví dụ 1.46

Giả sử một người bán hàng rong định đi bán hàng tại tám phố phường ở Hà Nội. Chị ta bắt đầu cuộc hành trình của mình tại một phố nào đó, nhưng có thể đến bảy phố kia theo thứ tự bất kỳ nào mà chị ta muốn. Hỏi chị ta có thể đi qua tất cả các phố này theo bao nhiêu lộ trình khác nhau?

Hướng dẫn:

Vì phố đầu tiên đã được xác định, còn bảy phố còn lại có thể đi theo thứ tự tùy ý, nên số lộ trình khác nhau chính là số hoán vị của tập gồm 7 phần tử.

Do đó có 7! = 5040 cách để người bán hàng chọn hành trình của mình;

Nếu muốn tìm lộ trình ngắn nhất thì chị ta phải tính tổng quãng đường cần cho mỗi lộ trình có thể, tức là tổng cộng phải tính cho 5040 lộ trình.

Ví dụ 1.47

Cần sắp xếp 4 sinh viên nữ và 6 sinh viên nam thành một hàng dọc. Hỏi có bao nhiêu cách sắp xếp nếu sinh viên đứng đầu hàng là sinh viên nữ và sinh viên cuối hàng là sinh viên nam?

Hướng dẫn:

Tổng số sinh viên cần xếp hàng là 4 + 6 = 10 sinh viên.

Xếp 10 sinh viên thành một hàng dọc, đảm bảo sinh viên đứng đầu tiên là một sinh viên nữ, đứng cuối hàng là một sinh viên nam, chia quá trình sắp xếp thành 3 giai đoạn:

Giai đoạn 1: Xếp một sinh viên nữ đứng đầu hàng, chọn từ 4 sinh viên nữ. Như vậy có 4 cách xếp.

Giai đoạn 2: Xếp 1 sinh viên nam đứng ở cuối hàng, chọn từ 6 sinh viên nam. Có 6 cách để xếp.

Giai đoạn 3: Xếp 8 bạn còn lại vào giữa hàng. Mỗi cách sắp xếp 8 bạn này là 1 hoán vị của 8 vị trí. Do đó, số cách xếp là P_8 = 8!.

Theo nguyên lý nhân, số cách xếp 10 sinh viên, đảm bảo yêu cầu của đề bài là 4. 6. 8! = 967,680 (cách).

1.3.1.2. Hoán vị lặp

Định nghĩa 1.19
Cho n đối tượng trong đó có n_i đối tượng loại i giống hệt nhau (i =1, 2,…, k và n_1+ n_2 +…+ n_k= n). Mỗi cách sắp xếp có thứ tự n đối tượng đã cho gọi là một *hoán vị lặp* của n. Số hoán vị của n phần tử trong đó có n_1 phần tử như nhau thuộc loại 1, có n_2 phần tử như nhau thuộc loại 2, v.v. và có n_k phần tử như nhau thuộc loại k, được tính theo công thức $\overline{P_n} = \frac{n!}{n_1!.n_2!...n_k!}$.

Ví dụ 1.48

Có thể nhận được bao nhiêu xâu khác nhau bằng cách sắp xếp lại các ký tự của từ SUCCESS?

Hướng dẫn:

Từ SUCCESS chứa 7 ký tự, trong đó có:

3 ký tự S, 1 ký tự U, 2 ký tự C, 1 ký tự E

Mỗi sự sắp xếp lại các ký tự của từ SUCCESS là 1 hoán vị lặp của 7 ký tự. Do đó, số hoán vị (số xâu khác nhau) là:

$$\frac{7!}{3!\,1!\,2!\,1!} = 420 \text{ (số)}$$

Ví dụ 1.49

Cho tập hợp A = {1, 2, 3, 4, 5}. Từ tập A có thể tạo ra bao nhiêu số có 9 chữ số, trong đó các chữ số 1, 2 xuất hiện đúng 1 lần, chữ số 3, 4 xuất hiện 2 lần và chữ số 5 xuất hiện 3 lần.

Hướng dẫn:

Mỗi sự sắp xếp các chữ số của A đảm bảo các chữ số 1, 2 xuất hiện 1 lần và chữ số 3, 4 xuất hiện 2 lần, chữ số 5 xuất hiện 3 lần là 1 hoán vị lặp.

Số các số có 9 chữ số có thể tạo ra theo yêu cầu đề bài là:

$$\frac{9!}{1!\,1!\,2!\,2!\,3!} = 15{,}120 \text{ (số)}.$$

1.3.2. Chỉnh hợp

1.3.2.1. Chỉnh hợp không lặp

Định nghĩa 1.20
Cho A là tập hợp gồm n phần tử. Mỗi bộ gồm k phần tử (1≤ k ≤ n) sắp thứ tự của tập hợp A được gọi là một chỉnh hợp chập k của n phần tử. Số các chỉnh hợp chập k của n ký hiệu là A_n^k $A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}$.

Ví dụ 1.50

Cho tập A = {1, 2, 3, 4, 5}.

Các bộ (2, 3, 5) (2, 5, 3) là các chỉnh hợp không lặp chập 3 từ 5 phần tử.

Ví dụ 1.51

Cho tập hợp A = {1, 3, 4, 5, 6, 7}. Có bao nhiêu số có 4 chữ số khác nhau được tạo ra từ tập A?

Hướng dẫn:

Cách 1: Sử dụng nguyên lý nhân

Ký hiệu số có 4 chữ số là $\overline{abcd}$

Ta có 6 khả năng chọn số a từ tập A = {1, 3, 4, 5, 6, 7}.

Còn 5 khả năng chọn số b từ tập A – {a}

Còn 4 khả năng chọn số c từ tập A – {a, b}

Còn lại 3 khả năng chọn số d từ tập A – {a, b, c}

Vậy tất cả các số có 4 chữ số khác nhau được tạo ra từ tập A là:

6. 5. 4. 3 = 360 (số).

Cách 2: Sử dụng ngay công thức tính chỉnh hợp không lặp

Mỗi số có 4 chữ số khác nhau được thiết lập từ tập A là một chỉnh hợp chập 4 từ 6 chữ số.

Số các số có 4 chữ số khác nhau được tạo ra là:

$$A_6^4 = \frac{6!}{(6-4)!} = 6.5.4.3 = 360 \text{ (số)}.$$

Ví dụ 1.52

Có 4 người thi đấu cờ vua là Bình, Cường, Dũng, Kiên tranh hai vị trí nhất, nhì. Hãy tính xác suất để Cường được giải nhất?

Hướng dẫn

Gọi tập kỳ thủ là U = {Bình, Cường, Dũng, Kiên}.

Mỗi khả năng phân chia giải là một chỉnh hợp không lặp chập 2 từ 4 phần tử. Vậy theo công thức ta có:

$$A_4^2 = \frac{4!}{(4-2)!} = 4 \, x \, 3 = 12.$$

Các phương án mà Cường đoạt giải ta có thể chọn như sau: Ghép Cường với một trong 3 người còn lại, số phương án là 3.

Vậy xác suất để Cường đoạt giải nhất là P = $\frac{3}{12}$ = 25%.

Ví dụ 1.53

Trong một chương trình văn nghệ, cần chọn ra 7 bài hát trong số 10 bài hát, 3 tiết mục múa trong số 5 tiết mục múa rồi xếp thứ tự biểu diễn. Hỏi có bao nhiêu cách chọn nếu các tiết mục hát được xếp liền nhau và các tiết mục múa cũng được xếp liền nhau?

Hướng dẫn:

Có 2 trường hợp để xếp các tiết mục biểu diễn:

Trường hợp 1: Xếp các tiết mục hát trước rồi xếp các tiết mục múa.

Giai đoạn 1: Xếp 7 tiết mục hát từ 10 tiết mục hát.

Quá trình chọn các bài hát rồi xếp thứ tự. Do đó số cách để xếp là số các chỉnh hợp chập 7 của 10: A_{10}^7.

Giai đoạn 2: Xếp có thứ tự 3 tiết mục múa từ 5 tiết mục múa.

Số cách để xếp là số các chỉnh hợp chập 3 của 5: A_5^3.

Theo nguyên lý nhân, số cách để sắp xếp 7 tiết mục hát, sau đó là 3 tiết mục múa có sắp thứ tự là $A_{10}^7 . A_5^3$.

Trường hợp 2: Xếp các tiết mục múa trước rồi xếp các tiết mục hát.

Giai đoạn 1: Xếp 3 tiết mục múa từ 5 tiết mục múa.

Số cách xếp là A_5^3.

Giai đoạn 2: Xếp 7 tiết mục hát từ 10 tiết mục hát.

Số cách xếp là: A_{10}^7.

Theo nguyên lý nhân, cách xếp để các tiết mục múa trước, hát sau theo thứ tự là $A_5^3 . A_{10}^7$.

Từ các trường hợp 1 và trường hợp 2, theo nguyên lý cộng, số cách xếp để các tiết mục hát được xếp liền nhau và các tiết mục múa cũng được xếp liền nhau là:

$A_{10}^7 . A_5^3 + A_5^3 . A_{10}^7$.

Ví dụ 1.54

Cho tập hợp A = {0, 1, 2, …, 8, 9}. Có bao nhiêu số tự nhiên có 7 chữ số khác nhau và lớn hơn 685000.

Hướng dẫn:

Gọi số cần tìm là $\overline{a_1\, a_2 \ldots a_6 a_7}$ thỏa mãn $a_i \in A, i = \overline{1..7}$ và $\overline{a_1\, a_2 \ldots a_6 a_7} >$ 685000.

Xét các trường hợp sau đây:

Trường hợp 1: Số có dạng $\overline{68 a_3\, a_4 \ldots a_6 a_7}$ ($a_3 \geq 5, a_3 \neq 6, 8$).

a_3 có thể nhận 3 giá trị 5, 7, 9 nên có 3 cách chọn.

a_4, a_5, a_6, a_7 là một bộ 4 số có thứ tự lập từ A – {a_3, 6, 8}.

Mỗi bộ {a_4, a_5, a_6, a_7} là một chỉnh hợp chập 4 từ 7 phần tử. Có A_7^4 cách chọn bộ 4 số có kể thứ tự.

Vậy có 3. A_7^4 số thỏa mãn trong trường hợp 1.

Trường hợp 2: Số có dạng $\overline{69 a_3\, a_4 \ldots a_6 a_7}$.

a_3, a_4, a_5, a_6, a_7 là một bộ 5 phần tử có thứ tự từ A –{a_3, 6, 9}. Mỗi cách lấy ra bộ 5 phần tử từ tập A là một chỉnh hợp chập 5 từ 7 phần tử. Có A_8^5 số.

Trường hợp 3: Số có dạng $\overline{a_1\ a_2 \ldots a_6 a_7}$ với a_1 >6.

a_1 có 3 cách chọn là 7, 8, 9.

a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7 là một bộ 6 phần tử từ A-{a_1} và có kể thứ tự các phần tử. Có A_9^6 số.

Áp dụng nguyên lý cộng, tổng số các số thỏa mãn yêu cầu đề bài là:

$3.\, A_7^4 + A_8^5 + 3.\, A_9^6 = 69720$ (số).

1.3.2.2. Chỉnh hợp lặp

Định nghĩa 1.21
Một cách sắp xếp có thứ tự k phần tử có thể lặp lại của một tập n phần tử được gọi là một chỉnh hợp lặp chập k từ tập n phần tử. Số chỉnh hợp lặp chập k từ tập n phần tử là, ký hiệu $\overline{A_n^k}$, được tính theo công thức: $\overline{A_n^k} = n^k$.

Ví dụ 1.55

Tập A = {1, 2, 3, 4, 5}.

Các bộ (1, 1, 2); (1, 2, 1); (2, 3, 5); (2, 3, 2); v.v. là các chỉnh hợp lặp chập 3 phần tử từ tập 5 phần tử.

Ví dụ 1.56

Từ tập A = {a, b, c} có thể đặt được bao nhiêu tên biến có độ dài 4 ký tự?

Hướng dẫn:

Mỗi tên biến có 4 ký tự được chọn từ tập A ={a, b, c} là một bộ 4 phần tử sắp thứ tự có thể được lặp lại lấy từ tập A, là một chỉnh hợp lặp chập 4 của 3.

Do đó số các biến có độ dài 4 có thể tạo ra là $3^4 = 81$ (biến).

Ví dụ 1.57

Cho tập B = {0, 1}. Có thể tạo ra bao nhiêu xâu có độ dài n?

Hướng dẫn:

Các dãy nhị phân có độ dài n là một chỉnh hợp lặp chập n từ hai phần tử {0, 1}. Số xâu có độ dài n được tạo ra từ tập B là 2^n.

Ví dụ 1.58

Có bao nhiêu số tự nhiên có 6 chữ số với:

a. Chữ số đầu và chữ số cuối giống nhau?

b. Chữ số đầu và cuối khác nhau?

c. Hai chữ số đầu giống nhau và hai chữ số cuối giống nhau?

Hướng dẫn:

a. Số có 6 chữ số trong đó chữ số đầu và chữ số cuối có dạng $\overline{abcdea}$ (a nhận các giá trị $\overline{1 \dots 9}$; b, c, d, e nhận các giá trị $\overline{0 \dots 9}$).

Chọn a có 9 cách chọn.

Chọn $\overline{bcde}$: Mỗi sự lựa chọn ra bộ 4 chữ số trong 10 số từ 0…9 là một hoán vị lặp chập 4 từ 10. Số các số có 4 chữ số có thể được tạo ra là $\overline{A_{10}^4} = 10^4$.

Theo nguyên lý nhân, số các số có 6 chữ số, trong đó chữ số đầu tiên và chữ số cuối cùng giống nhau là $9.\ 10^4$.

b. Số các số có chữ số đầu và chữ số cuối khác nhau được tính bằng số các số có 6 chữ số trừ đi số các số có 6 chữ số có chữ số đầu và chữ số cuối giống nhau.

Như vậy câu hỏi này được thực hiện thông qua 2 bước:

+ Đếm số các số có 6 chữ số.

+ Đếm số các số có 6 chữ số có chữ số đầu và chữ số cuối giống nhau.

Bước 1: Đếm số các số có 6 chữ số:

Gọi số có 6 chữ số có dạng $\overline{abcdef}$ trong đó a nhận các giá trị $\overline{1 \dots 9}$; b, c, d, e, f nhận các giá trị $\overline{0 \dots 9}$.

Chọn a có 9 cách chọn.

Chọn $\overline{bcdef}$: Mỗi sự lựa chọn bộ 5 chữ số từ 10 chữ số {0, 1, 2,…, 8, 9) là một hoán vị lặp chập 5 của 10. Do đó số các số có 5 chữ số có thể được tạo ra là: $\overline{A_{10}^5} = 10^5$.

Áp dụng nguyên lý nhân, ta có số các số có 6 chữ số được tạo ra là $9.\ 10^5$.

Bước 2: Đếm số các số có 6 chữ số, trong đó chữ số đầu và cuối giống nhau.

Ở câu a, chúng ta đã tính được kết quả là $9.\ 10^4$.

Do đó, số các số có 6 chữ số trong đó có chữ số đầu và cuối khác nhau là:

$9.10^5 - 9.10^4$.

c. Số có 6 chữ số thỏa mãn yêu cầu đề bài có dạng $\overline{aabcdd}$, trong đó a nhận các giá trị $\overline{1 ... 9}$; b, c, d nhận các giá trị $\overline{0 ... 9}$.

Chọn a có 9 sự lựa chọn.

Chọn $\overline{bcdd}$ thực chất chỉ là việc tạo ra các hoán vị lặp chập 3 từ 10 chữ số (do 2 chữ số cuối cùng giống nhau).

Theo nguyên lý nhân, số các số thỏa mãn yêu cầu đề bài là 9.10^3.

Ví dụ 1.59

Có bao nhiêu số tự nhiên có 10 chữ số trong đó 3 chữ số đầu tiên và 3 chữ số cuối tương ứng giống nhau?

Hướng dẫn:

Gọi số tự nhiên có 10 chữ số, trong đó 3 chữ số đầu tiên và 3 chữ số cuối cùng tương ứng giống nhau có dạng $\overline{abcxyztabc}$.

Quá trình lập số tự nhiên có 10 chữ số theo yêu cầu đề bài, được chia làm ba giai đoạn sau đây:

Giai đoạn 1: Chọn bộ 3 chữ số đầu tiên $\overline{abc}$.

Vì a chỉ có thể lựa chọn từ các chữ số {1, 2, 3,…, 8, 9} để đảm bảo số được chọn có 3 chữ số, nên có 9 cách lựa chọn a.

Chọn $\overline{bc}$: vì các chữ số không yêu cầu khác nhau đôi một, do đó mỗi bộ $\overline{bc}$ được tạo ra đơn giản là một chỉnh hợp lặp 2 từ 10 phần tử. Nên cách chọn $\overline{bc}$ là 10^2.

Theo nguyên lý nhân, số các số có ba chữ số $\overline{abc}$ có thể tạo ra là 9.10^2.

Giai đoạn 2: Chọn bộ 3 chữ số tiếp theo $\overline{xyzt}$

Các chữ số x, y, z, t có thể nhận giá trị từ {0, 1, 2,…, 8, 9} và không có yêu cầu đôi một phải khác nhau. Do đó, mỗi số có 4 chữ số được tạo ra là một chỉnh hợp lặp chập 4 từ 10 phần tử. Do đó số các số có 4 chữ số $\overline{xyzt}$ là 10^4.

Giai đoạn 3: Chọn 3 chữ số cuối cùng.

Vì 3 chữ số cuối tương tự giống 3 chữ số đầu tiên. Nên với mỗi cách chọn 3 chữ số $\overline{abc}$ ở vị trí đầu tiên cũng chỉ có 1 cách chọn cho 3 chữ số cuối để chúng tương ứng giống nhau. Do đó cách chọn 3 chữ số cuối là 1 cách.

Theo nguyên lý nhân, số các số có 10 chữ số có thể được tạo ra, thỏa mãn yêu cầu của đề bài là: $9.10^2.10^4.1 = 9.10^6$ (số).

1.3.3. Tổ hợp

1.3.3.1 Tổ hợp không lặp

Định nghĩa 1.22
Tổ hợp chập k từ n phần tử là cách chọn không phân biệt thứ tự k phần tử lấy từ tập n phần tử đã cho, mỗi phần tử không lấy lặp lại. Số tổ hợp chập k từ n phần tử, ký hiệu là C_n^k và được tính theo công thức: $$C_n^k = \frac{n!}{(n-k)!\,k!}$$

Ví dụ 1.60

Với tập A = {1, 2, 3, 4, 5} thì các bộ (1, 2, 3), (1, 2, 4), v.v. là các tổ hợp chập 3 từ 5 phần tử, theo định nghĩa thì hai bộ (2, 3, 5) và (3, 5, 2) chỉ được tính là một tổ hợp chập 3 từ 5 phần tử của tập A.

Ví dụ 1.61

Có 5 sinh viên K68 của Khoa CNTT, Trường Đại học Công nghệ GTVT là An, Bình, Cường, Dũng, Giang. Chủ nhiệm Khoa muốn chọn để thành lập một tổ 3 người để thực hiện một đề tài khoa học. Hỏi có bao nhiêu phương án để thành lập tổ 3 người đó?

Hướng dẫn:

Cách 1: Liệt kê các phương án thành lập tổ có thể là tổ hợp chập 3 của 5 phần tử đó. Cụ thể là: (An, Bình, Cường); (An, Bình, Dũng); (An, Bình, Giang); (An, Cường, Dũng); (An, Cường, Giang); (An, Dũng, Giang); (Bình, Cường, Dũng); (Bình, Cường, Giang); (Bình, Dũng, Giang); (Cường, Dũng, Giang).

Cách 2: Lấy ra 3 sinh viên trong nhóm 5 sinh viên { An, Bình, Cường, Dũng, Giang} để thành lập tổ thực hiện một đề tài khoa học. Thứ tự lấy các sinh viên không quan trọng, do đó mỗi cách để thành lập tổ là một tổ hợp chập 3 của 5 sinh viên. Số các tổ hợp được tạo ra là:

$C_5^3 = \frac{5!}{(5-3)!3!} = \frac{5.\ 4}{2} = 10$ (phương án). Như vậy, có tất cả 10 phương án lựa chọn để lập tổ 3 người.

Ví dụ 1.62

Có 12 đội bóng tham dự giải chuyên nghiệp quốc gia, các đội thi đấu vòng tròn một lượt. Hỏi có bao nhiêu trận đấu được tổ chức?

Hướng dẫn:

Mỗi trận đấu là một cặp 2 đội được chọn từ 12 đội đã cho, không kể đến thứ tự và phải khác nhau, vậy số trận đấu là tổ hợp chập 2 từ 12 phần tử:

$$C_{12}^{2} = \frac{12!}{10!2!} = \frac{12.11.10!}{10!.2.1} = \frac{12.11}{2} = 66 \text{ (trận).}$$

Ví dụ 1.63

Cho tập A = {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7}.

Có thể lập được bao nhiêu số tự nhiên gồm 5 chữ số khác nhau và nhất thiết phải có hai chữ số 1 và 5?

Hướng dẫn:

Số tự nhiên có 5 chữ số có dạng $\overline{abcde}$ (a, b, c, d, e ∈ $\overline{0 \ldots 9}$, đôi một khác).

Giai đoạn 1: Trong 5 chữ số thì có 2 chữ số là 1 và 5. Có 1 cách để lấy ra bộ (1, 5).

Giai đoạn 2: Chọn ra ba số {x, y, z} thuộc tập hợp {2, 3, 4, 6, 7}.

Mỗi cách chọn ra 3 số từ tập {2, 3, 4, 6, 7} là một tổ hợp (vì chưa quan tâm đến thứ tự lấy ra).

Do đó số cách chọn ra là $C_5^3 = \frac{5!}{3!.2!} = 10$.

Giai đoạn 3: Như vậy 5 số được chọn là (1, 5, x, y, z}. Mỗi số được tạo ra bộ {1, 5, x, y, z} là 1 hoán vị.

Số các số được tạo ra là P_5 = 5 ! = 120.

Theo nguyên lý nhân, số các số có thể được tạo ra là $1.C_5^3.P_5 = 1200$ (số).

Ví dụ 1.64

Một bác nông dân được tặng 12 cây giống, trong đó có 6 cây xoài, 4 cây mít và 2 cây ổi. Bác muốn chọn ra 6 cây giống để trồng ra vườn của mình. Hỏi có bao nhiêu cách để bác:

a. Chọn ra mỗi loại đúng 2 cây.

b. Chọn mỗi loại có ít nhất 1 cây.

Hướng dẫn:

a. Yêu cầu của đề bài là chọn ra mỗi loại 2 cây.

Bác nông dân sẽ chọn ra 2 cây xoài giống, 2 cây mít giống, 2 cây ổi giống từ 12 cây được tặng.

Do thứ tự lấy ra không quan trọng, nên mỗi cách chọn 2 cây xoài giống từ 6 cây xoài giống là tổ hợp chập 2 của 6.

Số cách chọn 2 cây xoài giống là $C_6^2 = \frac{6!}{4!.2!} = 15$.

Tương tự, số cách chọn ra 2 cây mít từ 4 cây mít là $C_4^2 = \frac{4!}{2!.2!} = 6$.

Số cách để chọn 2 cây ổi từ 2 cây ổi là $C_2^2 = \frac{2!}{2!.0!} = 1$.

Theo nguyên lý nhân, số cách để chọn ra 6 cây giống (2 xoài, 2 mít, 2 ổi) là: 15. 6. 1 = 90 (cách).

b. Yêu cầu của đề bài là chọn mỗi loại ít nhất 1 cây.

Cách 1: Suy luận trực tiếp.

Trong 12 cây có 6 cây xoài, 4 cây mít và 2 cây ổi. Bác nông dân cần chọn ra 6 cây giống từ 12 cây được tặng.

Dễ dàng thấy 6 = 4 + 1 + 1 = 3 + 2 + 1 = 3 + 1 +2= 2 + 3 + 1 = 2 + 2 + 2 = 1 + 3 + 2 = 1 + 4 + 1.

Như vậy có thể có các cách sau để chọn ra 6 cây (xoài, mít, ổi) thỏa mãn đề bài: (4, 1, 1); (3, 2, 1); (3, 1, 2); (2, 3, 1); (2, 2, 2); (1, 3, 2); (1, 4, 1);

Trường hợp 1: 4 cây xoài, 1 cây mít, 1 cây ổi.

Lập luận tương tự câu a.

Chọn 4 cây xoài từ 6 cây xoài : $C_6^4 = \frac{6!}{4!.2!} = 15$

Chọn 1 cây mít từ 4 cây mít : $C_4^1 = \frac{4!}{3!.1!} = 4$

Chọn 1 cây ổi từ 2 cây ổi : $C_2^1 = \frac{2!}{1!.1!} = 2$

Số cách chọn của trường hợp 1 là $C_6^4 . C_4^1 . C_2^1 = 15.4.2 = 120$.

Trường hợp 2: 3 cây xoài, 2 cây mít, 1 cây ổi.

Chọn 3 cây xoài từ 6 cây xoài: $C_6^3 = \frac{6!}{3!.3!} = 20$

Chọn 2 cây mít từ 4 cây mít: $C_4^2 = \frac{4!}{2!.2!} = 6$

Chọn 1 cây ổi từ 2 cây ổi: $C_2^1 = \frac{2!}{1!.1!} = 2$

Số cách chọn của trường hợp 2 là $C_6^3 . C_4^2 . C_2^1 = 20.6.2 = 240$.

Trường hợp 3: 3 cây xoài, 1 cây mít, 1 cây ổi.

Chọn 3 cây xoài từ 6 cây xoài: $C_6^3 = \frac{6!}{3!.3!} = 20$

Chọn 1 cây mít từ 4 cây mít: $C_4^1 = \frac{4!}{3!.1!} = 4$

Chọn 2 cây ổi từ 2 cây ổi: $C_2^2 = \frac{2!}{2!.0!} = 1$

Số cách chọn của trường hợp 3 là $C_6^3.C_4^1.C_2^2 = 20.4.1 = 80$.

Trường hợp 4: 2 cây xoài, 3 cây mít, 1 cây ổi.

Chọn 2 cây xoài từ 6 cây xoài: $C_6^2 = \frac{6!}{4!.2!} = 15$

Chọn 3 cây mít từ 4 cây mít: $C_4^3 = \frac{4!}{3!.1!} = 4$

Chọn 1 cây ổi từ 2 cây ổi: $C_2^1 = \frac{2!}{1!.1!} = 2$

Số cách chọn của trường hợp 4 là $C_6^2.C_4^3.C_2^1 = 15.4.2 = 120$.

Trường hợp 5: 2 cây xoài, 2 cây mít, 2 cây ổi.

Chọn 2 cây xoài từ 6 cây xoài: $C_6^2 = \frac{6!}{2!.4!} = 15$.

Chọn 2 cây mít từ 4 cây mít: $C_4^2 = \frac{4!}{2!.2!} = 6$.

Chọn 2 cây ổi từ 2 cây ổi: $C_2^2 = \frac{2!}{2!.0!} = 1$.

Số cách chọn của trường hợp 5 là $C_6^2.C_4^2.C_2^2 = 15.6.1 = 90$.

Trường hợp 6: 1 cây xoài, 3 cây mít, 2 cây ổi.

Chọn 1 cây xoài từ 6 cây xoài: $C_6^1 = \frac{6!}{1!.5!} = 6$

Chọn 3 cây mít từ 4 cây mít: $C_4^3 = \frac{4!}{3!.1!} = 4$

Chọn 2 cây ổi từ 2 cây ổi: $C_2^2 = \frac{2!}{2!.0!} = 1$

Số cách chọn của trường hợp 6 là $C_6^1.C_4^3.C_2^2 = 6.4.1 = 24$.

Trường hợp 7: 1 cây xoài giống, 4 cây mít và 1 cây ổi.

Chọn 1 cây xoài từ 6 cây xoài: $C_6^1 = \frac{6!}{1!.5!} = 6$

Chọn 4 cây mít từ 4 cây mít: $C_4^4 = \frac{4!}{4!.0!} = 1$

Chọn 1 cây ổi từ 2 cây ổi: $C_2^1 = \frac{2!}{1!.1!} = 2$

Số cách chọn của trường hợp 7 là $C_6^1.C_4^4.C_2^1 = 6.1.2 = 12$.

Theo nguyên lý cộng, số cách để chọn ra 6 cây, trong đó mỗi loại có ít nhất 1 cây là 120 + 240 + 80 + 120 + 90 + 24 + 12 = 686.

Cách 2: Suy luận gián tiếp.

Số cách để chọn 6 cây giống từ 12 cây giống là $C_{12}^6 = \frac{12!}{6!.6!} = 924$

Chọn ra 6 cây giống là cây xoài. Số cách chọn là $C_6^6 = 1$

Chọn ra 6 cây giống chỉ gồm cây xoài và cây mít: $C_{10}^6 - 1 = \frac{10!}{6!.4!} - 1 = 209$ (Trường hợp đặc biệt chọn 6 cây đều là cây xoài).

Chọn ra 6 cây giống chỉ gồm xoài và ổi: $C_8^6 - 1 = \frac{8!}{6!.2!} - 1 = 27$ (Trường hợp đặc biệt chọn 6 cây đều là cây xoài)

Chọn ra 6 cây giống chỉ gồm mít và ổi: Do mít có 4 cây, ổi có 2 cây. Nên chỉ có 1 cách chọn duy nhất để chọn.

Số cách để chọn ra 6 cây mà không đủ cả 3 loại cây là :

$C_6^6 + C_{10}^6 - 1 + C_8^6 - 1 + 1 = 1 + 209 + 27 + 1 = 238$

Do đó, số cách để chọn ra 6 cây giống, mỗi loại ít nhất một cây là:

924 – 238 = 686 (cách).

1.3.3.2. Tổ hợp lặp

Định nghĩa 1.23

Mỗi cách chọn ra k vật từ n loại vật khác nhau (trong đó mỗi loại vật có thể được chọn lại nhiều lần) được gọi là tổ hợp lặp chập k của n.

Số tổ hợp lặp chập k từ tập n phần tử, ký hiệu là K_n^k, được tính theo công thức $K_n^k = C_{n+k-1}^k = \frac{(n+k-1)!}{(n-1)!\,k!}$

Ví dụ 1.65

Ví dụ 1.65a

Có 3 loại nón A, B, C, An chọn mua 2 chiếc nón. Hỏi An có bao nhiêu cách chọn?

Hướng dẫn:

Mỗi một cách chọn là tổ hợp chập 2 của 3. Do đó số cách chọn là:

$$K_3^2 = C_4^2 = \frac{4!}{2!.2!} = 6.$$

Cụ thể 6 cách đó là: AA, BB, CC, AB, AC, BC.

Ví dụ 1.65b

Một cửa hàng bánh bích quy có 4 loại khác nhau. Có bao nhiêu cách chọn 6 hộp bánh? Giả sử là ta chỉ quan tâm đến loại bánh mà ta không quan tâm đến hộp bánh cụ thể nào và thứ tự chọn chúng.

Hướng dẫn:

Số cách chọn 6 hộp bánh bằng số tổ hợp lặp chập 6 của 4 phần tử;

Số cách chọn là $K_4^6 = C_{4+6-1}^6 = C_9^6 = \frac{9!}{3!.6!} = 84$ cách chọn 6 hộp bánh bích quy.

Ví dụ 1.66

An mua 15 lon nước ngọt tại một cửa hàng để tổ chức sinh nhật. Cửa hàng này bán 5 loại nước ngọt khác nhau.

a. An có bao nhiêu lựa chọn khác nhau để mua 15 lon nước ngọt từ cửa hàng?
b. Nếu bia là một trong 5 loại nước ngọt của cửa hàng. Hỏi có bao nhiêu cách khác nhau để An mua 15 lon nước ngọt, trong đó có ít nhất 6 lon bia?

Hướng dẫn:

a. Ta xem 5 loại nước giải khát khác nhau là n loại và 15 lon nước giải khát được chọn làm đối tượng r (vì vậy n = 5 và r = 15). Mỗi lựa chọn của lon nước ngọt được thể hiện bằng một chuỗi (5 – 1) = 4 thanh dọc (để tách loại nước giải khát) và 15 dấu x (để đại diện cho lon được chọn).

Ví dụ chuỗi sau đây thể hiện cho một lựa chọn của An bao gồm 3 lon loại 1, 7 lon loại 2, không lon loại 3, 3 lon loại 4 và 2 lon loại 5.

x x x | x x x x x x x | | x x x | x x

Do đó mỗi cách lấy 15 lon nước ngọt từ 5 loại nước ngọt bằng số cách để lấy ra 15 phần tử trong tập (15 + 5 – 1) phần tử (bao gồm 15 ký hiệu x và 4 ký tự |). Số cách lựa chọn là:

$$K_5^{15} = C_{15+5-1}^{15} = \frac{19!}{(5-1)!\,15!} = 3{,}876 \text{ (cách).}$$

b. Trong 15 lon nước ngọt mà An mua, có ít nhất 6 lon bia. Như vậy, đầu tiên chọn 6 lon bia, sau đó chọn thêm 9 lon nước ngọt từ 5 loại nước ngọt của cửa hàng. Sự lựa chọn 9 lon nước ngọt được biểu diễn bằng 9 dấu x và 4 dấu |. Chẳng hạn nếu bia là lon loại 1, thì chuỗi x x x | | x x | x x x x | biểu diễn cho 1 sự lựa chọn của 3 lon bia (ngoài 6 lon bia đã chọn ban đầu), không lon loại 2, 2 lon loại 3, 4 lon loại 4 và không lon loại 5. Do đó, tổng số lựa chọn 15 lon nước ngọt từ 5 loại nước ngọt, trong đó có ít nhất 6 lon bia, là số chuỗi gồm 13 ký hiệu (4 ký hiệu | và 9 ký hiệu x).

Số cách lựa chọn là:

$$K_5^9 = C_{9+5-1}^9 = \frac{13!}{(5-1)!9!} = 715 \text{ (cách).}$$

1.3.3.3. Các tính chất của công thức tổ hợp

Các tính chất của tổ hợp
$C_n^0 = C_n^n = 1$ $C_n^k = C_n^{n-k}$ $C_n^k + C_n^{k-1} = C_{n+1}^k$
Với mọi x, y ta có: $$(x+y)^n = \sum_{i=0}^{n} C_n^i \, x^i \, y^{n-1}$$ *Hệ quả:* *Nếu x = y = 1 ta có:* $2^n = \sum_{i=0}^{n} C_n^i$

1.4. NGUYÊN LÝ DIRICHLET

Johann Peter Gustav Lejeune Dirichlet (13/2/1805 – 05/5/1859) là một nhà toán học người Đức, được cho là người đưa ra định nghĩa hiện đại của hàm số.

Gia đình ông xuất thân từ thị trấn Richelette ở Bỉ, do đó mà họ của ông là *"Lejeune Dirichlet"*, tiếng Pháp nghĩa là *"chàng trai trẻ từ Richelette"* được đặt theo và đó là nơi ông nội ông sống.

Dirichlet được sinh ra ở Düren, nơi cha ông là một nhân viên bưu điện. Ông được giáo dục ở Đức và sau đó là Pháp, nơi ông học hỏi từ hầu hết các nhà toán học nổi tiếng nhất thời đó. Ông cũng học từ Georg Ohm. Bài báo đầu tiên của ông là về định lý Fermat bao gồm một phần của chứng minh cho trường hợp n = 5. Dirichlet cũng hoàn thiện chứng minh của ông trong cùng một thời gian, sau đó ông đã đưa ra toàn bộ lời giải cho trường hợp n = 14.

Vào năm 1831, ông kết hôn với Rebecca Henriette Mendelssohn Bartholdy, một cô gái thuộc gia đình danh giá đã chuyển đổi từ đạo Do Thái sang Thiên chúa giáo, cô là cháu gái của triết gia Msoses Mendelssohn và là em của nhà soạn nhạc Felix Mendelssohn Bartholdy và Fanny Mendelssohn.

Ferdinand Eisenstein, Leopold Kronecker và Rudolf Lipschitz là học trò của ông. Sau khi ông qua đời, các bài giảng của Dirichlet và các kết quả khác trong ngành số học được sưu tập, biên khảo và xuất bản bởi đồng nghiệp và cũng là bạn ông là nhà toán học Richard Dedekind.

Các định lý mang tên Dirichlet:

Định lý Dirichlet về cấp số cộng (số học, đặc biệt là số nguyên tố)

Định lý Dirichlet về xấp xỉ diophantine (số học và xấp xỉ)

Định lý Dirichlet về phần tử đơn vị (số học đại số và vành)

Trong nội dung trước ta đã tập trung chú ý vào việc đếm số lượng các phần tử của tập hợp, số các cấu hình tổ hợp (số phần tử của các đối tượng tổ hợp) thỏa mãn những tính chất nào đó. Trong những bài toán đó sự tồn tại của các cấu hình là hiển nhiên và công việc chính là đếm số phần tử thỏa mãn tính chất đặt ra. Tuy nhiên trong rất nhiều bài toán tổ hợp, việc chỉ ra sự tồn tại của một cấu hình thỏa mãn các tính chất cho trước là hết sức khó khăn. Chẳng hạn khi một kỳ thủ cần phải tính toán các nước đi của mình để giải đáp xem liệu có khả năng thắng hay không v.v.. Như vậy, trong tổ hợp xuất hiện một vấn đề thứ hai rất quan trọng là: xét sự tồn tại của các cấu hình tổ hợp, phương án với các tính chất cho trước. Các bài toán này thuộc dạng bài toán tồn tại.

Một bài toán tồn tại tổ hợp xem như giải xong nếu hoặc chỉ ra một cách xây dựng cấu hình, phương án hoặc chứng minh rằng chúng không có, không tồn tại. Tuy nhiên cả hai khả năng đều không phải dễ.

Một số phương pháp giải bài toán tồn tại:

- Phương pháp chứng minh trực tiếp
- Phương pháp phản chứng
- Nguyên lý Dirichlet.

Trong nội dung của giáo trình này, chúng ta sẽ tập trung giải quyết bài toán tồn tại bằng nguyên lý Dirichlet.

1.4.1. Nguyên lý chuồng chim bồ câu

Nguyên lý Dirichlet do nhà toán học nổi tiếng là Dirichlet đề xuất từ thế kỷ XIX đã được ứng dụng để chứng minh sự tồn tại nghiệm trong nhiều bài toán tổ hợp.

Nguyên lý *"Chuồng chim bồ câu"*
"Giả sử có một đàn chim bồ câu bay vào chuồng. Nếu số chim nhiều hơn số ngăn chuồng thì chắc chắn có ít nhất một ngăn có nhiều hơn một con chim".

Dĩ nhiên nguyên lý này có thể áp dụng cho cả các đối tượng không phải là chim bồ câu và chuồng chim. Một cách tổng quát, nguyên lý Dirichlet được phát biểu như sau: "*Nếu xếp nhiều hơn n đối tượng vào n cái hộp thì tồn tại ít nhất một hộp chứa không ít hơn 2 đối tượng"*.

Việc chứng minh nguyên lý này có thể tiến hành bằng lập luận phản chứng rất đơn giản:

"Giả sử không hộp nào chứa nhiều hơn một đối tượng, thì chỉ có nhiều nhất là n đối tượng được xếp vào trong hộp, điều này trái với giả thiết là số đối tượng lớn hơn n".

Ví dụ 1.67

Chứng tỏ rằng trong số 367 người sinh cùng năm sẽ có ít nhất 2 người có cùng ngày sinh.

Hướng dẫn:

Một năm có nhiều nhất 366 ngày. Do vậy, theo nguyên lý Dirichlet, trong số 367 người bất kỳ bao giờ cũng tồn tại ít nhất 2 người có cùng ngày sinh.

Ví dụ 1.68

Giả sử rằng giáo viên chấm và làm tròn điểm trong thang điểm 10, với các điểm 0, 1, 2, 3,…, 8, 9, 10. Chứng tỏ rằng trong số 12 sinh viên bất kỳ trong lớp, có ít nhất 2 người có điểm số như nhau?

Hướng dẫn:

Thang điểm chấm bài kiểm tra được cho từ 0 đến 10, tức là có 11 thang điểm khác nhau. Do vậy, theo nguyên lý Dirichlet, trong số 12 sinh viên bất kỳ của lớp sẽ có ít nhất 2 người có kết quả giống nhau.

Ví dụ 1.69

Trong một đơn vị quân đội, cấp hàm của các sỹ quan từ thiếu úy đến đại tá. Chứng tỏ rằng, trong 9 sỹ quan bất kỳ trong đơn vị có ít nhất 2 người cùng cấp bậc?

Hướng dẫn:

Cấp bậc quân hàm của sỹ quan có 8 cấp từ thiếu uý đến đại tá, bao gồm: Thiếu úy, trung úy, thượng úy, đại úy, thiếu tá, trung tá, thượng tá và đại tá. Do vậy, theo nguyên lý Dirichlet, trong 9 sỹ quan bất kỳ của đơn vị sẽ có ít nhất 2 người cùng cấp bậc.

1.4.2. Nguyên lý Dirichlet tổng quát

Nguyên lý Dirichlet tổng quát
Cho X và Y là hai tập hợp N(X) = n, N(Y) = m. Cho một ánh xạ F: $X \to Y$, nếu $\left[\frac{n}{m}\right] \geq k$ thì tồn tại ít nhất các phần tử $x_1 \neq x_2 \neq \ldots \neq x_k$ sao cho $F(x_1) = F(x_2) = \ldots = F(x_k)$.

Chứng minh:

Dùng phương pháp phản chứng:

Không giảm tính tổng quát ta biểu diễn:

$X = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ và $Y = \{y_1, y_2, ..., y_m\}$

Kí hiệu: $X_i = \{x \in X| F(x) = y_i\}$

(X_i là tập các phần tử $x \in X$ sao cho $F(x) = y_i$)

Giả thiết phản chứng là $N(X_i) < k$ với $\forall$ i = 1,..., n

$$n = N(X) = N(\bigcup_{i=1}^{n} X_i) \leq \sum_{i=1}^{n} N(X_i) < m.\ k = m.\ \left\lceil\frac{n}{m}\right\rceil = n$$

$\Rightarrow$ n < n $\Rightarrow$ giả thiết là sai.

Như vậy tồn tại j sao cho $N(X_j) \geq k$.

Ví dụ 1.70

Có 20 máy điện thoại trong thành phố, các máy có thể nối trực tiếp với nhau hoặc không nối với nhau. Chứng minh rằng tồn tại ít nhất 2 máy điện thoại mà có số máy nối trực tiếp đến nó là như nhau.

Hướng dẫn:

Ta đánh số thứ tự các máy từ 1 đến 20.

Gọi a_i là số máy nối trực tiếp với máy thứ i như vậy: $0 \leq a_i \leq 19$, giá trị 0 và 19 không đồng thời có mặt (vì nếu tồn tại một máy nối với 19 máy thì không có máy nào độc lập, nếu có một máy độc lập thì không máy nào nối với 19 máy).

Như vậy $\{a_1, a_2, ..., a_{20}\}$ chỉ nhận nhiều nhất 19 giá trị khác nhau.

Theo Dirichlet sẽ tồn tại ít nhất hai số cùng giá trị, giả sử là $a_k = a_j$ => máy thứ j và k là hai máy nối trực tiếp đến nó là như nhau.

Ví dụ 1.71

Trong một buổi dạ tiệc có n thực khách. Chứng minh rằng ít nhất có 2 người có cùng số người quen.

Hướng dẫn:

Đánh số các thực khách từ 1 đến n.

Gọi a_i là số người quen của người thứ i => $0 \leq a_i \leq n-1$, giá trị 0 và n-1 không đồng thời có mặt trong các giá trị của a_i.

$\Longrightarrow$ Có một tập $\{a_1, a_2,\ldots, a_n\}$ chỉ nhận nhiều nhất (n-1) giá trị khác nhau. Theo Dirichlet sẽ tồn tại ít nhất hai số có cùng giá trị, giả sử $a_k = a_j \Longrightarrow$ người thứ k và người thứ j là hai người có cùng số người quen.

Ví dụ 1.72

Trong một tháng có 30 ngày, một công nhân sản xuất mỗi ngày ít nhất 1 sản phẩm nhưng cả tháng sản xuất không quá 45 sản phẩm. Chứng minh rằng tồn tại một số ngày liên tiếp nhau mà người công nhân đó sản xuất ra đúng 14 sản phẩm.

Hướng dẫn:

Gọi a_i là số sản phẩm mà người công nhân sản xuất đến ngày thứ i.

$1 \le a_1 \le a_2 \le \ \ldots \ \le a_{45}$

Đặt $b_i = a_i + 14$

$15 \le b_1 < b_2 \le \ \ldots \ \le b_{30} \ \le 59$

X = $a_i \ \cup \ b_i$

N(X) = 60 là các số nguyên nhận giá trị trong tập Y= {1,…, 59}$\Rightarrow$ N(Y) = 59

$\Rightarrow$ Theo Dirichlet tồn tại ít nhất 2 phần tử thuộc X có giá trị như nhau, hai phần tử này không cùng nằm trong $\{a_i\}$ và không cùng nằm trong $\{b_i\}$ (Vì a_i là số sản phẩm làm ra cho đến ngày thứ i, vậy thì mỗi ngày số sản phẩm làm ra sẽ tăng lên không thể bằng ngày cũ).

Như vậy tồn tại $a_i = b_k = a_k +14 \Rightarrow a_i - a_k =14 \Rightarrow$ Có nghĩa là liên tiếp các ngày từ ngày thứ k+1 đến ngày thứ i làm ra đúng 14 sản phẩm.

1.5. HỆ THỨC TRUY HỒI

1.5.1. Khái niệm

Một bài toán đếm có thể giải được bằng các kỹ thuật đếm trong các tiết trước hoặc cũng có thể giải được bằng cách tìm các mối quan hệ giữa các giá trị đếm trong một dãy số đếm gọi là hệ thức truy hồi.

Định nghĩa 1.24
Xét dãy số $\{a_n\}$. Nếu có một công thức biểu diễn a_n qua một hay nhiều số hạng đi trước của dãy $a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}$ với mọi n nguyên và $n \ge n_0$, trong đó n_0 là nguyên không âm, thì công thức đó được gọi là hệ thức đệ quy đối với dãy $\{a_n\}$. Dãy số $\{a_n\}$ được gọi là lời giải hay nghiệm của hệ thức truy hồi nếu các số hạng của nó thỏa mãn hệ thức truy hồi này.

Ví dụ 1.74

Trong một quần thể vi sinh vật số lượng các cá thể tăng gấp đôi sau mỗi giờ. Sau 4 giờ số lượng của chúng là bao nhiêu, nếu ban đầu có tất cả 5 cá thể?

Hướng dẫn:

Ta giả sử số vi sinh vật sau n giờ là a_n. Vì số vi sinh vật tăng gấp đôi sau mỗi giờ nên ta có quan hệ $a_n = 2a_{n-1}$ với n nguyên dương tùy ý, với điều kiện ban đầu $a_0 = 5$. Từ đây ta có thể xác định duy nhất a_n đối với mọi n không âm. Cụ thể, với n = 4 ta có $a_4 = 2.a_3 = 2.2.a_2 = 2.2.2.a_1 = 2.2.2.2.a_0 = 80$.

Ví dụ 1.75

Lãi kép. Một người gửi 10 triệu đồng vào tài khoản của mình tại một ngân hàng với lãi suất kép 8% mỗi năm. Hỏi sau 20 năm anh ta có bao nhiêu tiền trong tài khoản của mình?

Hướng dẫn:

Gọi F_n là tổng số tiền có trong tài khoản ngân hàng sau n năm. Vì số tiền có trong tài khoản sau n năm bằng số có sau (n-1) năm cộng lãi suất năm thứ n, nên dãy $\{F_n\}$ thỏa mãn hệ thức truy hồi sau:

$F_n = F_{n-1} + 0,08. F_{n-1} = 1,08. F_{n-1}$

Điều kiện đầu là $F_0 = 10,000,000$.

Chúng ta có thể dùng phương pháp lặp để tìm công thức trên cho F_n

Ta có:

$F_1 = (1.08). F_0$

$F_2 = (1.08). F_1 = (1.08)^2. F_0$

....

$F_n = (1.08). F_{n-1} = ... = (1.08)^n. F_0$

Thay điều kiện đầu F_0 vào ta nhận được công thức $F_n = (1,08)^n. 10,000,000$.

Khi n=20 ta có $F_{20} = 20,406,506$ đồng.

Ví dụ 1.76

Tháp Hà Nội. Trò chơi xếp hình rất phổ cập vào cuối thế kỷ XIX gọi là Tháp Hà Nội. Tương truyền rằng tại một ngôi tháp có một tấm đế bằng đồng trên đó có 3 cái cọc bằng kim cương. Lúc khai thiên lập địa, trên một trong 3 cái cọc thượng đế đã để 64 chiếc đĩa bằng vàng với đường kính giảm dần. Ngày đêm các nhà sư dịch chuyển đĩa sang một cái cọc khác theo một quy tắc: mỗi lần chỉ được dịch chuyển một đĩa, một đĩa có thể dịch chuyển từ một cọc này sang một cọc khác bất kỳ, nhưng không được để một chiếc đĩa lên trên một đĩa khác có đường kính nhỏ hơn. Ngày tận thế sẽ đến khi tất cả các đĩa được chuyển sang một cái cọc khác.

Hướng dẫn:

Giả sử H_n là số lần dịch chuyển cần thiết để giải bài toán Tháp Hà Nội có n đĩa. Hãy lập hệ thức truy hồi đối với dãy$\{H_n\}$.

Thoạt đầu n đĩa trên cọc A. Chúng ta có thể dịch chuyển n-1 đĩa trên sang cọc C, theo quy tắc đã nêu trên và phải dùng H_{n-1} lần dịch chuyển và chiếc đĩa lớn nhất được giữ cố định trong khi dịch chuyển (n-1) đĩa bé ở trên. Tiếp theo ta chuyển chiếc đĩa lớn nhất này bằng một lần dịch chuyển từ cọc A sang cọc B. Cuối cùng ta mất H_{n-1} lần dịch chuyển (n-1) chiếc đĩa từ cọc C sang cọc B và đặt lên trên chiếc đĩa lớn nhất vẫn được giữ cố định khi dịch chuyển (n-1) đĩa bé. Do vậy, ta có hệ thức truy hồi:

$H_n = 2.\ H_{n-1} +1$

Điều kiện đầu $H_1 = 1$, vì chỉ cần một lần dịch chuyển một đĩa ở cọc A sang cọc B theo đúng quy tắc của cuộc chơi.

Dùng phương pháp lặp để giải hệ thức truy hồi này, ta nhận thấy:

$H_n = 2.\ H_{n-1} + 1$

$= 2(2.\ H_{n-2} + 1) + 1 = 2^2.\ H_{n-2} + 2 + 1$

$= 2^2 (2.\ H_{n-3} + 1) + 2 + 1 = 2^3.\ H_{n-3} + 2^2 + 2 + 1$

$= \ldots.. = 2^{n-1}.\ H_1 + 2^{n-2} + \ldots + 2 + 1$

$= 2^n - 1.$

Đẳng thức cuối cùng thay $H_1 = 1$ và áp dụng công thức tổng các số hạng của cấp số nhân.

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} ar^k = ar^0 + ar^1 + ar^2 + ar^3 + \cdots + ar^n = \frac{a(1 - r^{n+1})}{1 - r}$$

1.5.2. Giải hệ thức truy hồi tuyến tính thuần nhất hệ số hằng

Các hệ thức truy hồi khác nhau có thể giải bằng nhiều cách khác nhau. Một số có thể giải bằng cách lặp như trong ví dụ trên, một số khác có thể giải bằng những kỹ thuật đặc biệt. Dưới đây chúng ta sẽ đề cập tới một phương pháp giải cho một lớp các hệ thức truy hồi tuyến tính thuần nhất hệ số hằng.

Hệ thức truy hồi tuyến tính thuần nhất

Hệ thức truy hồi tuyến tính thuần nhất có dạng:

$F_n = c_1. F_{n-1} + c_2. F_{n-2} + ... + c_k. F_{n-k}$

Với $c_1, c_2, ..., c_k$ là các số thực và $c_k \neq 0$,

Ta có phương trình đặc trưng của hệ thức là:

$x^k - c_1. x^{k-1} - \dots - c_k = 0$

Định lý 1.1

Cho công thức truy hồi có dạng:

$F_n = c_1. F_{n-1} + c_2. F_{n-2}$ có phương trình đặc trưng sau: $x^2 - c_1x - c_2 = 0$

Phương trình có hai nghiệm thực phân biệt x_1, x_2 khi đó công thức truy hồi có thể biểu diễn dưới dạng $F_n = p_1. x_1^n + p_2. x_2^n$ trong đó p_1, p_2 là hằng số được xác định từ điều kiện đầu.

Ví dụ 1.77

Một cặp thỏ mới sinh (một con đực và một con cái) được thả lên một hòn đảo. Giả sử rằng mỗi cặp thỏ không có khả năng sinh sản được trước khi chúng đầy 2 tháng tuổi. Từ khi đầy 2 tháng tuổi mỗi tháng chúng sẽ đẻ được một đôi thỏ con. Tìm công thức truy hồi tính số cặp thỏ trên đảo sau n tháng, nếu coi các con thỏ là trường thọ.

Hướng dẫn:

Giả sử F_n là số cặp thỏ sau n tháng.

Vì tháng đầu tiên, cặp thỏ chưa có khả năng sinh sản, do đó $F_1 = 1$

Tương tự, tháng thứ hai, cặp thỏ vẫn chưa có khả năng sinh sản nên $F_2 = 1$.

Cuối tháng thứ 3, đôi thỏ đã đến tuổi sinh nên $F_3 = 2$, tiếp tục như vậy $F_4 = 3$.

Vậy ta có công thức: $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$

Phương trình đặc trưng: $x^2 - x - 1 = 0$.

Phương trình này có 2 nghiệm: $x_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ và $x_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$.

Do đó: $F_n = p_1. x_1^n + p_2. x_2^n = p_1. (\frac{1+\sqrt{5}}{2})^n + p_2. (\frac{1-\sqrt{5}}{2})^n$

Vì $F_1 = 1$ nên $p_1. (\frac{1+\sqrt{5}}{2}) + p_2. (\frac{1-\sqrt{5}}{2}) = 1$ (a)

Vì $F_2 = 1$ nên $p_1. (\frac{1+\sqrt{5}}{2})^2 + p_2. (\frac{1-\sqrt{5}}{2})^2 = 1$ (b)

Giải hệ phương trình (a) và (b) ta có: $p_1 = -\frac{1}{\sqrt{5}}$ và $p_2 = \frac{1}{\sqrt{5}}$

Thay p_1 và p_2 vào công thức tính F_n, ta có:

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}} (\frac{1+\sqrt{5}}{2})^n - \frac{1}{\sqrt{5}} (\frac{1-\sqrt{5}}{2})^n$$

Định lý 1.2
Công thức truy hồi $F_n = c_1. F_{n-1} + c_2. F_{n-2}$ có phương trình đặc trưng sau: $x^2 - c_1x - c_2 = 0$. Phương trình có nghiệm kép: $x_1 = x_2 = \alpha$, khi đó công thức truy hồi được viết như sau: $F_n = p_1. \alpha^n + p_2. \alpha^n$, trong đó p_1, p_2 là hằng số được xác định từ điều kiện đầu.

Định lý 1.3
Nếu có công thức truy hồi: $F_n = c1. F_{n-1} + c_2. F_{n-2} + ... + c_k. F_{n-k}$ có phương trình đặc trưng: $x^k - c_1. x^{k-1} - c_2. x^{k-2} - .... - c_k = 0$. Phương trình có k nghiệm phân biệt $\alpha_1 \neq \alpha_2 \neq ... \neq \alpha_k$. Khi đó công thức truy hồi có thể viết: $F_n = p_1. \alpha_1^n + p_2. \alpha_2^n + ...+ p_k. \alpha_k^n$, trong đó $p_1, p_2, ..., p_k$ là các hằng số được xác định từ điều kiện đầu.

Lưu ý: Nếu phương trình đặc trưng có k nghiệm thực và có 1 nghiệm kép thì có thể viết công thức dưới dạng sau:

$$F_n = p_1. \alpha_1^n + ... + p_i . \alpha_i^n + p_{i+1}. \alpha_i^n ....+ p_k. \alpha_k^n$$

1.6. QUAN HỆ

1.6.1. Khái niệm quan hệ hai ngôi

Cách trực tiếp để thể hiện mối quan hệ giữa các yếu tố của hai bộ là sử dụng các cặp có thứ tự gồm 2 yếu tố liên quan. Vì thế, tập hợp các cặp theo thứ tự được gọi là quan hệ hai ngôi. Nội dung của phần này sử dụng các các mối quan hệ để giải quyết các bài toán liên quan đến mạng truyền thống, lập kế hoạch dự án và xác định các yếu tố trong các bộ có cùng tính chất.

1.6.1.1. Khái niệm

Định nghĩa 1.25
Tích Descartes: Cho hai tập hợp A và B tùy ý khác rỗng. Ta gọi tích Descartes của hai tập hợp A và B, kí hiệu A x B là tập hợp các cặp sắp thứ tự (a, b) trong đó $a \in A$, $b \in B$: $A \times B = \{(a, b) \mid a \in A \cap b \in B\}$

Ví dụ 1.78

Cho A = {1, 2, 3}, B = {x , y}. Xác định tích Descartes của A và B?

Hướng dẫn:

A x B = {(1, x), (1, y), (2, x), (2, y), (3, x), (3, y)}

Nhận xét:

- Ta có A x B ≠ B x A
- Ta quy ước A x ϕ = ϕ x A = ϕ
- Nếu B = A thì ta có thể viết A x A = A^2
- Nếu A có n phần tử, B có m phần tử thì tích Descartes của A và B có m x n phần tử.

Định nghĩa 1.26
Xét A, B là hai tập hợp. Quan hệ hai ngôi từ A đến B là tập con của tích Descartes $A \times B$

Nói cách khác, quan hệ hai ngôi từ tập A đến tập B là tập hợp R gồm các cặp được sắp thứ tự, trong đó thành phần đầu tiên của mỗi cặp thuộc tập A và thành phần thứ hai thuộc B. Sử dụng ký hiệu aRb để biểu thị cặp (a,b) $\in R$ và ta có thể khẳng định a quan hệ với b bởi R và ký hiệu $a\bar{R}b$ để biểu thị cặp (a, b) $\notin R$.

Ví dụ 1.79

Xét A là tập hợp các sinh viên của Trường Đại học Công nghệ GTVT, B là tập hợp các khóa học. R là quan hệ của các cặp (a, b), trong đó a là sinh viên đăng ký khóa học b. Chẳng hạn, nếu An và Bình là các sinh viên đăng ký khóa học CS158 thì các cặp (An, CS158) và (Bình, CS158) thuộc R.

Nếu An cũng đăng ký vào khóa học CS160, thì cặp (An, CS160) thuộc R. Nếu Bình không đăng ký vào khóa học CS160 thì cặp (Bình, CS160) không thuộc R.

Lưu ý, nếu một sinh viên không đăng ký vào bất kỳ khóa học nào, thì trong các phần tử thuộc R sẽ không có cặp nào có thành phần đầu tiên là sinh viên này, tương tự như vậy nếu một khóa học không được đăng ký thì sẽ trong các phần tử thuộc R sẽ không có cặp nào có thành phần thứ hai chứa khóa học này.

1.6.1.2. Biểu diễn quan hệ

a. Biểu diễn bằng ma trận

Định nghĩa 1.27
Cho R là quan hệ từ A = {a_1, a_2, …, a_m} đến B = {b_1, b_2, … , b_n}. Ma trận biểu diễn của R là ma trận cấp m x n: $M_R = [m_{i\,j}]$ xác định bởi: $m_{i\,j} = \begin{cases} 1 \text{ nếu } (ai, bj\ ) \in R \\ 0 \text{ nếu } (ai, bj) \notin R \end{cases}$

Ví dụ 1.80

Cho R là quan hệ từ A = {1, 2, 3, 4} đến B = {u, v, w} được xác định:

R = {(1, u), (1, v), (2, w), (3, w), (4, u)}

Xác định ma trận biểu diễn quan hệ R?

Hướng dẫn:

Đây là ma trận cấp 4 x 3 biểu diễn cho quan hệ R

$$\begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} u & v & w \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

Ví dụ 1.81

Cho R là quan hệ từ A = {a, b, c} đến B = {s, t, u, v} có ma trận biểu diễn:

$$\begin{array}{c} \\ a \\ b \\ c \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} s & t & u & v \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

Xác định các phần tử của quan hệ R?

Hướng dẫn:

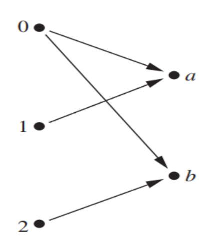
Dựa vào ma trận biểu diễn của quan hệ R, dễ dàng xác định được quan hệ R gồm các cặp: (a, s), (a, v), (b, v), (c, t), (c, u), (c, v).

b. Biểu diễn quan hệ bằng đồ thị

Ví dụ 1.82

Xét tập A = {0, 1, 2} và B = {a, b}. Khi đó {(0, a), (0, b), (1, a), (2, b)} là các bộ của quan hệ R từ tập A đến tập B.

Điều này có nghĩa $1\ R\ a$ nhưng $1\ \overline{R}\ b$. Mối quan hệ R được thể hiện bằng đồ thị trong hình 1.12 dưới đây, dấu mũi tên được sử dụng để biểu diễn các cặp theo thứ tự. Một cách khác quan hệ R được thể hiện qua bảng.



Hình 1.12: Đồ thị biểu diễn mối quan hệ R.

Bảng 1.3: Thể hiện mối quan hệ R trong Ví dụ 1.82

R	a	b
0	x	x
1	x	
2		x

Định nghĩa 1.28

Quan hệ trên một tập hợp

Quan hệ trên tập hợp A là quan hệ từ tập A đến tập A. Nói cách khác, quan hệ trên tập hợp A là tập con của tích Descartes $A \times A$

Ví dụ 1.83

Quan hệ "=" trên tập A bất kỳ: aRb $\Leftrightarrow$ a = b

Ví dụ 1.84

Quan hệ "≤" trên tập Z, Q hay R: aRb $\Leftrightarrow$ a ≤ b

Ví dụ 1.85

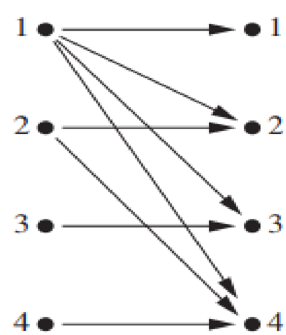
Cho tập A = {1, 2, 3, 4}.

Liệt kê các phần tử của quan hệ R ={(a, b)| a, b ∈ A và b chia hết cho a.

Hướng dẫn:

(a, b) ∈ R khi và chỉ khi a, b thuộc A; a, b là những số nguyên dương có giá trị nhỏ hơn hoặc bằng 4 và b chia hết cho a, do đó:

R = {(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (2, 2), (2, 4), (3, 3), (4,4)}



Hình 1.13: Đồ thị thể hiện quan hệ R của Ví dụ 1.85.

Bảng 1.4: Thể hiện quan hệ R của Ví dụ 1.85

R	*1*	*2*	*3*	*4*
1	x	x	x	x
2		x		x
3			x	
4				x

1.6.1.3. Tính chất của quan hệ

Định nghĩa 1.29

Quan hệ R trên tập A được gọi là phản xạ nếu (a, a) $\in R$ với mọi phần tử a $\in A$.

Ví dụ 1.86

Nếu A ={a, b, c, d} và R = {(a, a), (b, b), (c, c), (d, d)}. Chứng minh R có tính chất phản xạ?

Hướng dẫn:

Với a $\in A$, (a, a) $\in R$;

Với b $\in A$, (b, b) $\in R$;

Với c $\in A$, (c, c) $\in R$;

Với d $\in A$, (d, d) $\in R$;

Do đó với $\forall x \in A$ ta luôn có (x, x) $\in R$.

R có tính chất phản xạ.

Ví dụ 1.87

Xem xét các quan hệ sau đây trên tập A = {1, 2, 3, 4}:

R_1 ={(1, 1), (1, 2), (2, 1), (2, 2), (3, 4), (4, 1), (4, 4)};

R_2 = {(1, 1), (1, 2), (2, 1)};

R_3 = {(1, 1), (1, 2), (1, 4), (2, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 1), (4, 4)};

R_4 = {(2, 1), (3, 1), (3, 2), (4, 1), (4, 2), (4, 3)};

R_5 = {(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (2, 2), (2, 3), (2, 4), (3, 3), (3, 4), (4, 4)};

R_6 = {(3, 4).

Những quan hệ nào là quan hệ phản xạ?

Hướng dẫn:

R_3, R_5 là phản xạ vì R_3 và R_5 chứa các cặp có dạng (a, a) với a $\in A$, cụ thể các cặp (1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4) đều thuộc R_3, R_5.

Các quan hệ còn lại R_1, R_2, R_4, R_6 không phản xạ vì không chứa tất cả các cặp có dạng (a, a) với a $\in A = \{1,\ 2,\ 3,\ 4\}$. Trong các quan hệ R_1, R_2, R_4, R_6 đều không chứa bộ (3, 3).

Ví dụ 1.88

Xem xét các quan hệ sau trên tập số nguyên:

$R_1 = \{(a, b) \mid a \leq b\}$

$R_2 = \{(a, b) \mid a > b\}$

$R_3 = \{(a, b) \mid a = b \text{ or } a = -b\}$

$R_4 = \{(a, b) \mid a = b\}$

$R_5 = \{(a, b) \mid a = b + 1\}$

$R_6 = \{(a, b) \mid a + b \leq 3\}$

a. Trong các quan hệ trên, quan hệ nào chứa các cặp (1, 1), (1, 2), (2, 1), (1, −1) và (2, 2)?

b. Quan hệ nào có tính chất phản xạ?

Hướng dẫn:

a. R_1, R_2, R_3, R_4, R_5, R_6 là các quan hệ trên tập số nguyên. Dựa vào mối quan hệ giữa các thành phần của các phần tử trong các quan hệ ta thấy rằng:

Cặp (1, 1) thuộc quan hệ R_1, R_3, R_4, R_6

Cặp (1, 2) thuộc quan hệ R_1 và R_6

Cặp (2, 1) thuộc quan hệ R_2, R_5 và R_6

Cặp (1, -1) thuộc quan hệ R_2, R_3, R_6

Cặp (2, 2) thuộc quan hệ R_1, R_3, R_4

b. Quan hệ phản xạ?

$R_1 = \{(a, b) \mid a \leq b\}$

R_1 có tính chất phản xạ vì với $\forall a \in Z$, ta luôn có $a \leq a$ nên $(a, a) \in R_1$.

$R_2 = \{(a, b) \mid a > b\}$

R_2 không có tính phản xạ vì với $\forall a \in Z$, ta không có a > a nên $(a, a) \not\subset R_2$.

$R_3 = \{(a, b) \mid a = b \text{ or } a = -b\}$

R_3 có tính chất phản xạ vì với $\forall a \in Z$ ta luôn có a = a nên $(a, a) \in R_3$.

$R_4 = \{(a, b) \mid a = b\}$

R_4 có tính chất phản xạ vì với $\forall a \in Z$ ta luôn có a = a nên (a, a) ∈ R_4.

R_5 = {(a, b) | a = b + 1}

R_5 không có tính chất phản xạ vì với $\forall a \in Z$, ta luôn có $a \neq a + 1$ nên (a, a) ⊄ R_5.

R_6 = {(a, b) | a + b ≤ 3}

R_6 không có tính chất phản xạ vì với $\forall a \in Z$ và $a \geq 2$, thì a + a > 3 nên (a, a) ⊄ R_6.

Ví dụ 1.89

Quan hệ chia hết R = {(a, b)| a, b ∈ N^*, $a ⋮ b$} có phải là quan hệ phản xạ?

Hướng dẫn:

Quan hệ chia hết R = {(a, b), a, b là các số tự nhiên lớn hơn 0, a chia hết cho b}là quan hệ có tính chất phản xạ: với $\forall a \in N$, ta luôn có (a, a) ∈ R vì $a ⋮ a$.

Lưu ý: nếu xét quan hệ R trên tập các số nguyên Z, R không phải quan hệ có tính chất phản xạ, vì cặp (0, 0) ⊄ R.

Định nghĩa 1.30
Quan hệ R xét trên tập A có tính đối xứng nếu có (a, b) ∈ R thì (b, a) ∈ R với mọi a, $b \in A$.
Định nghĩa 1.31
Quan hệ R xét trên tập A có tính phản xứng nếu với mọi a, $b \in A$ nếu có (a, b) ∈ R và (b, a) ∈ R thì a = b.

Lưu ý:

Sử dụng logic vị từ, định lượng ta biểu diễn cho tính chất đối xứng và tính phản xứng như sau:

Quan hệ R xét trên tập A có tính chất đối xứng nếu $\forall a \forall b((a,\ b) \in R \rightarrow (b, a) \in R)$.

Quan hệ R xét trên tập a có tính chất phản xứng nếu $\forall a \forall b((a,\ b) \in R \wedge (b,\ a) \in R \rightarrow (a = b))$

Ví dụ 1.90

Xem xét các quan hệ sau đây trên tập A = {1, 2, 3, 4}:

R_1 ={(1, 1), (1, 2), (2, 1), (2, 2), (3, 4), (4, 1), (4, 4)}

R_2 = {(1, 1), (1, 2), (2, 1)}

R_3 = {(1, 1), (1, 2), (1, 4), (2, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 1), (4, 4)}

R_4 = {(2, 1), (3, 1), (3, 2), (4, 1), (4, 2), (4, 3)}

R_5 = {(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (2, 2), (2, 3), (2, 4), (3, 3), (3, 4), (4, 4)}

R_6 = {(3, 4).

Quan hệ nào là quan hệ đối xứng? phản xứng?

R_1 ={(1, 1), (1, 2), (2, 1), (2, 2), (3, 4), (4, 1), (4, 4)}

R_1 không có tính chất đối xứng vì (3, 4) ∈ R nhưng (4, 3) ⊄ R

R_1 không có tính chất phản xứng, vì (1, 2) ∈ R và (2, 1) ∈ R nhưng 1 ≠ 2.

R_2 = {(1, 1), (1, 2), (2, 1)}

R_2 có tính chất đối xứng, vì nếu (a, b) ∈ R thì (b, a) ∈ R.

R_2 không có tính chất phản xứng, vì (1, 2) ∈ R và (2, 1) ∈ R nhưng 1 ≠ 2.

R_3 = {(1, 1), (1, 2), (1, 4), (2, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 1), (4, 4)};

R_3 có tính chất đối xứng, vì nếu (a, b) ∈ R thì (b, a) ∈ R.

(1, 2) ∈ R, (2, 1) ∈ R;

(1, 4) ∈ R, (4, 1) ∈ R;

(1, 1), (2, 2) , (3, 3), (4, 4) ∈ R;

R_3 không có tính phản xứng, chẳng hạn (1, 2) ∈ R và (2, 1) ∈ R nhưng 1 ≠ 2.

R_4 = {(2, 1), (3, 1), (3, 2), (4, 1), (4, 2), (4, 3)};

R_5 = {(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (2, 2), (2, 3), (2, 4), (3, 3), (3, 4), (4, 4)};

R_6 = {(3, 4)};

R_4 không có tính chất đối xứng, vì (2, 1) ∈ R nhưng (1, 2) ⊄ R.

R_5 không có tính chất đối xứng, chẳng hạn (1, 2) ∈ R nhưng (2, 1) ⊄ R.

R_6 không có tính chất đối xứng, vì (3, 4) ∈ R nhưng (4, 3) ⊄ R.

R_4, R_5, R_6 có tính chất phản xứng vì trong R_4, R_5, R_6 chỉ tồn tại các cặp (a, b) mà không tồn tại cặp (b, a) với a ≠ b.

Lưu ý:

Để kiểm tra tính phản xứng của 1 quan hệ, tìm các cặp (a, b) ∈ R và (b, a) ∈ R thì phải suy ra a = b.

Ví dụ 1.91

Xem xét các quan hệ sau trên tập số nguyên:

$R_1 = \{(a, b) \mid a \leq b\}$

$R_2 = \{(a, b) \mid a > b\}$

$R_3 = \{(a, b) \mid a = b \text{ or } a = -b\}$

$R_4 = \{(a, b) \mid a = b\}$

$R_5 = \{(a, b) \mid a = b + 1\}$

$R_6 = \{(a, b) \mid a + b \leq 3\}$

Quan hệ nào có tính chất đối xứng? phản xứng?

Hướng dẫn:

Xét quan hệ $R_1 = \{(a, b) \mid a \leq b\}$

R_1 không có tính chất đối xứng, chẳng hạn $(1, 2) \in R_1$ vì $1 \leq 2$, nhưng $(2, 1) \not\subset R1$ vì $2 \nleq 1$.

R_1 có tính chất phản xứng, vì $\forall a, b \in R_1$ nếu ta có $a \leq b$ và $b \leq a$ thì a = b.

Xét quan hệ $R_2 = \{(a, b) \mid a > b\}$

R_2 không có tính chất đối xứng vì nếu có cặp $(a, b) \in R_2$ thì a > b, rõ ràng không tồn tại cặp $(b, a) \in R_2$ (vì $b \ngtr a$).

R_2 có tính chất phản xứng, rõ ràng R_2 chỉ chứa các cặp có dạng (a, b) (với a > b), nhưng không chứa cặp (b, a). (Tính chất phản xứng chỉ ra rằng nếu R chứa đồng thời 2 cặp (a, b) và (b, a) thì a = b).

Xét quan hệ $R_3 = \{(a, b) \mid a = b \text{ or } a = -b\}$

R_3 có tính chất đối xứng, vì nếu có cặp $(a, b) \in R_3$: ta có a = b hoặc a = -b, do đó ta cũng có b = a hoặc b = -a, hay cặp $(b, a) \in R_3$.

R_3 không có tính chất phản xứng, vì nếu đồng thời có các cặp $(a, b) \in R_3$ và $(b, a) \in R_3$, ta chỉ suy ra a = |b| mà không thể suy ra a = b.

Xét quan hệ $R_4 = \{(a, b) \mid a = b\}$

R_4 có tính chất đối xứng, nếu có cặp $(a, b) \in R_4$ thì a = b, rõ ràng b = a, hay cặp $(b, a) \in R_4$.

R_4 có tính chất phản xứng vì nếu có đồng thời các cặp $(a, b) \in R_4$ và $(b, a) \in R_4$ thì ta sẽ có a = b (do a = b và b = a).

Xét quan hệ $R_5 = \{(a, b) \mid a = b + 1\}$

R_5 không có tính chất đối xứng, vì nếu $(a, b) \in R_5$ ta có a = b + 1, hay b = a – 1 $\neq$ a + 1 (với $a, b \in Z$), do đó cặp $(b, a) \not\subset R_5$.

R_5 có tính chất phản xứng, vì rõ ràng R_5 chỉ chứa các cặp (a, b) thỏa mãn a = b + 1, mà không chứa các cặp (b, a) (vì b = a - 1≠ a + 1). (Tính chất phản xứng chỉ ra rằng nếu R chứa đồng thời 2 cặp (a, b) và (b, a) thì a = b).

Xét quan hệ $R_6 = \{(a, b)| a + b \leq 3\}$

R_6 có tính chất đối xứng, vì nếu có cặp (a, b) ∈ R_6 thì a + b ≤ 3**,** rõ ràng b + a ≤ 3 với a, b ∈ Z. Do đó cặp (b, a) ∈ R_6.

R_6 không có tính chất phản xứng, nếu có cặp (a, b) ∈ R_6 và (b, a) ∈ R_6 thì chỉ suy ra được a + b ≤ 3 và b + a ≤ 3 mà không thể suy ra được a = b.

Ví dụ 1.92

Quan hệ chia hết R = {(a, b)| a, b ∈ N^*, $a \vdots b$} có phải là quan hệ có tính chất đối xứng? có tính chất phản xứng?

Hướng dẫn:

Quan hệ R không có tính đối xứng, chẳng hạn (2, 1) ∈ R (Vì 2 ⋮ 1), nhưng (1, 2) $\not\subset R$ vì 1 không chia hết cho 2.

Quan hệ R có tính phản xứng, vì a, b là các số nguyên dương, nếu có (a, b) ∈ R và (b, a) ∈ R thì a ⋮ b và $b \vdots a$

Vì $a \vdots b$, đặt a = k. b (k ∈ N^*)

Vì $b \vdots a$, đặt b = t. a (t ∈ N^*)

Do đó, a = k. t. a, rút gọn 2 vế cho a, ta được k. t = 1.

Vì k và t ∈ N^*, nên k = t = 1.

Từ đó, suy ra a = b.

Định nghĩa 1.32
Quan hệ R xét trên tập A có tính bắc cầu nếu với mọi $a, b, c \in A$ nếu có (a, b) ∈ R và (b, c) ∈ R thì (a, c) ∈ R.

Lưu ý:

Sử dụng logic vị từ, định lượng ta biểu diễn cho tính chất bắc cầu như sau:

Quan hệ R xét trên tập A có tính chất bắc cầu nếu $\forall a \forall b \forall c(((a, b) \in R \wedge (b, c) \in R) \rightarrow (a, c) \in R)$

Ví dụ 1.93

Xem xét các quan hệ sau đây trên tập A = {1, 2, 3, 4}:

R_1 ={(1, 1), (1, 2), (2, 1), (2, 2), (3, 4), (4, 1), (4, 4)}

R_2 = {(1, 1), (1, 2), (2, 1)}

R_3 = {(1, 1), (1, 2), (1, 4), (2, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 1), (4, 4)}

R_4 = {(2, 1), (3, 1), (3, 2), (4, 1), (4, 2), (4, 3)}

R_5 = {(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (2, 2), (2, 3), (2, 4), (3, 3), (3, 4), (4, 4)}

R_6 = {(3, 4).

Quan hệ nào là có tính chất bắc cầu?

Hướng dẫn:

Xét quan hệ R_1 = {(1, 1), (1, 2), (2, 1), (2, 2), (3, 4), (4, 1), (4, 4)}

R_1 không có tính chất bắc cầu, vì có (3, 4) ∈ R_1, (4, 1) ∈ R_1 nhưng (3, 1) ⊄ R_1.

Xét quan hệ R_2 = {(1, 1), (1, 2), (2, 1)}

R_2 không có tính chất bắc cầu, vì có (2, 1) ∈ R_2, (1, 2) ∈ R_2 nhưng (2, 2) ⊄ R_2.

Xét quan hệ R_3 = {(1, 1), (1, 2), (1, 4), (2, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 1), (4, 4)}

R_3 không có tính chất bắc cầu, vì có (4, 1) ∈ R_3, (1, 2) ∈ R_3 nhưng (4, 2) ⊄ R_3.

Xét quan hệ R_4 = {(2, 1), (3, 1), (3, 2), (4, 1), (4, 2), (4, 3)}

R_4 có tính chất bắc cầu, để chỉ ra quan hệ R_4 có tính chất bắc cầu, ta chỉ ra rằng nếu có (a, b) ∈ R_4 và (b, c) ∈ R_4 thì (a, c) ∈ R_4 với mọi $a, b, c \in A$.

Thật vậy, ta có (3, 2) ∈ R_4, (2, 1) ∈ R_4 và cũng có (3, 1) ∈ R_4

Có (4, 2) ∈ R_4, (2, 1) ∈ R_4 và cũng có (4, 1) ∈ R_4

Có (4, 3) ∈ R_4, (3, 2) ∈ R_4 và cũng có (4, 2) ∈ R_4

Xét quan hệ R_5 = {(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (2, 2), (2, 3), (2, 4), (3, 3), (3, 4), (4, 4)}

R_5 có tính chất bắc cầu vì:

Có (1, 1) ∈ R_5, (1, 2) ∈ R_5 và cũng có (1, 2) ∈ R_5

Có (1, 1) ∈ R_5, (1, 3) ∈ R_5 và cũng có (1, 3) ∈ R_5

Có (1, 1) ∈ R_5, (1, 4) ∈ R_5 và cũng có (1, 4) ∈ R_5

Có (1, 2) ∈ R_5, (2, 2) ∈ R_5 và cũng có (1, 2) ∈ R_5

Có (1, 2) ∈ R_5, (2, 3) ∈ R_5 và cũng có (1, 3) ∈ R_5

Có (1, 2) ∈ R_5, (2, 4) ∈ R_5 và cũng có (1, 4) ∈ R_5

Có (1, 3) ∈ R_5, (3, 3) ∈ R_5 và cũng có (1, 3) ∈ R_5

Có (1, 3) ∈ R_5, (3, 4) ∈ R_5 và cũng có (1, 4) ∈ R_5

Có (1, 4) ∈ R_5, (4, 4) ∈ R_5 và cũng có (1, 4) ∈ R_5

Có (2, 2) ∈ R_5, (2, 3) ∈ R_5 và cũng có (2, 3) ∈ R_5

Có (2, 2) ∈ R_5, (2, 4) ∈ R_5 và cũng có (2, 4) ∈ R_5

Có (2, 3) ∈ R_5, (3, 3) ∈ R_5 và cũng có (2, 3) ∈ R_5

Có (2, 3) ∈ R_5, (3, 4) ∈ R_5 và cũng có (2, 4) ∈ R_5

Có (2, 4) ∈ R_5, (4, 4) ∈ R_5 và cũng có (2, 4) ∈ R_5

Có (3, 3) ∈ R_5, (3, 4) ∈ R_5 và cũng có (3, 4) ∈ R_5

Có (3, 4) ∈ R_5, (4, 4) ∈ R_5 và cũng có (3, 4) ∈ R_5

Xét quan hệ R_6 = {(3, 4)}

R_6 là quan hệ có tính chất bắc cầu (Tính chất bắc cầu chỉ ra rằng, nếu trong quan hệ R có các cặp (a, b) và (b, c) thì cũng phải có cặp (a, c). Trong trường hợp này R_6 chỉ có 1 cặp duy nhất (3, 4)).

Ví dụ 1.94

Xem xét các quan hệ sau trên tập số nguyên:

R_1 = {(a, b) | a $\leq b$}

R_2 = {(a, b) | a > b}

R_3 = {(a, b) | a = b or a = -b}

R_4 = {(a, b) | a = b}

R_5 = {(a, b) | a = b + 1}

R_6 = {(a, b) | a + b ≤ 3}

Quan hệ nào có tính chất bắc cầu?

Hướng dẫn:

Xét quan hệ R_1 = {(a, b) | a ≤ b}

R_1 có tính chất bắc cầu, vì với mọi a, b, c ∈ N: nếu có $a \leq b$ và $b \leq c$ thì ta có $a \leq c$ (Theo tính chất bắc cầu trong toán học).

Do đó nếu (a, b) ∈ R_1 và (b, c) ∈ R_1 thì (a, c) ∈ R_1.

Xét quan hệ R_2 = {(a, b) | a > b}

R_2 có tính chất bắc cầu, vì với mọi a, b, c ∈ N: nếu có $a > b$ và $b > c$ thì ta có $a > c$ (Theo tính chất bắc cầu trong toán học)

Do đó nếu (a, b) ∈ R_2 và (b, c) ∈ R_2 thì (a, c) ∈ R_2

Xét quan hệ $R_3 = \{(a, b) \mid a = b \text{ or } a = -b\}$

R_3 có tính chất bắc cầu, vì với mọi a, b, c ∈ N: nếu có $a = \pm b$ và $b = \pm c$ thì ta cũng có $a = \pm c$ (Dễ dàng suy ra, vì $a^2 = b^2$ và $b^2 = c^2$ do đó $a^2 = c^2$ hay $a = \pm c$).

Xét quan hệ $R_4 = \{(a, b) \mid a = b\}$

R_4 có tính chất bắc cầu, vì với mọi a, b, c ∈ N: nếu có a = b và có b = c thì cũng có a = c.

Xét quan hệ $R_5 = \{(a, b) \mid a = b + 1\}$

R_5 không có tính chất bắc cầu, vì với a, b, c ∈ N: nếu có a = b + 1 và b = c +1 thì a = c + 2 $\neq c + 1$.

Xét quan hệ $R_6 = \{(a, b) \mid a + b \leq 3\}$

R_6 không có quan hệ bắc cầu, chẳng hạn xét cặp (2, 1) ∈ R_6 và (1, 2) ∈ R_6 nhưng (2, 2) $\not\subset R_6$.

Ví dụ 1.95

Quan hệ chia hết R = {(a, b)| a, b ∈ N^*, $a \vdots b$} có phải là quan hệ có tính chất bắc cầu hay không?

Hướng dẫn:

Giả sử $a \vdots b$, đặt a = k. b (a, b, k ∈ N^*)

Giả sử $b \vdots c$, đặt b = t. c (b, c, t ∈ N^*)

Do đó, a = (k. t). c hay $a \vdots c$. Quan hệ R có tính chất bắc cầu.

1.6.2. Quan hệ tương đương

1.6.2.1. Định nghĩa về quan hệ tương đương

Xem xét một số ví dụ sau đây:

Ví dụ 1.96

Trong một số ngôn ngữ lập trình, tên các biến có thể chứa không giới hạn các ký tự. Tuy nhiên, khi biên dịch, trình biên dịch chỉ quan tâm đến một số lượng hữu hạn các ký tự để kiểm tra hai biến có bằng nhau hay không. Chẳng hạn, trong ngôn ngữ C, chỉ có 8 ký tự đầu tiên của tên biến được trình biên dịch kiểm tra (các ký tự này bao gồm chữ hoa, hoặc chữ thường, chữ số hoặc dấu gạch dưới). Do đó, trình biên dịch sẽ xem xét các chuỗi dài hơn 8 ký tự, chỉ giữ lại 8 ký tự đầu tiên của chuỗi. Đặt R là quan hệ xét trên tập hợp các chuỗi, sao cho sRt, trong đó s và t là 2 chuỗi, nếu s và t dài hơn 8 ký tự và 8 ký tự đầu tiên của s và t giống nhau, hoặc s = t. Dễ dàng thấy R phản xạ, đối xứng và bắc cầu.

Ví dụ 1.97

Hai số nguyên a, b có quan hệ với nhau bởi mối quan hệ *"đồng dư modulo 4"* khi a – b chia hết cho 4. Quan hệ này có tính chất phản xạ, đối xứng, bắc cầu. Không khó để nhận thấy a có liên quan đến b khi và chỉ khi a và b có cùng số dư khi chia cho 4.

Định nghĩa 1.33

Quan hệ R xét trên tập A là quan hệ tương đương nếu nó có tính phản xạ, đối xứng và bắc cầu.

Định nghĩa 1.34

Hai phần tử a, b có liên quan đến nhau trong một quan hệ được gọi là tương đương. Ký hiệu $a \sim b$, thường được sử dụng để biểu thị a, b là các phần tử tương đương trong một mối quan hệ tương đương cụ thể.

Ví dụ 1.98

Xét quan hệ R trên tập hợp các số nguyên, aRb khi và chỉ khi a = b hoặc a = -b. R có là quan hệ tương đương không?

Hướng dẫn:

R có tính chất phản xạ: $\forall a \in Z$ ta luôn có aRa (vì a = a)

R có tính chất đối xứng: $\forall a, b \in Z$ ta luôn có a = $\pm$b thì b = $\pm$a hay nếu có aRb thì cũng có bRa

R có tính chất bắc cầu: $\forall a, b, c \in Z$, ta luôn có a = $\pm$b và b =$\pm$ c thì a = $\pm$c, hay nếu có aRb và bRc thì cũng có aRc

Theo định nghĩa của quan hệ tương đương, R là quan hệ tương đương.

Ví dụ 1.99

Xét quan hệ R trên tập các số thực, aRb khi và chỉ khi a – b là một số nguyên. R có phải là quan hệ tương đương không?

Hướng dẫn:

R có tính phản xạ: $\forall a \in R$ ta luôn có a – a = 0 là một số nguyên. Do đó aRa.

R có tính đối xứng: $\forall a, b \in R$, nếu có aRb hay a – b là một số nguyên thì b – a = - (a – b) cũng là một số nguyên, do đó bRa.

R có tính bắc cầu: $\forall a, b, c \in R$, giả sử rằng aRb và bRc

Khi đó a – b = k (k $\in Z$), b – c = t (t $\in Z$)

(a – c) = (a – b) + (b – c) = k + t ∈ Z

Vậy aRc.

Quan hệ R thỏa mãn 3 tính chất phản xạ, đối xứng, bắc cầu. R là quan hệ tương đương.

Ví dụ 1.100

Cho m là số nguyên, m > 1. Chứng minh rằng quan hệ R = {(a, b)|$a \equiv b\ (mod\ m)$} là quan hệ tương đương xét trên tập số nguyên.

Hướng dẫn:

$a \equiv b\ (mod\ m)$ khi và chỉ khi (a – b) chia hết cho m.

+ Vì a – a = 0 chia hết cho m, do đó $a \equiv a\ (mod\ m)\ \forall a \in Z$ nên aRa. ⇒ R có tính chất phản xạ.

+ Giả sử ta có aRb, hay $a \equiv b\ (mod\ m)$ ⇒ (a – b) ⋮ m.

Đặt a – b = k. m với k ∈ Z

Ta có: b – a = - (a – b) = - k. m, nên (b – a) ⋮ m ⇒ $b \equiv a(mod\ m) \Rightarrow bRa$

⇒ R có tính chất đối xứng.

+ Giả sử ta có aRb và bRc, tức là $a \equiv b\ (mod\ m)$ và $b \equiv c\ (mod\ m)$

⇒ (a – b) ⋮ m và (b – c) ⋮ m.

Đặt (a – b) = k. m và (b – c) = t. m với k$, t$ ∈ Z

Ta có: (a – c) = (a – b) + (b – c) = k. m + t. m = (k + t). m

⇒ (a – c) ⋮ m ⇒ $a \equiv c\ (mod\ m)$ ⇒ aRc

⇒ R có tính chất bắc cầu

Vậy R có tính phản xạ, đối xứng, bắc cầu. R là quan hệ tương đương.

Ví dụ 1.101

Giả sử R là quan hệ xét trên tập các chuỗi ký tự tiếng Anh, sao cho aRb khi và chỉ khi l(a) = l(b), với l(x) là độ dài của xâu x. R có phải quan hệ tương đương không?

Hướng dẫn:

+ Tính phản xạ: Với a là chuỗi ký tự tiếng Anh, ta luôn có l(a) = l(a). Do đó aRa.

+ Tính đối xứng: Với a, b là các chuỗi ký tự tiếng Anh, giả sử rằng aRb, hay l(a) = l(b) ⇒ l(b) = l(a) ⇒ bRa.

+ Tính bắc cầu: Với a, b, c là các chuỗi ký tự tiếng Anh, giả rằng aRb và bRc $\Rightarrow$ l(a) = l(b) và l(b) = l(c). Do đó, l(a) = l(c) $\Rightarrow$ aRc.

Quan hệ R có 3 tính chất: phản xạ, đối xứng, bắc cầu. Do đó R là quan hệ tương đương.

Ví dụ 1.102

Cho n là số nguyên dương, S là tập các chuỗi. Giả sử rằng R_n là quan hệ trên S sao cho sR_nt khi và chỉ khi s = t, hoặc cả s và t đều dài hơn n ký tự và n ký tự đầu tiên của s và t giống nhau. Do vậy, những chuỗi có ít hơn n ký tự chỉ có quan hệ với chính nó, chuỗi s có nhiều hơn n ký tự có quan hệ với chuỗi t, khi và chỉ khi t cũng có nhiều hơn n ký tự và n ký tự đầu tiên của t giống n ký tự đầu tiên của s. Chẳng hạn, với n = 3, S là tập hợp tất cả các chuỗi bit. Do đó sR_3t khi và chỉ khi hoặc s = t hoặc cả s và t đều có độ dài lớn hơn 3 và 3 bit bắt đầu của s và t là giống nhau. Ví dụ, $01R_301$ hoặc $00111R_300101$, nhưng $01\bar{R}_3010$ hoặc $01000\bar{R}_310010$.

Chứng minh rằng với mọi tập các chuỗi S và mọi số nguyên dương n, R_n là quan hệ tương đương trên S.

Hướng dẫn:

Chứng minh, R_n thỏa mãn 3 tính chất phản xạ, đối xứng và bắc cầu.

Thật vậy, R_n thỏa mãn tính chất phản xạ: Với $\forall$ chuỗi s thuộc S, ta luôn có sR_ns vì s = s.

R_n thỏa mãn tính chất đối xứng: Với $\forall s, t \in S$.

Nếu có sR_nt, thì hoặc s = t, hoặc cả s và t đều có độ dài lớn hơn n ký tự và cả s và t đều có n ký tự đầu tiên giống hệt nhau. Điều đó đồng nghĩa hoặc t = s, hoặc cả t và s đều có độ dài lớn hơn n và đều có n ký tự đầu tiên giống hệt nhau. Do đó tR_ns.

R_n thỏa mãn tính chất bắc cầu: Với $\forall s, t, u \in S$.

Nếu có sR_nt và có tR_nu.

Vì sR_nt nên hoặc s = t hoặc s, t đều có độ dài lớn hơn n ký tự và cả s, t đều có n ký tự đầu tiên giống hệt nhau.

Vì tR_nu nên hoặc t = u hoặc t, u đều có độ dài lớn hơn n ký tự và cả t, u đều có n ký tự đầu tiên giống hệt nhau.

Xét hai trường hợp:

Trường hợp 1: s = t và t = u (trường hợp các chuỗi có độ dài bé hơn n), do đó s = u.

Trường hợp 2: s, t, u đều có độ dài lớn hơn n và có n ký tự đầu tiên giống nhau. Dễ dàng thấy s và u đều có độ dài lớn hơn n và n ký tự đầu tiên giống nhau.

Do đó, s = u hoặc s và u đều có độ dài lớn hơn n và n ký tự đầu tiên giống nhau. ⇒ sRu

Kết luận: R_n có 3 tính chất phản xạ, đối xứng và bắc cầu, do đó R_n là quan hệ tương đương.

Ví dụ 1.103

Chứng tỏ rằng quan hệ chia hết R = {(a, b)| a, b ∈ N, $a \vdots b$} không phải là quan hệ tương đương?

Hướng dẫn:

Cần chỉ ra R vi phạm một trong ba tính chất phản xạ, đối xứng hoặc bắc cầu.

Với $\forall a \in N$ ta luôn có $a \vdots a$, hay aRa ⇒ R có tính chất phản xạ

R không có tính đối xứng, chẳng hạn 4R2 (vì 4 ⋮ 2) nhưng $2\bar{R}4$ (Vì 2 không chia hết cho 4)

Với $\forall a, b, c \in N$, nếu có aRb và bRc, tức là $a \vdots b$ và $b \vdots c$, dễ dàng suy ra $a \vdots c$, hay aRc. R có tính chất bắc cầu.

Rõ ràng với quan hệ chia hết R, tính chất đối xứng bị vi phạm. Do đó, R không phải quan hệ tương đương.

Ví dụ 1.104

Quan hệ R xét trên tập số thực, sao cho xRy khi và chỉ khi x, y là các số thực có giá trị bé hơn 1 và |x –y| < 1. Chứng minh R không phải là quan hệ tương đương.

Hướng dẫn:

Cần chỉ ra R vi phạm một trong ba tính chất phản xạ, đối xứng hoặc bắc cầu. Để chỉ ra 1 tính chất nào đó bị vi phạm, chỉ cần đưa ra 1 bộ giá trị cụ thể.

Với $\forall x \in R$ ta luôn có |x – y| = 0 < 1⇒ xRx, hay R có tính phản xạ.

Với $\forall x, y \in N$, nếu có xRy ⇒ |x – y| < 1

Ta có |y – x| = |x –y| < 1. Do đó yRx, hay R có tính đối xứng.

R không có tính bắc cầu, chẳng hạn x = 2,8, y = 1,9 và z = 1,1, dễ dàng thấy |x –y| = 0,9 < 1, |y – z| = 0,8 < 1 nhưng |x –z| = 1,7 > 1.

Do đó, quan hệ R vi phạm tính chất bắc cầu. R không phải quan hệ tương đương.

1.6.2.2. Lớp tương đương

Định nghĩa 1.35
Cho R là quan hệ tương đương trên A và phần tử $a \in A$. Lớp tương đương chứa a, ký hiệu $[a]_R$ hoặc [a], là tập $[a]_R = \{b \in A \mid bRa\}$

Ví dụ 1.105

Xác định các lớp tương đương modulo 8 chứa 0 và 1?

Hướng dẫn:

$a \equiv b \ (mod\ m)$ khi và chỉ khi (a – b) chia hết cho m.

Do đó, lớp tương đương modulo 8 chứa 0 gồm tất cả các số nguyên (a – 0) chia hết cho 8. Do đó:

$[0]_8 = \{\ldots, -16, -8, 0, 8, 16, \ldots\}$

Tương tự, lớp modulo 8 chứa 1 gồm tất cả các số nguyên a sao cho (a – 1) chia hết cho 8. Do đó:

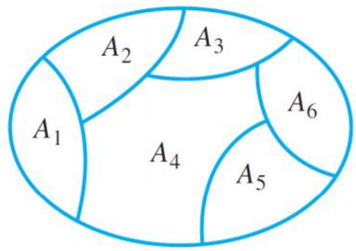
$[1]_8 = \{a \mid (a-1)$ chia 8 dư $1\} = \{\ldots, -15, -7, 1, 9, 17, \ldots\}$.

Lưu ý: Dựa vào biểu diễn các phần tử của các lớp tương đương ở trên, dễ dàng nhận thấy các lớp tương đương $[0]_8$ và $[1]_8$ là rời nhau.

Định lý 1.4.
Cho R là quan hệ tương đương trên tập A, các phần tử $a, b \in A$. Khi đó: - aRb nếu $[a]_R = [b]_R$ - $[a]_R \neq [b]_R$ nếu $[a]_R \cap [b]_R = \emptyset$

Các lớp tương đương theo một quan hệ tương đương trên A tạo nên một phân hoạch trên A, nghĩa là chúng chia tập A thành các tập con rời nhau.

Định nghĩa 1.36
Cho tập hợp A. Các tập con $\{A_1, A_2, A_3, \ldots, A_m\}$ là các phân hoạch của tập hợp A nếu thỏa mãn 2 điều kiện sau đây: $\bigcup_{i=1}^{m} A_i = A$ $A_i \cap A_j = \emptyset\ \forall i \neq j, i, j = \overline{1..m}$



Hình 1.14: Phân hoạch thành các tập tương đương.

Lưu ý:

Các tập con A_i của phân hoạch là một lớp tương đương. Hai phần tử của tập A là tương đương khi chúng cùng thuộc vào một lớp tương đương, nói cách khác chúng cùng thuộc vào một tập con của phân hoạch.

Ví dụ 1.106

Cho tập A = $\{x \mid x \in N \text{ và } x \leq 10\}$.

Tập A có thể phân hoạch thành 2 tập A_1 = {1, 3, 5, 7, 9} và A_2 ={2, 4, 6, 8, 10}.

Ví dụ 1.107

Xác định các tập trong phân hoạch của các số nguyên tạo bởi quan hệ đồng dư modulo 4?

Hướng dẫn:

Có 4 lớp đồng dư:

$[0]_4$ = {…, - 8, - 4, 0, 4, 8,…}

$[1]_4$ = {…, - 7, - 3, 1, 5, 9,…}

$[2]_4$ = {…, - 6, - 2, 2, 6, 10,…}

$[3]_4$ = {…, - 5, - 1, 3, 7, 11,…}

1.6.3. Quan hệ thứ tự

1.6.3.1. Định nghĩa

Định nghĩa 1.37
Quan hệ R xét trên tập A là quan hệ thứ tự nếu nó phản xạ, phản xứng và bắc cầu. Khi đó A là tập hợp có thứ tự. Tập hợp A cùng với quan hệ thứ tự R được gọi là tập thứ tự, hoặc poset *(partially ordered set)* và được ký hiệu (A, R). Các thành viên của R được gọi là các phần tử của poset.

Ví dụ 1.108

Chứng minh quan hệ *"lớn hơn hoặc bằng"* (≥) là quan hệ thứ tự trên tập số nguyên.

Hướng dẫn:

R có tính phản xạ: Vì a ≥ a với $\forall a \in Z$, do đó aRa;

R có tính phản xứng: Vì nếu có a ≥ b và b ≥ a thì a = b. Do đó nếu có aRb và bRa thì a = b;

R có tính bắc cầu: Vì nếu có a ≥ b và b ≥ c thì a ≥ c. Do đó nếu có aRb và bRc thì aRc.

R có 3 tính chất: phản xạ, phản xứng và bắc cầu. R là quan hệ thứ tự.

Ví dụ 1.109

Chứng minh quan hệ *chia hết* R = {(a, b)| a, b ∈ $Z +$, $a \vdots b$}là quan hệ thứ tự?

Hướng dẫn:

+ Với $\forall a \in Z +$, $a \vdots a \Rightarrow$ *R có tính phản xạ.*

+ Với $\forall a, b \in Z +$

Giả sử $a \vdots b$ và $b \vdots a$

Vì $a \vdots b$, đặt a = k. b với $k \in Z+, k \geq 1$ (1)

Vì $b \vdots a$, đặt b = t. a với $t \in Z+, t \geq 1$ (2)

Thay (2) vào (1) ta có a = k. t. a, rút gọn 2 vế cho a, ta có:

1 = k. t với $k, t \in Z+, k, t \geq 1$. Dấu bằng chỉ xảy ra khi k = t = 1.

Hay a = b ⇒ R có tính phản xứng.

+ Với $\forall a, b, c \in Z +$

Giả sử $a \vdots b$ và $b \vdots c$

Vì $a \vdots b$, đặt a = k. b với $k \in Z+, k \geq 1$ (3)

Vì $b \vdots c$, đặt b = t. c với $t \in Z+, t \geq 1$ (4)

Thay (4) vào (3), ta có a = k. t. c với $k, t \in Z+, k, t \geq 1$

Rõ ràng k. t ∈ $Z +$, hay $a \vdots c \Rightarrow$ R có tính bắc cầu

Vậy R có tính chất phản xạ, phản xứng, bắc cầu. R là quan hệ thứ tự. (Z+, ⋮) là 1 poset.

Định nghĩa 1.38

Cho tập hợp A. Quan hệ R xác định trên tập hợp A.

Ký hiệu $a \preccurlyeq$ b được sử dụng để biểu thị $(a, b) \in R$ là một vị trí tùy ý trong tập (A, R).

Ký hiệu $a \prec b$ biểu thị cho $a \preccurlyeq$ b nhưng $a \neq b$.

Định nghĩa 1.39

Các phần tử a và b của poset (A, $\prec$) gọi là so sánh được nếu $a \prec b$ hoặc $b \prec a$. Ngược lại, ta nói a và b không so sánh được.

Cho poset (A, $\prec$), nếu 2 phần tử bất kỳ của A đều so sánh được với nhau thì ta gọi là tập sắp thứ tự toàn phần.

Ví dụ 1.109

Quan hệ "≤" trên tập số nguyên dương là thứ tự toàn phần.

Quan hệ " ⋮ " (chia hết) trên tập số nguyên dương không là thứ tự toàn phần.

1.6.3.2. Biểu đồ Hasse

Mỗi Poset có thể biểu diễn bằng 1 đồ thị đặc biệt, gọi là biểu đồ Hasse.

Để định nghĩa biểu đồ Hasse chúng ta cần các khái niệm phần tử trội và trội trực tiếp.

Định nghĩa 1.40

Phần tử b của poset (A, $\prec$) được gọi là phần tử trội của phần tử a trong A nếu $a \prec b$.

Chúng ta cũng nói rằng a là được trội bởi b. Phần tử b được gọi là trội trực tiếp của a nếu b là trội của a và không tồn tại trội c sao cho:

$a \prec c \prec b$, với $a \neq b \neq c$.

Định nghĩa 1.41

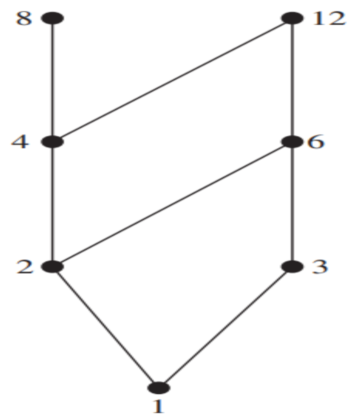
Ta định nghĩa biểu đồ Hasse của poset (A, $\prec$) là đồ thị:

- Mỗi một điểm của A được biểu diễn bởi một điểm trên mặt phẳng.
- Nếu b là trội trực tiếp của a thì vẽ 1 cung đi từ a đến b.

Ví dụ 1.110

Vẽ biểu đồ Hasse cho quan hệ thứ tự {(a, b)| b ⋮ a} trên tập {1, 2, 3, 4, 6, 8, 12}

Hướng dẫn:



Hình 1.15: Biểu đồ Hasse của Ví dụ 1.110.

CÂU HỎI VÀ BÀI TẬP CHƯƠNG 1

A. BÀI TẬP CÓ LỜI GIẢI

A1. Tập hợp

Bài tập 1.1

Với mọi tập A, B, C, chứng minh rằng:

$$(A\backslash B) \cup (C\backslash B) = (A \cup C)\backslash B$$

Hướng dẫn:

Chứng minh P = Q, ta chứng minh $P \subseteq Q$ và $Q \subseteq P$ (P là tập con của Q và Q là tập con của P)

Để chứng minh $P \subseteq Q$ ta chỉ ra rằng $\forall\, x \in P$ thì $x \in Q$

Chứng minh vế thứ nhất $(A\backslash B) \cup (C\backslash B) \subseteq (A \cup C)\backslash B$

Thật vậy, giả sử $x \in (A\backslash B) \cup (C\backslash B)$

$\Rightarrow x \in (A\backslash B)$ hoặc $x \in (C\backslash B)$

+ Nếu $x \in (A\backslash B)$ thì $x \in A$ và $x \notin B \Rightarrow x \in (A \cup C)$ và $x \notin B$

$\Rightarrow x \in (A \cup C)\backslash B$ (1)

+ Nếu $x \in (C\backslash B)$ thì $x \in C$ và $x \notin B \Rightarrow x \in (A \cup C)$ và $x \notin B$

$\Rightarrow x \in (A \cup C)\backslash B$ (2)

Từ (1) và (2): nếu $x \in (A\backslash B) \cup (C\backslash B)$ thì $x \in (A \cup C)\backslash B$ hay $(A\backslash B) \cup (C\backslash B) \subseteq (A \cup C)\backslash B$ (a)

Chứng minh vế thứ hai $(A \cup C)\backslash B \subseteq (A\backslash B) \cup (C\backslash B)$

Thật vậy, giả sử $x \in (A \cup C)\backslash B$

$\Rightarrow x \in (A \cup C)$ và $x \notin B$

Do $x \in (A \cup C)$ nên $x \in A$ hoặc $x \in C$

Nếu $x \in A$, kết hợp $x \notin B$ ta có $x \in (A\backslash B)$ (3)

Nếu $x \in C$, kết hợp $x \notin B$ ta có $x \in (C\backslash B)$ (4)

Từ (3) và (4), suy ra $x \in (A\backslash B) \cup (C\backslash B)$.

$\Rightarrow (A \cup C)\backslash B \subseteq (A\backslash B) \cup (C\backslash B)$ (b)

Từ (a) và (b), ta có $(A\backslash B) \cup (C\backslash B) \subseteq (A \cup C)\backslash B$ và $(A \cup C)\backslash B \subseteq (A\backslash B) \cup (C\backslash B)$

Suy ra: $(A\backslash B) \cup (C\backslash B) = (A \cup C)\backslash B$ (Đpcm)

Bài tập 1.2

Chứng minh rằng A\B $= A \cap B^c$

Hướng dẫn:

Chứng minh A\B $\subseteq A \cap B^c$

Giả sử $x \in$ A\B, suy ra $x \in$ A và $x \notin B$

$\Rightarrow x \in$ A và $x \in B^c \Rightarrow x \in (A \cap B^c)$

Như vậy, A\B $\subseteq A \cap B^c$ (1)

Chứng minh $(A \cap B^c) \subseteq$ (A\B)

Giả sử $x \in (A \cap B^c)$, suy ra $x \in$ A và $x \in B^c$

$\Rightarrow x \in$ A và $x \notin B$ nên $x \in$ A\B

Suy ra: $(A \cap B^c) \subseteq$ (A\B) (2)

Từ (1) và (2): A\B $= A \cap B^c$.

Bài tập 1.3

Cho các tập hợp A, B, C. Sử dụng các tính chất của tập hợp (các luật), chứng minh rằng:

$$(A \cup B)\backslash C = (A\backslash C) \cup (B\backslash C)$$

Hướng dẫn:

Biến đổi vế trái về vế phải.

Thật vậy:

$(A \cup B)\backslash C = (A \cup B) \cap C^c$ (Kết quả của bài 1.2)

$= C^c \cap (A \cup B)$ (Luật giao hoán)

$= (C^c \cap A) \cup ((C^c \cap B)$ (Luật phân phối)

$= (A \cap C^c) \cup ((B \cap C^c)$ (Luật giao hoán)

$= (A\backslash C) \cup (B\backslash C)$ (Kết quả của bài 1.2)

A2. Tổ hợp

Bài tập 1.4

Cho tập X = { x| $x \epsilon N$ và $x \leq 1000$}

Có bao nhiêu số nguyên dương thuộc tập X không chia hết cho cả 3 số 2, 3, 5?

Hướng dẫn:

Muốn xác định được số các số nguyên dương trong phạm vi từ 1 đến 1000 không chia hết cho 2, 3, 5, sử dụng nguyên lý bù trừ:

Bước 1: Xác định số lượng của tập hợp chứa phần tử chia hết cho 2, số lượng của tập hợp chứa các phần tử chia hết cho 3, số lượng của các phần tử chia hết cho 5.

Bước 2: Xác định số lượng các tập chứa phần tử vừa chia hết cho 2 và 3, vừa chia hết cho 2 và 5, vừa chia hết cho 3 và 5.

Bước 3: Xác định số lượng của tập hợp chứa các phần tử chia hết cả cho 2, 3 và 5.

Bước 4: Sử dụng nguyên lý bù trừ để xác định số lượng của tập hợp hoặc chia hết cho 2, hoặc chia hết cho 3, hoặc chia hết cho 5

Bước 5: Tập hợp những số không chia hết cho 2, 3, 5 là phần bù của tập xác định ở bước 4.

Đặt X_1, X_2, X_3 lần lượt là các tập hợp các số chia hết cho 2, 3, 5. Do đó, $\overline{X_1}$, $\overline{X_2}$, $\overline{X_3}$ lần lượt là các tập hợp không chia hết cho 2, 3 và 5.

X_1 là tập hợp các số chia hết cho 2: $N(X_1) = [\frac{1000}{2}] = 500$

X_2 là tập hợp các số chia hết cho 3: $N(X_2) = [\frac{1000}{3}] =333$

X_3 là tập hợp các số chia hết cho 5: $N(X_3) =[\frac{1000}{5}] = 200$

$X_1 \cap X_2$: là tập hợp các số vừa chia hết cho 2, vừa chia hết cho 3. Do đó $X_1 \cap X_2$ là tập hợp các số chia hết cho 6;

$N(X_1 \cap X_2) =[\frac{1000}{6}] = 166$

$X_1 \cap X_3$: là tập hợp các số vừa chia hết cho 2, vừa chia hết cho 5. Do đó $X_1 \cap X_3$ chia hết cho 10;

$N(X_1 \cap X_3) =[\frac{1000}{10}] = 100$

$X_2 \cap X_3$: là tập hợp các số vừa chia hết cho 3, vừa chia hết cho 5. Do đó $X_2 \cap X_3$ chia hết cho 15;

$N(X_2 \cap X_3) =[\frac{1000}{15}] = 66$

$X_1 \cap X_2 \cap X_3$: là tập hợp các số vừa chia hết cho 2, 3 và 5. Do đó $X_1 \cap X_2 \cap X_3$ chia hết cho 30;

N($X_1 \cap X_2 \cap X_3$) = [$\frac{1000}{30}$] = 33.

Theo công thức của nguyên lý bù trừ áp dụng cho 3 tập hợp:

$N(X_1 \cup X_2 \cup X_3)$ | = N(X_1) + N(X_2) + N(X_3) - N($X_1 \cap X_2$) – N($X_1 \cap X_3$) – N($X_2 \cap X_3$) + N($X_1 \cap X_2 \cap X_3$) = 500 + 333 + 200 – 166 – 100 – 66 + 33 = 734.

Tập hợp các số đồng thời không chia hết cho 2, 3 và 5 là $\overline{X_1} \cap \overline{X_2} \cap \overline{X_3}$

N($\overline{X_1} \cap \overline{X_2} \cap \overline{X_3}$) = N(X) – N($X_1 \cup X_2 \cup X_3$) = 1000 – 734 = 266.

Bài tập 1.5

Có thể nhận được bao nhiêu xâu khác nhau được tạo thành từ việc sắp xếp các ký tự của từ EVERGREEN?

Hướng dẫn:

Từ EVERGREEN có 9 ký tự trong đó có 4 ký tự E, 1 ký tự V, 2 ký tự R, 1 ký tự G và 1 ký tự N.

Mỗi từ được tạo ra bằng cách sắp xếp lại các ký tự của từ EVERGREEN là 1 hoán vị lặp.

Do đó, số từ được tạo ra khác nhau là:

$$\frac{9!}{4!.1!.2!.1!.1!} = 7{,}560$$

Bài tập 1.6

Một biển số xe gồm 2 chữ cái đứng trước và 4 chữ số đứng sau. Các chữ cái được lấy từ tập 26 chữ cái Latinh {A, B, C, …, Z}. Các chữ số được lấy từ tập gồm 10 chữ số {0, 1, 2,…, 9}.

a. Có bao nhiêu biển số xe trong đó có ít nhất một chữ cái khác chữ cái O và các chữ số đôi một khác nhau?

b. Có bao nhiêu biển số xe có hai chữ cái khác nhau và có đúng 2 chữ số lẻ giống nhau?

Hướng dẫn:

a. Biển số xe có dạng $X_1Y_1.\overline{abcd}$

Giai đoạn 1: Xác định số cách chọn X_1Y_1, đảm bảo trong đó có ít nhất 1 chữ cái khác chữ cái O.

Có một trường hợp duy nhất cả hai chữ cái giống chữ cái O là OO.

Do đó chúng ta xác định số cách chọn 2 chữ cái đầu tiên bằng cách lấy số cách chọn 2 chữ cái bất kỳ từ tập chữ cái Latinh trừ đi trường hợp đặc biệt OO.

Mỗi cách chọn 2 chữ cái từ tập 26 chữ cái là một chỉnh hợp lặp chập 2 của 26. Do đó số cách để lấy ra 2 chữ cái bất kỳ là 26^2.

Vậy số cách để xác định X_1Y_1 là 26^2 -1 = 675.

Giai đoạn 2: Xác định $\overline{abcd}$ (a, b, c, d nhận giá trị $\overline{0 \ldots 9}$, khác nhau từng đôi một);

Mỗi cách chọn ra 1 bộ $\overline{abcd}$ là một chỉnh hợp chập 4 của 10;

Do đó số cách chọn $\overline{abcd}$ là $A_{10}^4 = \frac{10!}{6!} = 5040$;

Theo nguyên lý nhận, số cách chọn ra 1 biển số xe thỏa mãn yêu cầu đề bài là 675 x 5040 = 3,402,000 (cách).

b. Có bao nhiêu biển số xe có hai chữ cái khác nhau và có đúng 2 chữ số lẻ giống nhau?

Biển số xe có dạng $X_1Y_1.\overline{abcd}$

Giai đoạn 1: Chọn 2 chữ cái X_1Y_1

Mỗi cách chọn 2 chữ cái khác nhau là 1 chỉnh hợp chập 2 của 26. Do đó số cách chọn 2 chữ cái là $A_{26}^2 = \frac{26!}{(26-2)!} = 26 \, x \, 25 = 650$.

Giai đoạn 2: Chọn 4 số $\overline{abcd}$ thỏa mãn điều kiện có đúng hai số lẻ giống nhau.

Có 5 bộ số lẻ giống nhau, bao gồm (1, 1); (3, 3); (5, 5); (7, 7); và (9, 9). Như vậy có 5 cách để chọn đúng 2 số lẻ.

Xếp cặp số lẻ vào 4 vị trí, có $C_4^2 = \frac{4!}{2!.2!} = 6$ (cách)

Còn 2 vị trí còn lại là 2 số chẵn. Bộ số chẵn được chọn là 1 chỉnh hợp lặp của 2 được chọn từ 5 số chẵn {0, 2, 4, 6, 8}. Số cách chọn là 5^2 = 25

Vậy số cách chọn ra $\overline{abcd}$ thỏa mãn yêu cầu đề bài là 5 x 6 x 25 = 750.

Theo nguyên lý nhân, số cách để chọn ra 1 biển số thỏa mãn yêu cầu có hai chữ cái khác nhau và có đúng 2 chữ số lẻ giống nhau là:

650 x 750 = 487,500 (biển số).

Hoán vị vòng tròn

Cho tập hợp gồm n phần tử, n là số nguyên dương, mỗi cách xếp n phần tử này theo một thứ tự trên một vòng tròn kín là một hoán vị vòng của n phần tử.

Số các hoán vị vòng của n phần tử là: $Q_n = (n - 1)!$

Bài tập 1.7

Có 6 người tham gia hội nghị bàn tròn có đúng 6 ghế bố trí cách đều nhau. Hỏi có bao nhiêu cách để xếp 6 người này vào 6 vị trí?

Hướng dẫn:

Số cách xếp 6 người này vào bàn tròn là 5! = 120 cách.

Bài tập 1.8

Một hội nghị bàn tròn có phái đoàn của các nước: Anh 3 người, Nga 5 người, Mỹ 2 người, Pháp 3 người, Trung Quốc 4 người. Hỏi có bao nhiêu cách sắp xếp chỗ ngồi cho mọi thành viên sao cho người cùng quốc tịch thì ngồi cạnh nhau.

Hướng dẫn:

Nếu một phái đoàn nào ngồi vào chỗ trước thì bốn phái đoàn còn lại có 4! cách sắp xếp.

Như vậy có 24 cách sắp xếp các phái đoàn ngồi theo quốc gia mình. Bây giờ ta xem có bao nhiêu cách sắp xếp chỗ ngồi cho nội bộ từng phái đoàn. Từ giả thiết ta có

3! cách sắp xếp cho phái đoàn Anh

5! cách sắp xếp cho phái đoàn Nga

2! cách sắp xếp cho phái đoàn Mỹ

3! cách sắp xếp cho phái đoàn Pháp

4! cách sắp xếp cho phái đoàn Trung Quốc

Theo quy tắc nhân số cách sắp xếp cho hội nghị là 4!. 3!. 5!. 2!. 3!. 4! = 4,976,640 (cách).

Bài tập 1.9

Hỏi có bao nhiêu cách xếp 6 bạn nam và 6 bạn nữ ngồi xung quanh một chiếc bàn tròn, sao cho nam và nữ ngồi xen kẽ nhau?

Hướng dẫn:

Tiến hành sắp xếp vị trí ngồi theo 2 giai đoạn:

Giai đoạn 1: Xếp 6 bạn nam ngồi quanh vòng tròn, có (6 -1)! = 5!

Giai đoạn 2: Tìm cách xếp 6 bạn nữ.

Xem 6 bạn nam vừa xếp là 6 vách ngăn, vì 6 bạn nam ngồi quanh bàn tròn nên có 6 khoảng trống để xếp các bạn nữ. Số cách xếp các bạn nữ ngồi vào các vị trí trống là 6!

Theo nguyên lý nhân, số cách sắp xếp thỏa mãn yêu cầu là 5!. 6!

Bài tập 1.10

Hỏi có bao nhiêu cách xếp 6 cặp vợ chồng ngồi xung quanh một chiếc bàn tròn, sao cho các cặp vợ chồng đều ngồi cạnh nhau?

Hướng dẫn:

Ta tiến hành xếp chỗ ngồi theo hai giai đoạn:

Giai đoạn 1: Xếp 6 người chồng ngồi quanh bàn tròn, có (6 – 1)! = 5! cách xếp.

Giai đoạn 2: Mỗi cặp vợ chồng đổi chỗ cho nhau có 1 cách xếp mới, vậy có 2^6 cách.

Theo quy tắc nhân có $5!.2^6 = 7680$ cách.

Bài tập 1.11

Một giáo viên có 20 cuốn sách đôi một khác nhau. Trong đó có 5 cuốn sách văn học, 4 cuốn sách âm nhạc và 3 cuốn sách hội họa. Ông muốn lấy ra 6 cuốn và đem tặng cho 6 học sinh Anh, Bình, Chung, Duy, Nam, Khánh, mỗi em một cuốn sao cho sau khi tặng sách xong, mỗi một trong ba thể loại văn học, âm nhạc và hội họa đều còn lại ít nhất một cuốn. Hỏi có bao nhiêu cách tặng?

Hướng dẫn:

Có C_{12}^6 cách chọn 6 cuốn sách bất kỳ trong 12 cuốn

Có $C_5^5 C_7^1$ cách chọn 6 cuốn có 5 cuốn văn học

Có $C_4^4 C_8^2$ cách chọn 6 cuốn có 4 cuốn âm nhạc

Có $C_3^3 C_9^3$ cách chọn 6 cuốn có 3 cuốn hội họa

Vậy có $C_{12}^6 - (C_5^5 C_7^1 + C_5^5 C_7^1 + C_3^3 C_9^3) = 805$ cách chọn thỏa mãn điều kiện.

Với mỗi cách chọn ta có 6! cách tặng.

Vậy số cách tặng thỏa mãn là 805. 6!=579,600 cách.

Bài toán phân bổ đồ vật

Số cách phân chia n đồ vật khác nhau vào trong k hộp khác nhau sao cho có n_i vật được đặt vào hộp thứ i, với i = 1, 2, ..., k bằng $\frac{n!}{n_1! n_2 \dots n_k!}$

Bài tập 1.12

Có bao nhiêu cách chia 6 người vào mỗi toa tàu hạng 1, hạng 2, hạng 3, hạng 4 trong tổng số 48 người đã mua vé?

Hướng dẫn:

Trước tiên chúng ta thấy toa tàu hạng 1 có thể nhận được 6 người lên bằng C_{48}^6 cách, còn lại 42 người.

Toa tàu hạng 2 có thể nhận được 6 người lên bằng C_{42}^{6} cách, còn lại 36 người.

Toa tàu hạng 3 có thể nhận được 6 người lên bằng C_{36}^{6} cách, còn lại 30 người.

Cuối cùng toa tàu hạng 4 có thể nhận được 6 người lên bằng C_{30}^{6} cách.

Theo nguyên lý nhân, số cách sắp xếp là:

$C_{48}^{6}\, C_{42}^{6}\, C_{36}^{6}\, C_{30}^{6} = \frac{48!}{6!\,6!\,6!\,24!}$ cách chia.

Bài tập 1.13

Ở trên hình tròn có 12 vị trí là vị trí 1, vị trí 2, …, vị trí 12, nối tiếp nhau theo chiều kim đồng hồ, theo đúng thứ tự trên. Ta đặt các con số 1, 2, 3, …, 12 lên 12 vị trí đó 1 cách ngẫu nhiên. Chứng minh rằng ta luôn tìm được 3 số liền nhau trong cách xếp đó sao cho tổng của chúng lớn hơn hoặc bằng 20.

Hướng dẫn:

Giả sử số được xếp vào vị trí thứ i là a_i. Khi đó ta đặt a_i quả bóng vào vị trí thứ i và ký hiệu là tập tất cả các quả bóng ở vị trí i, i + 1 và i + 2, ở đây i, i + 1, i + 2 được lấy theo modulo 12.

Ký hiệu $S = A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_{12}$. Khi đó $A_i \subseteq S$ và mỗi $s \epsilon S$ chứa đựng trong 3 tập con A_i. Vì vậy theo nguyên lý Dirichlet, trung bình cộng của $|A_1|, |A_2|, \ldots, |A_{12}|$ bằng $\frac{3S}{12}$

Mặt khác ta có $|S| = 1 + 2 + 3 + \ldots + 12 = 78$

Vì vậy trung bình cộng của $|A_1|, |A_2|, \ldots, |A_{12}|$ bằng $\frac{3x\ 78}{12} = 19.5$

Suy ra, tồn tại A_i sao cho $|A_i| \geq 20$, tức là tồn tại ba số liên tiếp trong cách xếp 12 số 1, 2, 3, …, 12 lên vòng tròn sao cho tổng của chúng lớn hơn hoặc bằng 20.

A3. Quan hệ

Bài tập 1.14

Liệt kê các cặp có thứ tự của quan hệ R từ tập A ={0, 1, 2, 3, 4} đến tập B = {0, 1, 2, 3}, trong đó $(a, b) \subseteq R$ khi và chỉ khi:

a. a + b = 4

Hướng dẫn:

Xét các bộ (a, b) trong đó a ⊆A và b⊆ B sao cho a + b = 4:

(0, 4), (1, 3), (2, 2), (3, 1), (4, 0) là các bộ thỏa mãn a + b = 4.

R = {(0, 4), (1, 3), (2, 2), (3, 1), (4, 0)}

b. a ⋮ b

Hướng dẫn:

Xét các bộ (a, b) trong đó a ⊆A và b⊆ B sao cho a ⋮ b:

(0, 1), (0, 2), (0, 3), (1, 1), (2, 1), (2, 2), (3, 1), (3, 3), (4, 1), (4, 2) là các bộ thỏa mãn điều kiện a ⋮ b

Vậy R = {(0, 1), (0, 2), (0, 3), (1, 1), (2, 1), (2, 2), (3, 1), (3, 3), (4, 1), (4, 2)}.

Bài 1.15

Xác định quan hệ R xét trên tập hợp các số thực có tính chất phản xạ, đối xứng, phản xứng hay bắc cầu không? Biết rằng$(x, y) \subseteq R$ khi và chỉ khi:

a. x = y

Hướng dẫn:

R là phản xạ, khi và chỉ khi, với ∀x ∈ R, ta có xRx

R có tính phản xạ: Vì với ∀x ∈ R, ta luôn có x = x, do đó xRx

R là đối xứng, khi và chỉ khi, nếu có xRy thì cũng có yRx, $\forall x, y \in R$

R có tính đối xứng: Vì với $\forall x, y \in R$, nếu có xRy, tức là x = y, thì cũng có y = x, do đó yRx

R là bắc cầu, khi và chỉ khi, nếu có xRy và yRz thì cũng có xRz

R có tính bắc cầu: Vì với $\forall x, y, z \in R$, nếu có xRy và yRz, tức là x = y và y = z, theo tính chất bắc cầu trong toán học, suy ra x = z, do đó xRz.

b. x < y

Hướng dẫn:

R có tính phản xạ, khi và chỉ khi, với ∀x ∈ R ta luôn có xRx.

Theo định nghĩa R: xRy khi và chỉ khi x < y

Do đó xRx khi và chỉ khi x < x. Rõ ràng, ∄x ∈ R sao cho x < x.

⇒ R không có tính chất phản xạ

R có tính đối xứng, khi và chỉ khi, nếu có xRy thì cũng có yRx, $\forall x, y \in R$

Theo định nghĩa của R: xRy, khi và chỉ khi x < y, do đó y > x. Rõ ràng $\nexists x, y \in R$ để y < x.

⇒ R không có tính đối xứng.

R có tính bắc cầu, khi và chỉ khi, nếu có xRy và yRz thì cũng có xRz

Giả sử rằng, xRy và yRz.

Do đó, x < y và y < z.

⇒ x < z

⇒ xRz

⇒ R có tính bắc cầu.

BÀI TẬP 1.16

R là quan hệ trên tập người sao cho xRy khi và chỉ khi x, y là người và x già hơn y.

Chứng tỏ R không phải quan hệ thứ tự?

Hướng dẫn:

Quan hệ R là quan hệ thứ tự, nếu thỏa mãn 3 tính chất: phản xạ, phản xứng và bắc cầu.

Kiểm tra lần lượt 3 tính chất này:

Tính chất phản xạ: R không phản xạ, bởi vì 1 người không thể già hơn chính bản thân người đó. Do đó $x\bar{R}x$ với mọi người x.

Tính chất phản xứng: R là phản xứng, vì nếu xRy và yRx, tức là người x *"già hơn"* người y và người y *"già hơn"* người x thì hai người x, y này già như nhau.

Tính chất bắc cầu: Người x già hơn người y, người y già hơn người z thì x già hơn z. Do đó xRy và yRz thì xRz.

Quan hệ R không thỏa đồng thời ba tính chất. Do đó R không phải là quan hệ thứ tự.

B. BÀI TẬP SINH VIÊN TỰ LÀM

B1. Tập hợp

Bài tập 1.17

Chứng minh rằng, với mọi tập A, B:

$$A\backslash(A \cap B) = A\backslash B$$

a. Bằng định nghĩa của tập hợp

b. Bằng các tính chất của tập hợp.

Bài tập 1.18

Chứng minh rằng, với mọi tập A, B:

$$(A\backslash B) \cup (A \cap B) = A$$

a. Bằng định nghĩa của tập hợp

b. Bằng các tính chất của tập hợp.

Bài tập 1.19

Cho tập hợp A, B, C. Cho biết tính chất sau đây đúng hay sai? Nếu đúng hãy chứng minh. Nếu sai hãy chỉ ra một ví dụ vi phạm.

$$(A \backslash B) \cup (B \backslash C) = (A \cup B) \backslash (B \cap C)$$

B2. Tổ hợp

Bài tập 1.20

Có bao nhiêu chuỗi khác nhau có thể được tạo từ các chữ cái trong từ MISSISSIPPI, sử dụng tất cả các chữ cái?

Bài tập 1.21

Có bao nhiêu chuỗi khác nhau có thể được tạo từ các chữ cái trong từ ABRACADABRA, sử dụng tất cả các chữ cái?

Bài tập 1.22

Có bao nhiêu tên biến trong Pascal có độ dài 10 kí tự chỉ chứa hai chữ cái A, B, bắt đầu bởi AAA hoặc ABA?

Bài tập 1.23

Một đề thi trắc nghiệm có thể chọn từ một trong ba bộ đề thi độc lập tương ứng có 23, 17 và 29 đề. Có bao nhiêu cách chọn khác nhau?

Bài tập 1.24

Có nhiều nhất bao nhiêu biển đăng ký xe máy trên 50 phân khối của thành phố Hà Nội nếu mỗi biển có nội dung ví dụ như sau: 29 H3- 3907, số 29 là ký hiệu dành cho Hà Nội, tiếp đó là một trong 26 chữ cái, sau chữ cái là một số nằm trong khoảng từ 1 đến 9, bốn số cuối bất kỳ.

Bài tập 1.25

Mỗi người sử dụng hệ thống máy tính đều có mật khẩu dài từ sáu đến tám ký tự, trong đó mỗi ký tự là một chữ Latinh viết hoa hay một chữ số. Mỗi mật khẩu phải chứa ít nhất một chữ số. Hỏi có bao nhiêu mật khẩu?

Bài tập 1.26

Trong một lớp học có 50 sinh viên, có 26 sinh viên đạt yêu cầu môn thi thứ nhất, 21 sinh viên đạt yêu cầu môn thi thứ hai. Nếu 17 sinh viên không đạt yêu cầu cả hai môn thi thì có bao nhiêu sinh viên đạt yêu cầu cả hai môn thi?

Bài tập 1.27

Trong lớp có 52 sinh viên, có 27 sinh viên không phải thi lại môn “Kĩ thuật số”, 20 sinh viên không phải thi lại môn “Toán rời rạc”. Nếu có 15 sinh viên phải thi lại cả hai môn, thì có bao nhiêu sinh viên không phải thi lại môn nào?

Bài tập 1.28

Kết quả điều tra mức sống của các gia đình ở Mỹ cho biết 96% dân số có ít nhất một máy thu hình, 98% có điện thoại và 95% có điện thoại và ít nhất một máy thu hình. Tỷ lệ phần trăm các gia đình ở Mỹ không có điện thoại và không có máy thu hình.

Bài tập 1.29

Có bao nhiêu xâu 20 chữ số của hệ thập phân chứa đúng 2 chữ số 0, bốn chữ số 1, ba chữ số 2, hai chữ số 3, hai chữ số 4, ba chữ số 5, hai chữ số 7 và hai chữ số 9?

Bài tập 1.30

Trong một trường có 1000 sinh viên học tiếng Anh, 800 sinh viên học tiếng Pháp, 112 sinh viên học tiếng Nga, 101 sinh viên học tiếng Anh và Pháp, 20 sinh viên học tiếng Anh và Nga, 15 sinh viên học tiếng Pháp và Nga. Nếu tất cả có 2100 sinh viên học ít nhất một ngoại ngữ. Hỏi có bao nhiêu sinh viên học cả 3 thứ tiếng?

Bài tập 1.31

Mỗi cỗ bài có 52 quân được chia cho 4 người. Có bao nhiêu cách chia để mỗi người được 5 quân.

Bài tập 1.32

Xác định số lượng các số nguyên dương nhỏ hơn bằng 1200 không chia hết cho bất kỳ số nào trong hai số 9 và 11.

Bài tập 1.33

Một mã từ được gọi là hợp lệ nếu nó là 1 xâu các chữ số hệ thập phân chứa một số lẻ chữ số 0. Tính số mã từ có độ dài 7.

Bài tập 1.34

Một tập thể gồm 14 người, 6 nam và 8 nữ trong đó có An và Bình. Người ta chọn tổ công tác 6 người. Tìm số cách chọn tổ sao cho có 1 tổ trưởng và 5 tổ viên trong đó An và Bình không đồng thời có mặt.

Bài tập 1.35.

Một nhóm học sinh gồm 10 nam và 3 nữ. Có bao nhiêu cách sắp xếp nhóm học sinh này thành hàng dọc sao cho có 7 học sinh nam luôn đứng cạnh nhau?

Bài tập 1.36

Trong 45 học sinh kiểm tra không có học sinh nào đạt điểm dưới 2 và có 2 học sinh đạt điểm 10. Chứng minh rằng luôn tìm được ít nhất 6 học sinh có điểm bằng nhau (điểm của học sinh là số tự nhiên trong khoảng 0 đến 10)

Bài tập 1.37

Một lớp có 40 học sinh, trong đó có 15 em học giỏi Toán, 16 em học giỏi Văn, 17 em học giỏi tiếng Anh. Có 5 em học giỏi cả 2 môn Văn và Toán, 8 em học giỏi cả 2 môn Toán và Anh, 6 em học giỏi Văn và Anh, có 2 em học giỏi cả 3 môn. Hỏi có bao nhiêu em không học giỏi môn nào?

Bài tập 1.38

Một nhóm học sinh gồm 5 học sinh nam và 3 học sinh nữ được xếp vào 8 chỗ ngồi. Hỏi có bao nhiêu cách xếp để không có học sinh nữ nào ngồi cạnh nhau?

Bài tập 1.39

Cho tập hợp E = {0, 1, 2, …, 8}. Có thể lập được bao nhiêu số tự nhiên có 5 chữ số khác nhau chia hết cho 5 từ tập hợp E.

Bài tập 1.40

Có bao nhiêu khả năng chọn 2 số nguyên trong 100 số nguyên đầu tiên sao cho tổng của chúng là một số chẵn, số lẻ ?

Bài tập 1.41

Có bao nhiêu tập có 7 phần tử lấy từ tập các số nguyên dương không vượt quá 20 mà có ít nhất 2 số chẵn.

Bài tập 1.42

Một nhóm gồm 8 học sinh. Có bao nhiêu cách sắp xếp sao cho A luôn đứng cạnh B.

Bài tập 1.43

Một nhóm học sinh gồm 10 nam và 3 nữ. Có bao nhiêu cách sắp xếp nhóm học sinh này thành hàng dọc sao cho có 7 học sinh nam luôn đứng cạnh nhau?

Bài tập 1.44

Khi kiểm kê danh mục 115 chi tiết, mỗi chi tiết có thể được đánh giá là “tốt” hoặc “không tốt”, có 60 chi tiết được đánh giá là “tốt”. Chứng minh rằng có ít nhất hai chi tiết được đánh giá là “tốt” có số thứ tự cách nhau 4 đơn vị.

Bài tập 1.45

Khi chọn tùy ý n +1 số nguyên dương khác nhau, chứng minh rằng tồn tại ít nhất hai số đồng dư theo modulo n.

Bài tập 1.46

Hãy chỉ ra rằng trong dãy 10 số nguyên dương bất kỳ tồn tại một hay nhiều hơn các số hạng liên tiếp có tổng chia hết cho 10.

Bài tập 1.47

Chỉ ra rằng trong dãy m số nguyên dương bất kỳ tồn tại ít nhất một dãy các số hạng liên tiếp có tổng chia hết cho m.

Bài tập 1.48

Trong không gian Oxyz cho 9 điểm có tọa độ nguyên. Chứng minh rằng luôn tìm được 2 điểm mà trung điểm của nó cũng có tọa độ nguyên.

Bài tập 1.49

Có 16 cầu thủ bóng rổ, số áo của mỗi người được đánh số từ 1 đến 16 đứng thành một vòng tròn theo thứ tự bất kỳ. Chứng minh rằng tồn tại ít nhất 3 cầu thủ đứng liền nhau có tổng các số áo ít nhất là 26.

Bài tập 1.50

Một trung tâm máy tính có 151 máy vi tính. Các máy của trung tâm được đặt tên bởi một số nguyên dương trong khoảng từ 1 đến 300 sao cho không có hai máy nào đặt tên trùng nhau. Chứng minh rằng luôn tìm được hai máy có tên là các số nguyên liên tiếp.

Bài tập 1.51

Chứng minh rằng khi chọn 21 số nguyên dương bất kỳ khác nhau, tồn tại ít nhất 2 số mà có hiệu là một số tận cùng là số 0.

Bài tập 1.52

Cho 70 số nguyên dương bất kỳ khác nhau có giá trị không lớn hơn 128. Chứng minh rằng bao giờ cũng tồn tại ít nhất 5 cặp số có hiệu là 7?

Bài tập 1.53

Chứng minh rằng nếu chọn 60 số nguyên dương bất kỳ khác nhau không lớn hơn 115. Chứng minh rằng bao giờ cũng tồn tại ít nhất 2 số có hiệu là 4.

Bài tập 1.54

Chứng minh rằng trong n + 1 số nguyên dương không vượt quá 2n tồn tại ít nhất một số chia hết cho một số khác.

Bài tập 1.55

Có 12 cầu thủ bóng rổ, số áo của mỗi người được đánh từ 1 đến 12 đứng thành một vòng tròn theo thứ tự bất kỳ. Chứng minh rằng tồn tại ít nhất 3 cầu thủ đứng liền nhau có tổng số áo lớn hơn là 16.

Bài tập 1.56

Trong mặt phẳng Oxy cho 6 điểm có tọa độ nguyên. Chứng minh rằng luôn tìm được 2 điểm mà trung điểm của nó cũng có tọa độ nguyên.

Bài tập 1.57

Một người lái xe buýt trả thuế cầu đường bằng cách thả vào các máy thu tiền tự động lần lượt các đồng 5 xu và 10 xu. Tìm hệ thức truy hồi tính số cách khác nhau mà người lái xe có thể trả một khoản thuế n xu (trong đó trật tự theo đó các đồng xu được thả vào máy là quan trọng).

Bài tập 1.58

Giả sử số tôm hùm bị đánh bắt trong một năm bằng trung bình cộng số bị đánh bắt trong hai năm trước đó.

a. Hãy tìm hệ thức truy hồi cho $\{L_n\}$

b. Hãy tìm L_n nếu năm đầu 100000 tôm hùm bị đánh bắt, năm thứ hai 300000 tôm hùm bị đánh bắt.

Bài tập 1.59

Giải các hệ thức truy hồi sau:

a) $a_n = 2a_{n-1}$ $n \geq 1$ với $a_0 = 3$

b) $a_n = 5a_{n-1} - 6a_{n-2}$ $n \geq 2$ với $a_0 = 1$, $a_1 = 0$

c) $a_n = 4a_{n-1} - 4a_{n-2}$ $n \geq 2$ với $a_0 = 6$, $a_1 = 8$

d) $a_n = 4a_{n-2}$ $n \geq 2$ với $a_0 = 0$, $a_1 = 4$

Bài tập 1.60

Giải các hệ thức truy hồi sau:

$a_n = 3a_{n-1} + 2b_{n-1}$

$b_n = a_{n-1} + 3b_{n-1}$

Với $a_0 = 2$ và $b_0 = 1$

Bài tập 1.61

Giải hệ thức truy hồi sau:

$a_n = 5a_{n-1} - 6a_{n-2} -2$ với $a_0 = 1$, $a_1 = 2$

B3. Quan hệ

Bài tập 1.62

Liệt kê các cặp có thứ tự của quan hệ R từ tập A = {0, 1, 2, 3, 4} đến tập B = {0, 1, 2, 3}, trong đó $(a, b) \subseteq R$ khi và chỉ khi:

a. a = b

b. a > b

c. gcd(a, b) = 1 (gcd(a, b): ước chung lớn nhất của hai số a, b)

d. lcm(a, b) = 2 (lcm(a, b): bội số chung nhỏ nhất của hai số a, b)

Bài tập 1.63

Xác định các quan hệ dưới đây xét trên tập {1, 2, 3, 4} có tính chất phản xạ, đối xứng, phản xứng, hay bắc cầu?

a. R_1 = {(2, 2), (2, 3), (2, 4), (3, 2), (3, 3), (3, 4)}

b. R_2 = {(1, 1), (1, 2), (2, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4)}

c. R_3 = {(2, 4), (4, 2)}

d. R_4 = {(1, 2), (2, 3), (3, 4)}

e. R_5 = {(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4)}

f. R_6 = {(1, 3), (1, 4), (2, 3), (2, 4), (3, 1), (3, 4)}

Bài tập 1.64

Xác định quan hệ R xét trên tập hợp người, có tính phản xạ, đối xứng, phản xứng, bắc cầu không? Trong đó $(a, b) \subseteq R$ khi và chỉ khi:

a. a cao hơn b.

b. a và b cùng ngày sinh.

c. a và b cùng tên.

d. a và b có cùng ông bà.

Bài tập 1.65

Xác định quan hệ R xét trên tập hợp các số thực có tính chất phản xạ, đối xứng, phản xứng hay bắc cầu không? Biết rằng$(x, y) \subseteq R$ khi và chỉ khi:

a. x + y = 0

b. x = $\pm$y

c. x – y là số hữu tỷ

d. x = 2. y

e. x. y $\geq$ 0

f. x. y = 0

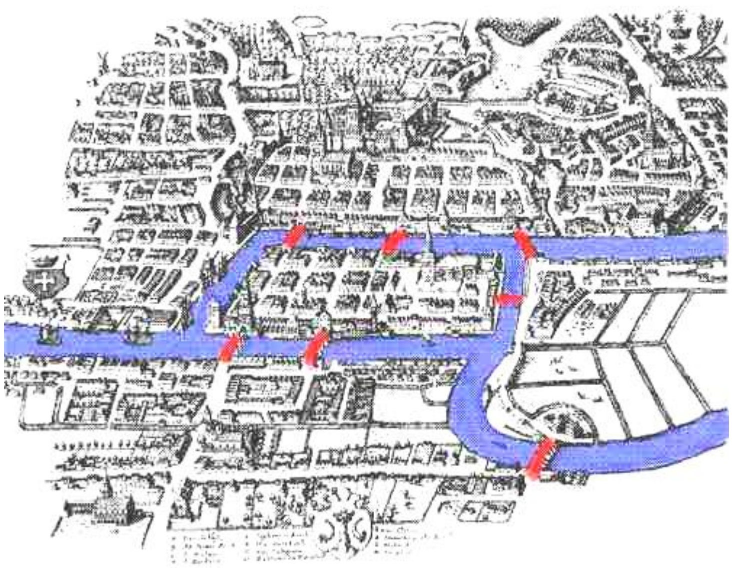
g. x = 1 hoặc y = 1.

CHƯƠNG 2
LÝ THUYẾT ĐỒ THỊ

Nội dung của Chương 2, lý thuyết đồ thị nhằm cung cấp cho sinh viên một số khái niệm cơ bản như khái niệm đồ thị, đường đi, chu trình, đồ thị liên thông, v.v.. *Một số bài toán được trình bày trong Chương 2 là bài toán về đồ thị Euler và đồ thị Hamilton, các ứng dụng của đồ thị Euler và Hamilton như bài toán người đưa thư Trung Hoa, người bán hàng. Bên cạnh đó, Chương 2 còn trình bày một số bài toán điển hình trong lý thuyết đồ thị có ứng dụng nhiều trong thực tế như bài toán tìm đường đi ngắn nhất với thuật toán Dijkstra, bài toán tìm cây bao trùm tối thiểu với hai thuật toán Kruskal và Prim.*

2.1. KHÁI NIỆM CƠ BẢN VỀ ĐỒ THỊ

Trong thế giới hiện đại, lập kế hoạch các tuyến hiệu quả là điều cần thiết cho cá nhân và các doanh nghiệp, với các ứng dụng đa dạng như phân phối sản phẩm, đặt các đường cáp quang mới cho internet băng thông rộng, đề xuất những người bạn mới trong các trang mạng xã hội như Facebook.



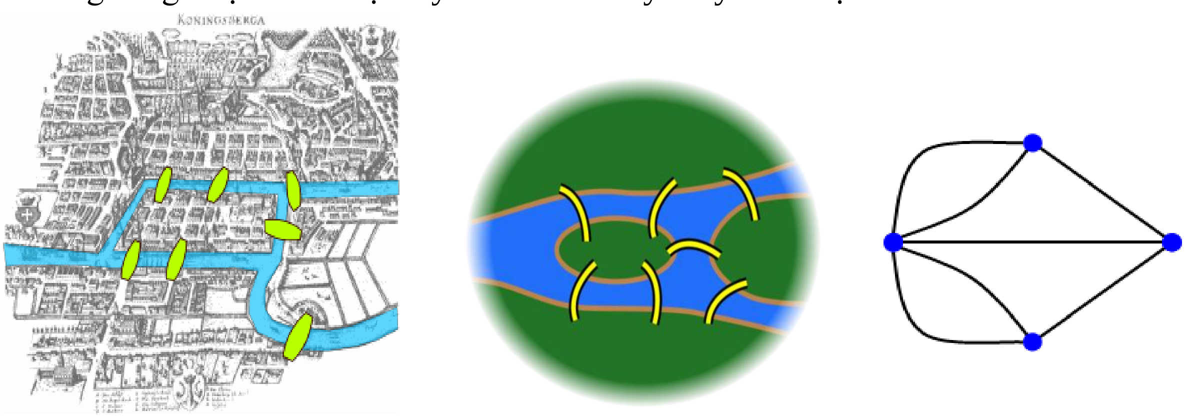
Hình 2.1: Bài toán bảy cây cầu.

Lý thuyết đồ thị bắt nguồn từ bài toán bảy cây cầu ở Königsberg, mà Leonhard Euler (1707-1783) đã giải quyết năm 1736. Vấn đề được nêu như sau:

Thành phố Königsberg (trước đây là của Đức, bây giờ là một phần của Nga) bao gồm hai hòn đảo và hai bờ sông Pregel (bờ phía trên và bờ hạ). Giữa bốn khối đất này có bảy cây cầu bắc qua, như hình 2.1. Theo truyền thuyết, người dân Königsberg tự hỏi liệu một con đường có thể được tìm thấy sao cho một người có thể rời khỏi nhà của mình, đi qua tất cả bảy cây cầu trong thị trấn một cách chính xác một lần và trở về nhà.

Leonhard Euler đã chứng minh rằng bài toán này là không có lời giải. Để chứng minh kết quả, Euler đã phát biểu bài toán bằng các thuật ngữ của lý thuyết đồ thị. Ông loại bỏ tất cả các chi tiết ngoại trừ các vùng đất và các cây cầu, sau đó thay thế mỗi vùng đất bằng một điểm, gọi là đỉnh hoặc nút và thay mỗi cây cầu bằng một đoạn nối, gọi là cạnh hoặc liên kết. Cấu trúc toán học thu được được gọi là một đồ thị.

Trong lịch sử toán học, lời giải của Euler cho bài toán bảy cây cầu ở Königsberg được coi là định lý đầu tiên của lý thuyết đồ thị.



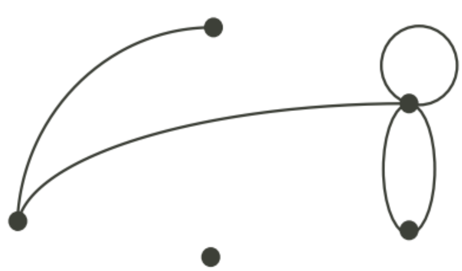
Hình 2.2: Đồ thị được vẽ từ bài toán thực tế.

2.1.1. Đồ thị, đường đi, chu trình, đồ thị liên thông

2.1.1.1. Khái niệm về đồ thị

Về mặt khái niệm, một đồ thị được hình thành bởi các đỉnh và các cạnh nối các đỉnh.

Ví dụ 2.1



Hình 2.3: Ví dụ về đồ thị.

Định nghĩa 2.1

Cho V là 1 tập hữu hạn và $E(V) = \{\{u, v\} | u, v \in V, u \neq v\}$

Cặp G = (V, E) với E ∈ $E(V)$ được gọi là 1 đồ thị. Mỗi phần tử của tập V gọi là đỉnh của đồ thị và mỗi phần tử của E gọi là cạnh (cung) của đồ thị. Tập đỉnh của đồ thị ký hiệu là V_G và tập cạnh (cung) của đồ thị ký hiệu là E_G. Do đó G = (V_G, E_G).

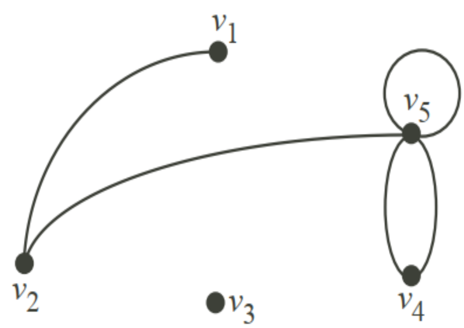
Thông thường, đặt các đỉnh bằng các chữ cái (ví dụ a, b, c hoặc v_1, v_2, v_3, v.v.) hoặc các chữ số 0, 1, 2, v.v..

Ví dụ 2.2

Gán nhãn cho các đỉnh của đồ thị G của hình 2.3

Ở ví dụ trên, V = {v_1, v_2, v_3, v_4, v_5} là tập đỉnh

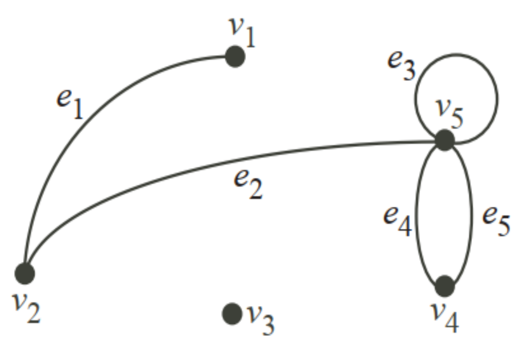
E = {(v_1, v_2), (v_2, v_5), (v_5, v_5), (v_4, v_5), (v_4, v_5)} là tập các cạnh (cung).



Hình 2.4: Gán nhãn cho các đỉnh của đồ thị.

Ví dụ 2.3

Gán nhãn cho các cạnh của đồ thị G trong hình 2.4



Hình 2.5: Gán nhãn cho các cạnh.

Trong hình 2.5, tập cạnh E = {e_1, e_2, e_3, e_4, e_5}.

Định nghĩa 2.2
Hai đỉnh u, v là 2 đỉnh đầu cuối của cạnh (u, v), khi đó u và v được gọi là 2 đỉnh kề nhau. Các cạnh (cung) có chung cặp đỉnh đầu cuối gọi là cạnh song song. Cạnh (cung) có dạng (v, v) (đỉnh đầu và đỉnh cuối trùng nhau) được gọi là khuyên. Đồ thị không có cạnh (tập E rỗng) gọi là đồ thị rỗng (*empty*). Đồ thị chỉ có 1 đỉnh gọi là đồ thị tầm thường (*trivial*). Các cạnh được gọi là kề nhau nếu có chung đỉnh cuối. Đỉnh không có cạnh đi qua, gọi là đỉnh cô lập. Đỉnh chỉ có 1 cạnh (cung) đi qua, gọi là đỉnh treo.

Trong Ví dụ 2.3:

Tập đỉnh V = {v_1, v_2, v_3, v_4, v_5}

Tập cạnh E = {e_1, e_2, e_3, e_4, e_5}

+ v_1 và v_2 là 2 đỉnh kề nhau của cạnh e_1

+ e_4 và e_5 là 2 cạnh song song

+ e_3 là khuyên

+ e_1 và e_2 là 2 cạnh kề nhau (chung đỉnh v_2)

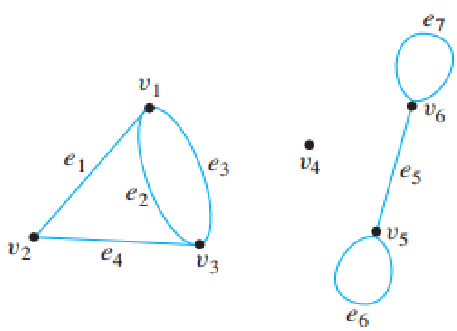
+ G là đa đồ thị

+ v_1 là đỉnh treo

+ v_3 là đỉnh cô lập.

Ví dụ 2.4

Cho đồ thị G_1 = (V_1, E_1) sau đây:



Hình 2.6: Minh họa về đồ thị.

Tập đỉnh $V_1 = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6\}$

Tập cạnh $E_1 = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6, e_7\}$

Ánh xạ đỉnh cạnh của đồ thị được thể hiện như sau:

Cạnh	Đỉnh
e_1	$\{v_1, v_2\}$
e_2	$\{v_1, v_3\}$
e_3	$\{v_1, v_3\}$
e_4	$\{v_2, v_3\}$
e_5	$\{v_5, v_6\}$
e_6	$\{v_5, v_5\}$
e_7	$\{v_6, v_6\}$

Ở đồ thị trên:

e_2 và e_3 là 2 cạnh song song

e_6 và e_7 gọi là khuyên

v_4 là đỉnh cô lập.

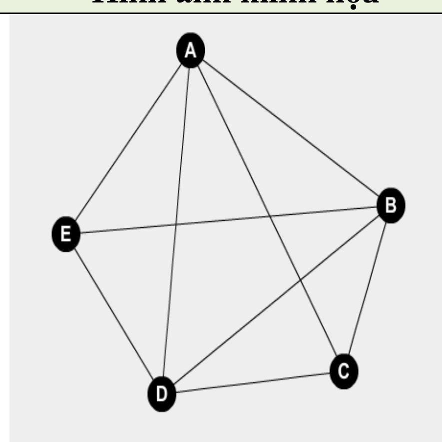
2.1.1.2. Phân loại đồ thị

Tiêu chí phân loại:

Việc phân loại đồ thị được dựa vào 2 tiêu chí sau đây:

- *Dựa vào số lượng cạnh đi qua cặp đỉnh, người ta phân chia thành 2 loại: Đơn đồ thị và đa đồ thị.*

- *Dựa vào việc phân biệt thứ tự các cặp đỉnh liên kết, người ta phân chia đồ thị thành 2 loại: Đồ thị vô hướng và đồ thị có hướng.*

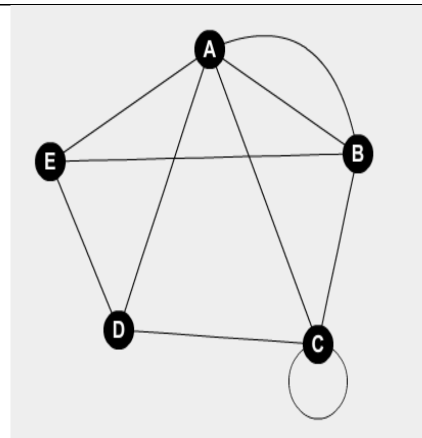
Phân loại	Hình ảnh minh họa
Đơn đồ thị Đồ thị đơn giản (gọi tắt là đơn đồ thị) là đồ thị không có các cạnh (cung) song song hoặc khuyên.	

<table>
<tr>
<td>

Đa đồ thị (Giả đồ thị)

Đồ thị chứa cạnh song song hoặc khuyên gọi là đa đồ thị (một số tài liệu gọi là giả đồ thị).

</td>
<td>

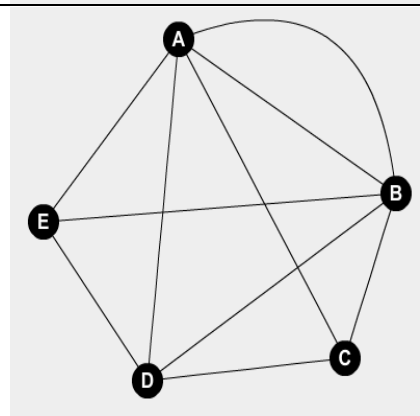


</td>
</tr>
<tr>
<td>

Đồ thị vô hướng

Cho đồ thị G = (V, E). Nếu chúng ta không phân biệt thứ tự của cặp đỉnh liên kết với mỗi cạnh thì sẽ có được đồ thị vô hướng.

</td>
<td>

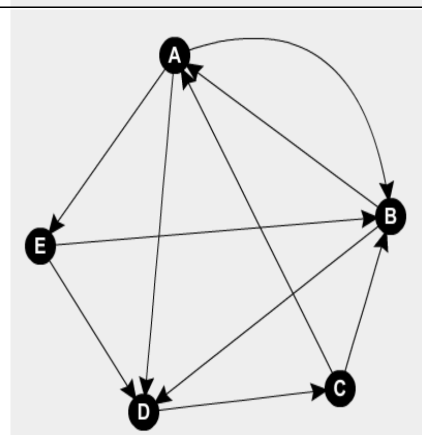


</td>
</tr>
<tr>
<td>

Đồ thị có hướng

Cho đồ thị G = (V, E). Nếu chúng ta phân biệt thứ tự của cặp đỉnh liên kết với mỗi cạnh thì sẽ có được đồ thị có hướng.

</td>
<td>



</td>
</tr>
</table>

2.1.1.3. Bậc của đồ thị

Định nghĩa 2.3

Cho đồ thị vô hướng G = (V, E).

$v \in V$ là một đỉnh của đồ thị G. Bậc của đỉnh v, ký hiệu deg(v) là số cạnh tới v, trong đó khuyên được tính 2 lần.

Bậc của đồ thị G là tổng bậc của tất cả các đỉnh của G.

Lưu ý:

- Đỉnh có bậc bằng 0 gọi là đỉnh cô lập
- Đỉnh có bậc bằng 1 gọi là đỉnh treo, cạnh tới đỉnh treo gọi là cạnh treo
- Đồ thị mà mọi đỉnh đều là đỉnh cô lập gọi là đồ thị rỗng.

Ví dụ 2.5

Cho đồ thị $G_2 = (V_2, E_2)$ như hình vẽ sau đây:

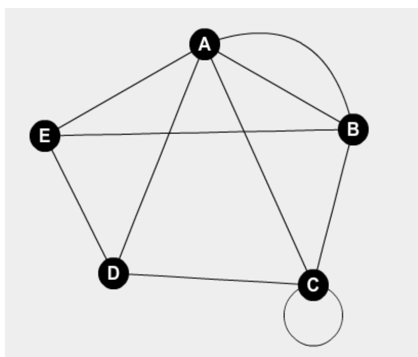
a. Cho biết bậc của các đỉnh trong đồ thị?

b. Bậc của đồ thị?

Hướng dẫn:

Để tìm bậc của các đỉnh trong đồ thị, ta đếm số cạnh đi qua đỉnh đó.

Bậc của đồ thị chính là tổng bậc các đỉnh của đồ thị.



Hình 2.7: Ví dụ về tìm bậc của đồ thị vô hướng.

a. Bậc các đỉnh của đồ thị

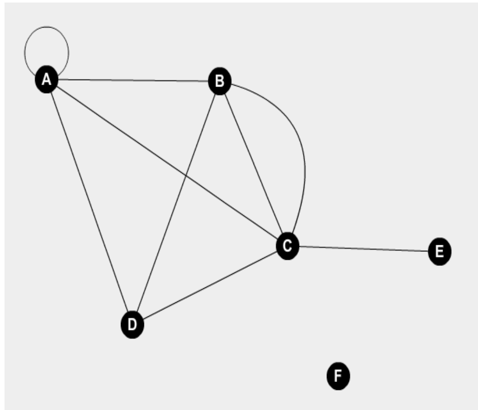
Đỉnh	**Bậc (Deg)**
A	5
B	4
C	5
D	3
E	3

b. Bậc của đồ thị

$deg(G_2) = deg(A) + deg(B) + deg(C) + deg(D) + deg(E) = 5 + 4 + 5 + 3 + 3 = 20.$

Ví dụ 2.6

Cho đồ thị $G_3 = (V_3, E_3)$ sau đây:



Hình 2.8: Ví dụ tìm bậc của đồ thị chứa đỉnh treo và đỉnh cô lập.

a. Xác định bậc các đỉnh của đồ thị?

b. Bậc của đồ thị?

Hướng dẫn:

a. Bậc các đỉnh của đồ thị

Đỉnh	Bậc (Deg)
A	5
B	4
C	5
D	3
E	1
F	0

b. Bậc của đồ thị

$\deg(G_3) = \sum_{v \in V} \deg(v) = 5 + 4 + 5 + 3 + 1 + 0 = 18.$

G_3 có 1 đỉnh treo là đỉnh E (bậc = 1) và 1 đỉnh cô lập là đỉnh F (bậc = 0).

Định lý 2.1
Với mọi đồ thị vô hướng G = (V, E) ta có $\sum_{v \in V} \deg(v) = 2\|E\|$

Trong Ví dụ 2.5, đồ thị $G_1 = (V_1, E_1)$ có 10 cạnh, đó là AB, AB, AC, AD, AE, BC, BE, CC, CD, DE. Bậc của đồ thị (đã tính) = 20.

Trong Ví dụ 2.6, đồ thị G_2 có 9 cạnh, đó là AA, AB, AC, AD, BC, BC, BD, CD, CE. Bậc của đồ thị = 18 = 2 lần số cạnh.

Hệ quả 2.1

Số các đỉnh bậc lẻ của đồ thị G = (V, E) là 1 số chẵn.

Trong Ví dụ 2.5, có 4 đỉnh bậc lẻ, đó là các đỉnh A, C, D, E.

Trong Ví dụ 2.6, có 4 đỉnh bậc lẻ, đó là các đỉnh A, C, D, E.

Định nghĩa 2.4

Cho đồ thị có hướng G = (V, E). $v \in V$ là một đỉnh của đồ thị G.

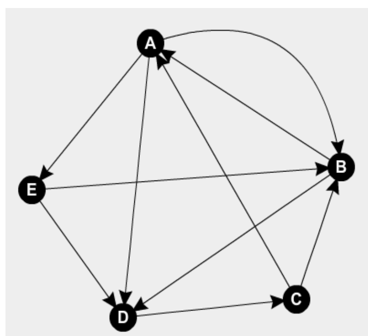
Ký hiệu $deg^-(v)$ là số cung đi vào đỉnh v, $deg^+(v)$ là số cung đi ra khỏi v.

Bậc của đỉnh v, ký hiệu deg(v) là tổng số cung đi vào và số cung đi ra đỉnh v, được tính theo công thức $deg(v) = deg^-(v) + deg^+(v)$.

Bậc của đồ thị bằng tổng bậc các đỉnh của đồ thị.

Ví dụ 2.7

Cho đồ thị $G_4 = (V_4, E_4)$ sau đây:



Hình 2.9: Ví dụ về bậc của đồ thị có hướng.

a. Xác định bậc các đỉnh của đồ thị?

b. Bậc của đồ thị?

Hướng dẫn:

a. Bậc các đỉnh của đồ thị G_4

Đỉnh	**$Deg^-(v)$**	**$Deg^+(v)$**	**Deg(v)**
A	2	3	5
B	3	2	5
C	1	2	3

D	3	1	4
E	1	2	3

b. Bậc của đồ thị G_4

deg(G_4) = $\sum_{v \in V} \deg(v) = 5 + 5 + 3 + 4 + 3 = 20.$

Định lý 2.2

Với mọi đồ thị có hướng G = (V, E) ta có:

$$\sum_{v \in V} \deg^-(v) = \sum_{v \in V} \deg^+(v) = |E|$$

Trong Ví dụ 2.7:

$\sum_{v \in V} \deg^-(v) = 2 + 3 + 1 + 3 + 1 = 10 = |E|$

$\sum_{v \in V} \deg^+(v) = 3 + 2 + 2 + 1 + 2 = 10 = |E|$

2.1.1.4. Đường đi và chu trình

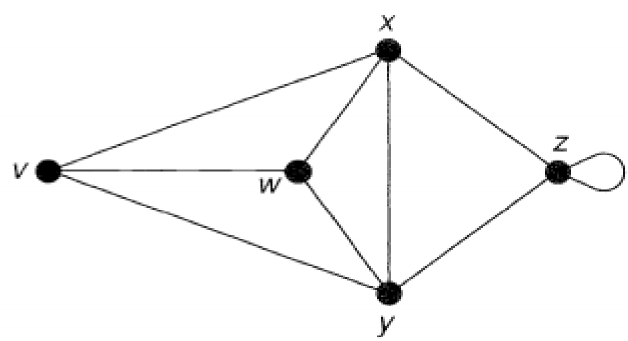
Định nghĩa 2.5

Cho đồ thị G = (V, E). Một đường đi là chuỗi hữu hạn các cạnh có dạng v_0v_1, v_1v_2, …, $v_{m-1}v_m$, được ký hiệu bởi $v_0 \rightarrow v_1 \rightarrow v_2 ... \rightarrow v_m$, trong đó hai cạnh liên tiếp là liền kề. Đường đi xác định một chuỗi các đỉnh v_0, v_1, v_2,…, v_{m-1}, v_m; với v_0 là đỉnh đầu, v_m là đỉnh cuối của đường đi và có thể gọi đường đi đó là đường đi từ v_0 đến v_m.

Số các cạnh mà đường đi đi qua gọi là độ dài đường đi.

Ví dụ 2.8

Cho đồ thị $G_5 = (V_5, E_5)$ sau đây:



Hình 2.10: Ví dụ đường đi giữa các đỉnh.

Hướng dẫn:

Liệt kê các đường đi từ v đến w có độ dài đường đi từ 1 đến 7?

Đường đi	Độ dài
v → w	1
v → x→ w; v → y → w	2
v → x → y → w; v → y → x → w	3
v → x → z → y → w; v → y → z → x → w	4
v → x → z → z → y → w; v → y → z → z → x → w	5
v → x → z → z → y → x → w; v → y → z → z → x → y→ w	6
v → w → x → y → z → z → y → w; v → w → y → x → z → z → x → w	7

Định nghĩa 2.6

Một đường đi chứa ít nhất 1 cạnh, có đỉnh đầu và đỉnh cuối trùng nhau v_0v_1, v_1v_2, …,v_mv_0, được gọi là 1 chu trình.

Trong Ví dụ 2.8:

v → w → x → y → v là một chu trình có độ dài 4

v → x → z → y → w → v là một chu trình có độ dài 5.

Định nghĩa 2.7

Đường đi từ đỉnh u đến đỉnh v được gọi là đường đi đơn giản nếu không đi qua một cạnh nào đó quá một lần.

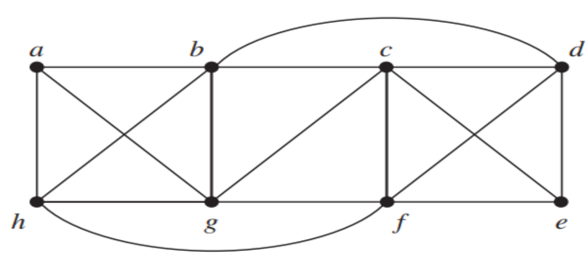
Đường đi từ đỉnh u đến đỉnh v được gọi là đường đi sơ cấp nếu không qua đỉnh nào đó quá một lần.

Chu trình đơn giản là chu trình không lặp lại cạnh.

Chu trình sơ cấp là chu trình không qua đỉnh nào đó quá một lần, ngoại trừ đỉnh đầu và đỉnh cuối trùng nhau.

Ví dụ 2.9

Cho đồ thị $G_6 = (V_6, E_6)$ sau đây:



Hình 2.11: Ví dụ về chu trình và đường đi.

a. Xác định đường đi đơn giản có độ dài 5 từ a đến e?

b. Xác định đường đi đơn giản có độ dài 7 từ a đến e?

c. Xác định đường đi sơ cấp có độ dài 5 từ b đến f?

d. Xác định chu trình đơn giản?

e. Xác định chu trình sơ cấp?

Hướng dẫn:

a. Đường đi đơn giản từ a đến e có độ dài 5:

a → b → c → g → f → e, đi qua các cạnh (a, b), (b, c), (c, g), (g, f), (f, e)

a → h → b → c → f → e, đi qua các cạnh (a, h), (h, b), (b, c), (c, f), (f, e)

a → g → c → d → f → e, đi qua các cạnh (a, g), (g, c), (c, d), (d, f), (f, e)

a → b → h → g → c → e, đi qua các cạnh (a, b), (b, h), (h, g) (g, c), (c, e).

v.v.

b. Đường đi đơn giản từ a đến e có độ dài 7:

a → b → d → c → b → g → f → e, đi qua các cạnh (a, b), (b, d), (d, c), (c, b), (b, g), (g, f), (f, e)

a → h → f → g → h → b → c → e, đi qua các cạnh (a, h), (h, f), (f, g), (g, h), (h, b), (b, c), (c, e)

a → b → h → g → b → c → d → e, đi qua các cạnh (a, b), (b, h), (h, g), (g, b), (b, c), (c, d), (d, e)

c. Đường đi sơ cấp từ b đến f có độ dài 5:

b → c → g → a → h → f, đi qua các đỉnh b, c, g, a, h, f

b → h → g → c → d → f, đi qua các đỉnh b, h, g, c, d, f

b → a → g → c → e → f, đi qua các đỉnh b, a, g, c, e, f.

v.v.

d. Chu trình đơn giản:

a → g → c → b → a, đi qua các cạnh (a, g), (g, c), (c, b), (b, a) có độ dài 4

a → h → g → c → b → a, đi qua các cạnh (a, h), (h, g), (g, c), (c, b), (b, a) có độ dài 5

a → b → d → e → f → g → a, đi qua các cạnh (a, b), (b, d), (d, e), (e, f), (f, g), (g, a) có độ dài 6 a → b → c → d → e → f → g → a, đi qua các cạnh (a, b), (b, c), (c, d), (d, e), (e, f), (f, g), (g, a) có độ dài 7

a → h → f → d → c → f → g → h → b → a, đi qua các cạnh (a, h), (h, f), (f, d), (d, c), (c, f), (f, g), (g, h), (h, b), (b, a) có độ dài 9.

v.v.

e. Chu trình sơ cấp:

Dễ dàng nhận thấy các chu trình sau đây là chu trình đơn giản (vì không lặp lại đỉnh)

a → g → c → b → a, đi qua các đỉnh a, g, c, b, a, có độ dài 4

a → h → g → c → b → a, đi qua các đỉnh a, h, g, c, b, a, có độ dài 5

a → b → d → e → f → g → a, đi qua các đỉnh a, b, d, e, f, g, a, có độ dài 6.

v.v.

Nhận xét:

Qua các ví dụ trên, rút ra nhận xét sau đây:

Đường đi sơ cấp là đường đi đơn giản, điều ngược lại không chắc đúng.

Chu trình sơ cấp là chu trình đơn giản, điều ngược lại không chắc đúng.

2.1.1.5. Đồ thị liên thông

Định nghĩa 2.8
Cho đồ thị G = (V, E). Hai đỉnh u, v $\in V$ của đồ thị G được gọi là liên thông nếu có đường đi từ u đến v. Đồ thị G được gọi là đồ thị liên thông nếu giữa hai đỉnh u, v bất kỳ $\in V$ luôn có đường đi từ u đến v. G liên thông ⇔ $\forall u, v \in V, \exists$ 1 đường đi từ u đến v.

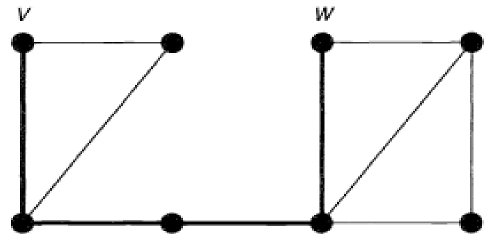
Lưu ý:

Nếu tồn tại đường đi từ u đến v thì u và v cùng thuộc vào 1 thành phần liên thông.

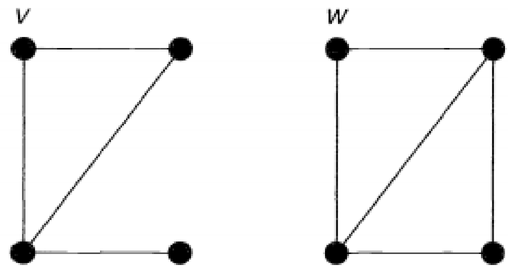
Nếu không có đường đi từ u đến v thì u và v thuộc hai thành phần liên thông khác nhau.

Hiển nhiên G liên thông ⇔ G có đúng một thành phần liên thông.

Ví dụ 2.10



Hình 2.12: Ví dụ về đồ thị liên thông.



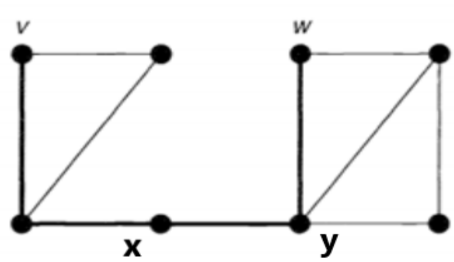
Hình 2.13: Ví dụ về đồ thị gồm 2 thành phần liên thông.

Định lý 2.3
Cho đồ thị G = (V, E) là đơn đồ thị có n đỉnh. Nếu G có k thành phần liên thông thì số cạnh của đồ thị thỏa mãn: $n-k \le m \le \frac{(n-k)\,(n-k+1)}{2}$ với m là số cạnh của đồ thị.

Định nghĩa 2.9
Cầu là cạnh mà khi bỏ cạnh đó đi làm tăng số thành phần liên thông của đồ thị. Khớp là đỉnh mà khi bỏ đỉnh và bỏ những cạnh liên quan đến đỉnh đó làm tăng số thành phần liên thông của đồ thị.

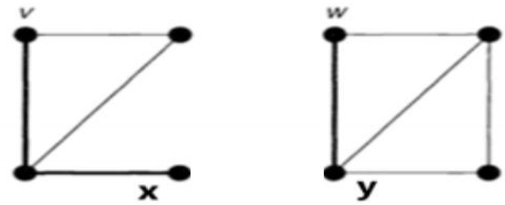
Ví dụ 2.11

Cho đồ thị $G_7 = (V_7, E_7)$ như hình dưới đây:



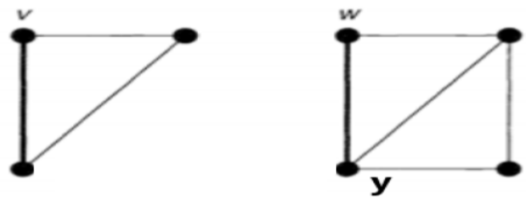
Hình 2.14: Ví dụ về cầu và khớp.

Cạnh (x, y) là cầu, vì khi bỏ cạnh (x, y), đồ thị G chia thành 2 thành phần liên thông, như hình vẽ dưới đây:



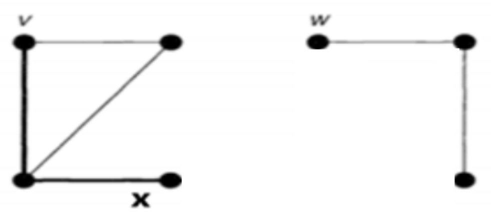
Hình 2.15: Đồ thị G_7 khi bỏ đi cạnh (x, y).

Đỉnh x là khớp vì khi bỏ x và các cạnh có liên quan đến x, làm tăng số thành phần liên thông của đồ thị, như hình vẽ dưới đây:



Hình 2.16: Đồ thị G_7 khi bỏ đi đỉnh x và các cạnh liên quan.

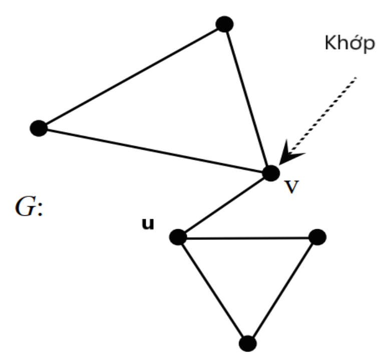
Tương tự như vậy, y cũng là khớp vì khi bỏ y và các cạnh liên quan đến y, làm tăng số thành phần liên thông của đồ thị, như hình vẽ dưới đây:



Hình 2.17: Đồ thị G_7 khi bỏ đi đỉnh y và các cạnh liên quan.

Ví dụ 2.12

Cho đồ thị $G_8 = (V_8, E_8)$ như hình vẽ dưới đây:



Hình 2.18: Ví dụ khác về cầu và khớp.

Xác định cầu và khớp của đồ thị trên?

Hướng dẫn:

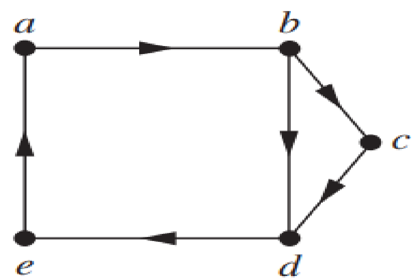
Cạnh (u, v) là cầu, khi bỏ cạnh (u, v) làm tăng số thành phần liên thông của đồ thị.

Hai đỉnh u, v là khớp.

Định nghĩa 2.10 – Tính liên thông của đồ thị có hướng
Đồ thị có hướng G = (V, E) được gọi là liên thông mạnh, nếu giữa hai đỉnh bất kỳ luôn tồn tại đường đi. G liên thông mạnh ⇔ $\forall u, v \in V$, ∃ một đường đi từ u đến v. Đồ thị G được gọi là liên thông yếu, nếu đồ thị vô hướng tương ứng của nó là đồ thị liên thông.

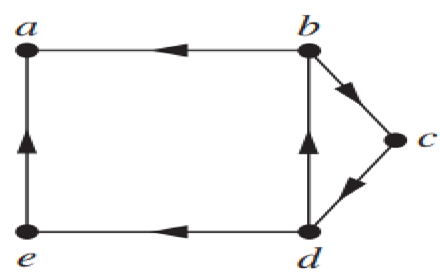
Ví dụ 2.13

Đồ thị $G_9 = (V_9, E_9)$ như hình 2.19 là đồ thị liên thông mạnh, vì từ một đỉnh bất kỳ luôn có đường đi đến các đỉnh còn lại.



Hình 2.19: Ví dụ về đồ thị liên thông mạnh.

Đồ thị $G_{10} = (V_{10}, E_{10})$ như hình 2.20 là đồ thị liên thông yếu, vì nếu bỏ đi hướng đường đi của các cạnh, đồ thị vô hướng thu được là một đồ thị liên thông.



Hình 2.20: Ví dụ về đồ thị liên thông yếu.

2.1.1.6. Đồ thị đẳng cấu

Định nghĩa 2.11

Cho đơn đồ thị $G_1 = (V_1, E_1)$ và đơn đồ thị $G_2 = (V_2, E_2)$.

G_1 đẳng cấu với G_2 nếu có hàm f ánh xạ 1 – 1 từ V_1 đến V_2 thỏa mãn:

Với $\forall a, b \in V_1$, a và b là các đỉnh kề nhau trong G_1 khi và chỉ khi f(a) và f(b) là các đỉnh kề nhau trong G_2.

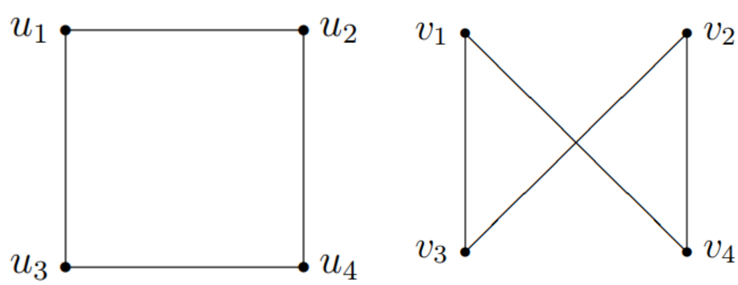
Hàm f như vậy gọi là hàm đẳng cấu.

Nói cách khác, hai đơn đồ thị đẳng cấu với nhau, sẽ có sự tương ứng giữa các đỉnh của hai đồ thị, bảo tồn mối quan hệ phụ thuộc.

Sự đẳng cấu của hai đồ thị đơn giản là một mối quan hệ tương đương.

Ví dụ 2.14

Chứng tỏ rằng hai đồ thị G = (V, E) và $G' = (V', E')$ là đẳng cấu



Hình 2.21: Ví dụ về đồ thị đẳng cấu G và G’.

Hướng dẫn:

Chỉ ra hàm f ánh xạ 1 - 1 từ tập V vào V':

$f(u_1) = v_1$, $f(u_2) = v_4$, $f(u_3) = v_3$, $f(u_4) = v_2$

Dễ dàng để kiểm tra hàm f bảo tồn mối quan hệ kề giữa các đỉnh.

Chúng ta có thể chỉ ra hai đơn đồ thị không đẳng cấu với nhau bằng cách chỉ ra giữa hai đồ thị này không có những tính chất mà hai đồ thị đẳng cấu phải có, những tính chất này là bất biến với hai đồ thị đẳng cấu.

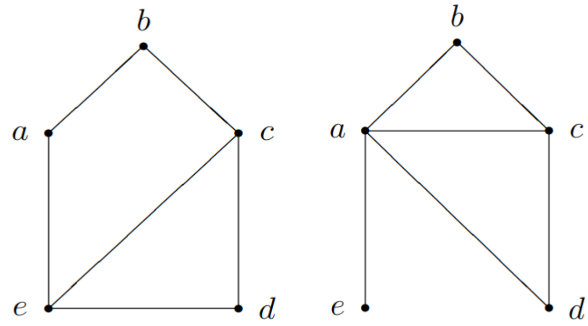
Tính chất của đồ thị đẳng cấu

Hai đồ thị đẳng cấu với nhau nếu thỏa mãn đồng thời 3 điều kiện sau đây:

a. *Hai đồ thị đẳng cấu phải cùng số đỉnh*
b. *Hai đồ thị đẳng cấu phải cùng số cạnh*
c. *Bậc của các đỉnh tương ứng phải bằng nhau*

Ví dụ 2.15

Chứng tỏ rằng hai đồ thị sau đây không đẳng cấu:



Hình 2.22: Ví dụ về đồ thị không đẳng cấu.

Hướng dẫn:

Dễ dàng nhận thấy:

Hai đồ thị cùng số đỉnh (cùng có 5 đỉnh)

Có cùng số cạnh (cùng có 6 cạnh)

Nhưng không cùng số bậc.

Đồ thị thứ nhất: deg(a) = 2, deg(b) = 2, deg(c) = 3, deg (d) = 2, deg(e) = 3

Đồ thị thứ hai: deg(a) = 4, deg(b) = 2, deg(c) = 3, deg(d) = 2, deg(e) = 1

Do vậy 2 đồ thị này không đẳng cấu với nhau.

2.1.2. Các dạng đồ thị đặc biệt

2.1.2.1. Đồ thị đầy đủ

Định nghĩa 2.12

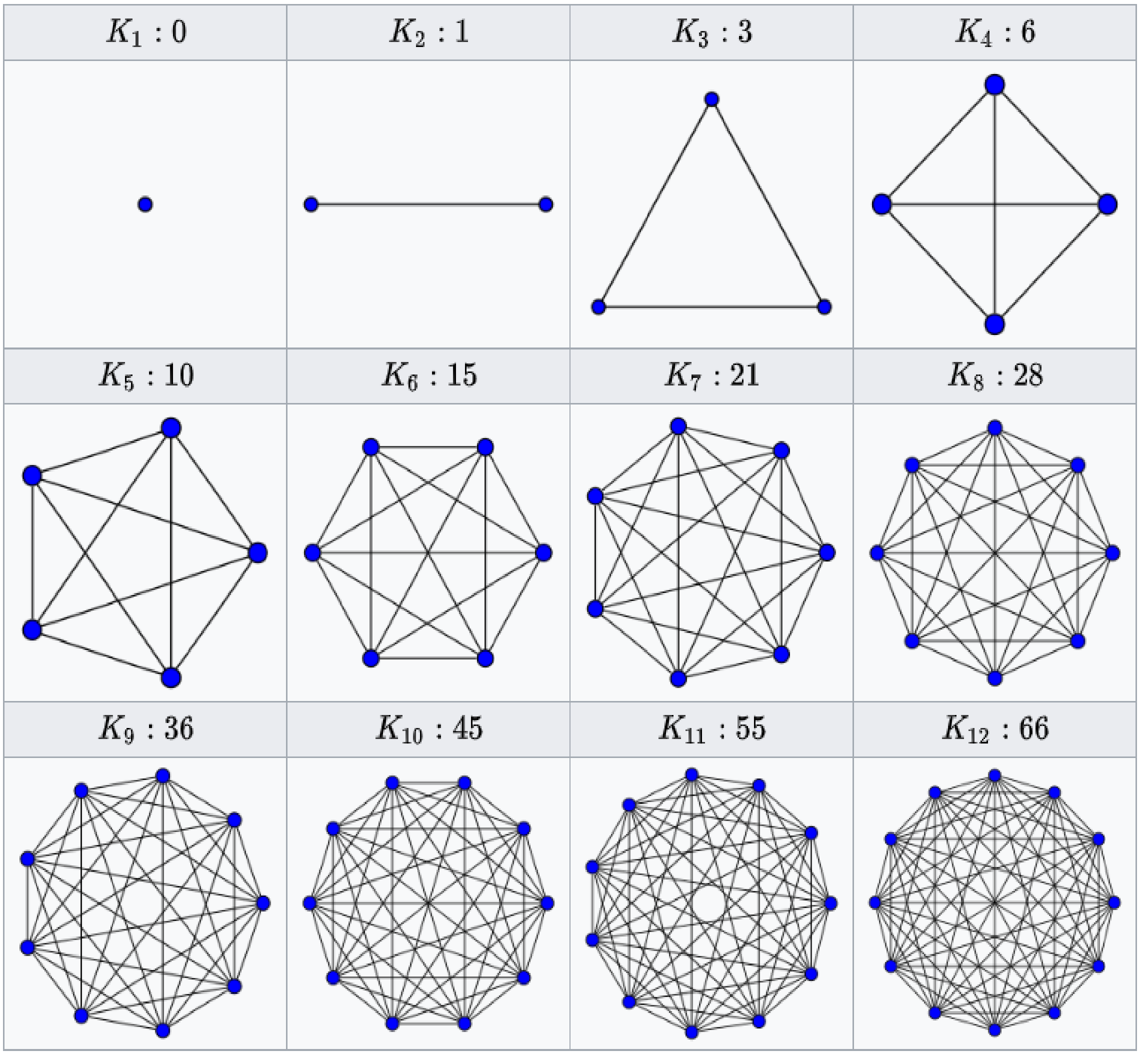
Đồ thị đầy đủ n đỉnh, ký hiệu K_n, là đơn đồ thị mà giữa hai đỉnh bất kỳ luôn có một cạnh nối.

Số cạnh của đồ thị K_n được tính = $\frac{n(n-1)}{2}$ với n là số đỉnh của đồ thị.

Bậc của mỗi đỉnh trong đồ thị = n – 1.

Ví dụ 2.16

Sau đây là danh sách và hình vẽ minh họa các đồ thị đầy đủ có từ 1 đến 12 đỉnh, cùng số cạnh của nó.



Hình 2.23: Minh họa đồ thị đầy đủ.

Số cạnh của một số đồ thị:

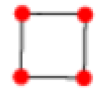
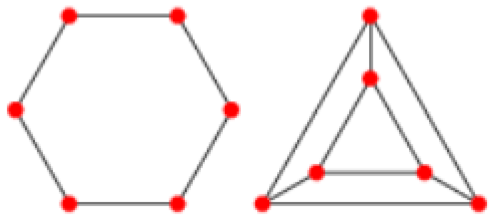
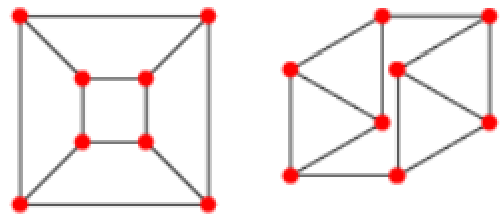
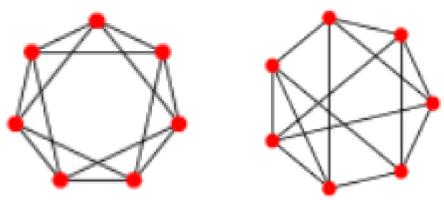
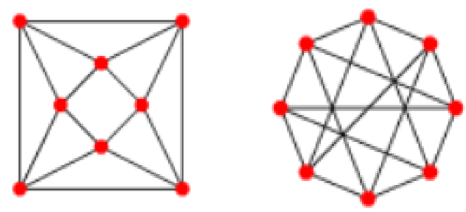
Đồ thị K_5 có 5 đỉnh, số cạnh cạnh của đồ thị $K_5 = \frac{5 \, x \, 4}{2} = 10$ cạnh.

Đồ thị K_{10} có 10 đỉnh, số cạnh của đồ thị $K_{10} = \frac{10 \, x \, 9}{2} = 45$ cạnh.

2.1.2.2. Đồ thị đều

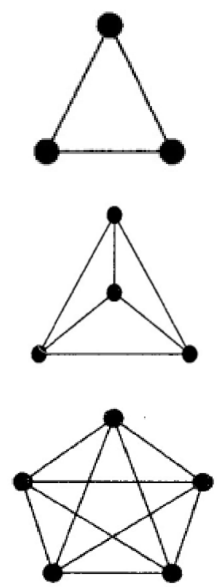
Định nghĩa 2.13
Đồ thị k - đều là đơn đồ thị các đỉnh của đồ thị có bậc bằng nhau và bằng k.

Ví dụ 2.17

Đồ thị 2 – đều với 3 đỉnh 	*Đồ thị 2 – đều với 4 đỉnh* 
Đồ thị 2 – đều với 6 đỉnh 	*Đồ thị 3 – đều với 8 đỉnh* 
Đồ thị 4 – đều với 7 đỉnh 	*Đồ thị 4 – đều với 8 đỉnh* 

Hình 2.24: Minh họa một số đồ thị đều.

Ví dụ 2.18



Đồ thị K_3 là đồ thị 2 – đều

Đồ thị K_3 có 3 đỉnh, bậc của các đỉnh này bằng 2, do đó K_3 là đồ thị 2 – đều

Đồ thị K_4 là đồ thị 3 – đều

Đồ thị K_4 có 4 đỉnh, bậc của các đỉnh này bằng 3, do đó K_4 là đồ thị 3 – đều

Đồ thị K_5 là đồ thị 4 – đều

Đồ thị K_5 có 5 đỉnh, bậc của các đỉnh này bằng 4, do đó K_5 là đồ thị 4 – đều

Hình 2.25: Minh họa về đồ thị Kn là đồ thị (n – 1) – đều.

Bổ đề 2.3

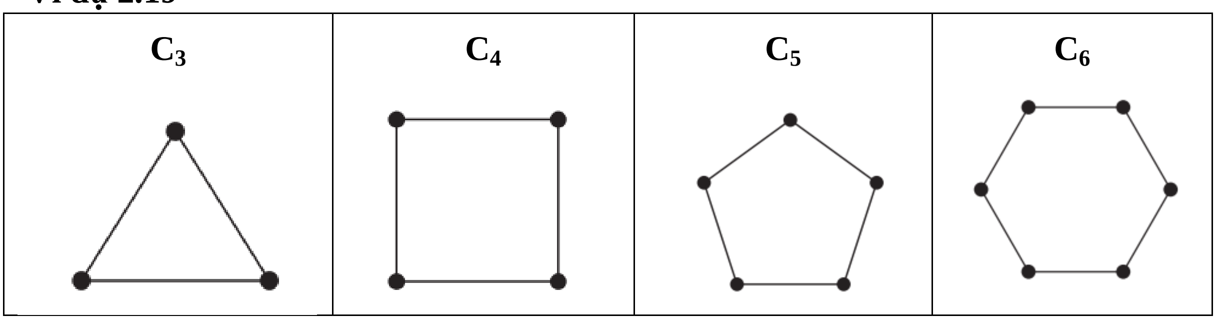
Đồ thị đầy đủ K_n là đồ thị (n - 1) – đều

2.1.2.3. Đồ thị vòng

Định nghĩa 2.14

Đồ thị vòng, ký hiệu là C_n ($n \geq 3$), gồm n đỉnh $v_1, v_2, v_3, \ldots, v_n$ và n cạnh $(v_1, v_2), (v_2, v_3), \ldots, (v_{n-1}, v_n), (v_n, v_1)$.

Ví dụ 2.19



Hình 2.26: Minh họa đồ thị vòng C_3, C_4, C_5, C_6.

Bổ đề 2.4

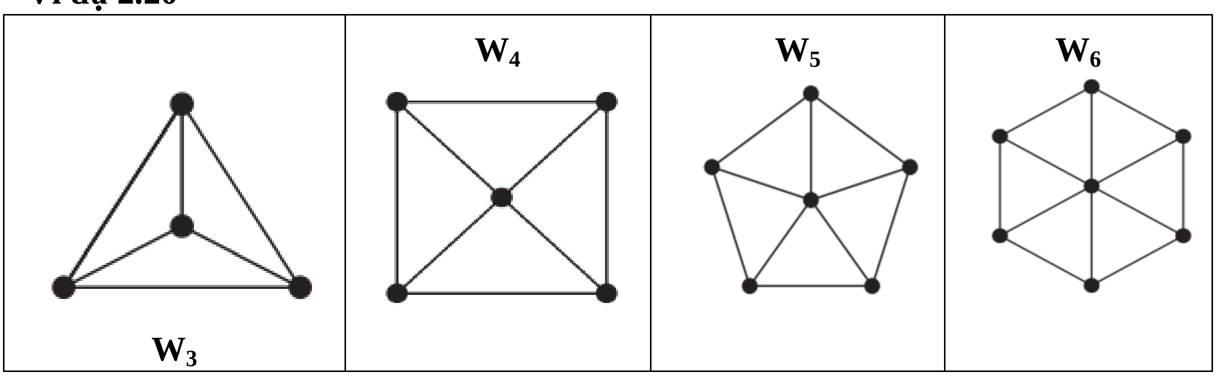
Đồ thị C_n là đồ thị 2 – đều, mỗi đỉnh của đồ thị C_n đều có bậc bằng 2.

2.1.2.4. Đồ thị bánh xe

Định nghĩa 2.15

Đồ thị bánh xe, ký hiệu W_n, là đồ thị nhận được khi thêm 1 đỉnh vào đồ thị C_n với ($n \geq 3$) và nối đỉnh này với các đỉnh của đồ thị C_n.

Ví dụ 2.20



Hình 2.27: Đồ thị bánh xe W_3, W_4, W_5, W_6.

Bổ đề 2.5

Đồ thị W_n là đồ thị có (n + 1) đỉnh trong đó có 1 đỉnh bậc n, n đỉnh bậc 3.

Số cạnh của đồ thị $W_n = 2n$

2.1.2.5. Đồ thị siêu lập phương

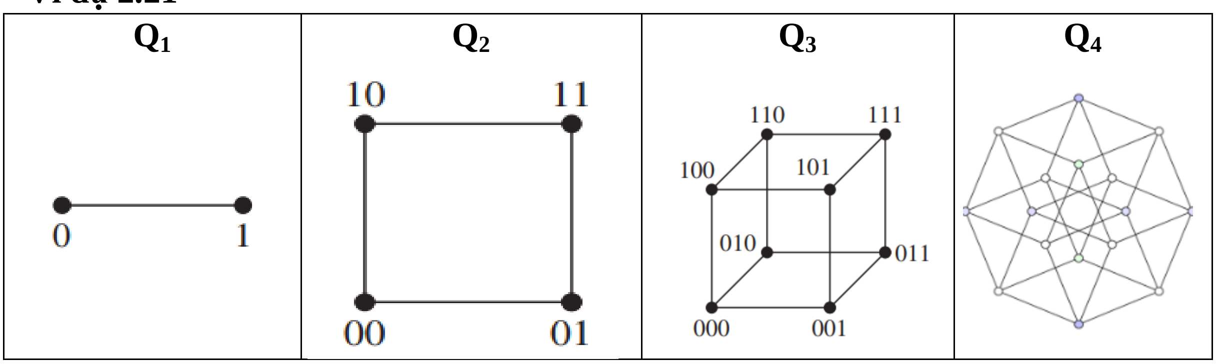
Định nghĩa 2.16

Đồ thị siêu lập phương n miền (n - dimensional hypecube), ký hiệu Q_n là đơn đồ thị có 2^n đỉnh, tương ứng với 2^n xâu nhị phân độ dài n trong đó hai đỉnh kề nhau khi và chỉ khi 2 xâu nhị phân tương ứng với hai đỉnh này chỉ khác nhau đúng một bit.

Mỗi đỉnh của đồ thị Q_n có bậc là n.

Số cạnh của đồ thị Q_n là n. 2^{n-1}

Ví dụ 2.21



Hình 2.28: Minh họa đồ thị Q_1, Q_2, Q_3, Q_4.

2.1.2.6. Đồ thị hai phía

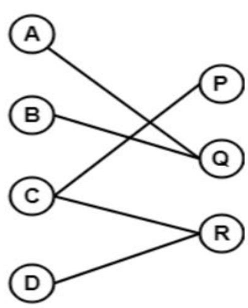
Định nghĩa 2.17

Đồ thị G = (V, E) là đồ thị hai phía nếu thỏa mãn:

- Tập đỉnh V phân hoạch thành 2 tập V_1 và V_2 sao cho $V = V_1 \cup V_2$, $V_1 \cap V_2 \neq \emptyset, V_1 \neq \emptyset, V_2 \neq \emptyset$.

- Cạnh bất kỳ thuộc tập cạnh E có một đỉnh thuộc V_1 và đỉnh còn lại thuộc V_2.

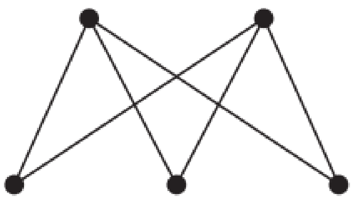
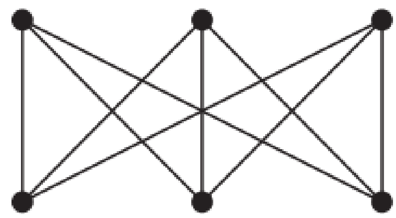
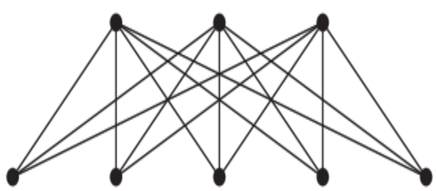
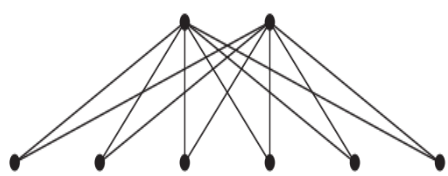
Ví dụ 2.22



Hình 2.29: Ví dụ về đồ thị hai phía.

Định nghĩa 2.18
Đồ thị G = (V, E) là đồ thị hai phía đầy đủ nếu thỏa mãn: - Tập đỉnh V phân hoạch thành 2 tập V_1 và V_2 sao cho $V = V_1 \cup V_2$, $V_1 \cap V_2 \neq \emptyset, V_1 \neq \emptyset, V_2 \neq \emptyset$ - $\forall v_1 \in V_1, \forall v_2 \in V_2$ ta luôn có $(v_1, v_2) \in E$ Nếu $\lvert V_1 \rvert = m$, $\lvert V_2 \rvert = n$ thì đồ thị G được ký hiệu là $K_{m,\, n}$ Đồ thị hai phía đầy đủ G có m x n cạnh, bậc của các đỉnh thuộc tập V_1 bằng n và bậc của các đỉnh thuộc tập V_2 bằng m.

Ví dụ 2.23

$\mathbf{K_{2,\,3}}$	$\mathbf{K_{3,3}}$
	
$\mathbf{K_{3,5}}$	$\mathbf{K_{2,6}}$
	

Hình 2.30: Một số đồ thị đầy đủ.

Ví dụ 2.24

Cho đồ thị $K_{4,\,3}$ với $V = V_1 \cup V_2$ trong đó V_1 ={A, B, C, D}, V_2 = {P, Q, R}.

Xác định số cạnh của $K_{4,\,3}$ và bậc của các đỉnh trong đồ thị?

Hướng dẫn:

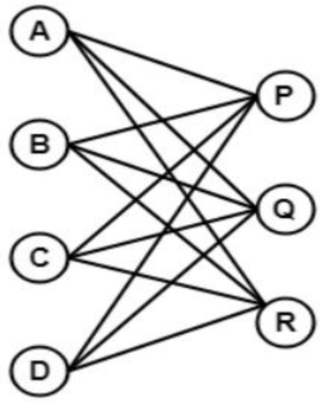
Số cạnh của đồ thị $K_{4,\,3}$ = 4 x 3 = 12

Bậc các đỉnh của tập V_1:

deg(A) = deg(B) = deg(C) = deg(D) = 3.

Bậc các đỉnh của tập V_2:

deg(P) = deg(Q) = deg(R) = 3.



Hình 2.31: Đồ thị $K_{4,3}$.

2.1.3. Biểu diễn đồ thị

Các bài toán trên đồ thị có ý nghĩa rất lớn trong đời sống. Chẳng hạn, chúng ta có thể định vị vị trí hiện tại trên bản đồ, xác định các đường đi từ một vị trí đến một vị trí khác, ước lượng khoảng cách giữa các ngã tư, v.v. nhờ các ứng dụng được xây dựng trên máy tính và các thiết bị thông minh.

Làm thế nào để biểu diễn đồ thị trong máy tính? Để lưu trữ đồ thị và thực hiện các yêu cầu trên đồ thị, chẳng hạn duyệt đồ thị, hoặc tìm cây bao trùm tối thiểu của đồ thị, hoặc tìm đường đi ngắn nhất v.v., chúng ta cần phải tìm những cấu trúc dữ liệu thích hợp để mô tả đồ thị. Tùy vào từng bài toán cụ thể, việc lựa chọn cấu trúc dữ liệu thích hợp sẽ rút ngắn thời gian thực hiện, tiết kiệm chi phí và đem lại hiệu quả cho các chương trình, ứng dụng. Trong mục 2.1.3, chúng ta sẽ xem xét một số cấu trúc dữ liệu được sử dụng để biểu diễn đồ thị trên máy tính.

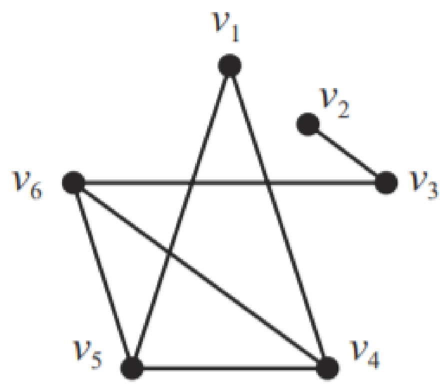
2.1.3.1. Ma trận kề

Cách biểu diễn đồ thị trên máy tính được sử dụng nhiều nhất là biểu diễn đồ thị bằng ma trận kề. Trong mục này, chúng ta sẽ tìm hiểu cách biểu diễn bằng ma trận kề của đơn đồ thị vô hướng, đơn đồ thị có hướng, đa đồ thị và đồ thị có trọng số.

Định nghĩa 2.19
Cho đơn đồ thị vô hướng G = (V, E), trong đó V = $\{v_1, v_2, v_3, \ldots, v_n\}$ Ma trận kề (adjacency matrix) biểu diễn đơn đồ thị G là một ma trận vuông n x n thỏa mãn A = $[\varphi_{ij}]$ trong đó $$\varphi_{ij} = \begin{cases} 1 \text{ nếu } v_i \text{ kề với } v_j \\ 0 \text{ nếu } v_i \text{ không kề } v_j \end{cases}$$

Ví dụ 2.25

Cho đồ thị $G_{11} = (V_{11}, E_{11})$ sau đây:



Hình 2.32: Ví dụ về biểu diễn đồ thị G_{11} bằng ma trận kề.

Hướng dẫn:

Ma trận kề biểu diễn đồ thị G_{11} như sau:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Tính chất
- Ma trận kề biểu diễn đơn đồ thị vô hướng là ma trận đối xứng, tức là $[\varphi_{ij}] = [\varphi_{ji}]$ - Các phần tử trên đường chéo chính bằng 0 - Tổng các phần tử trên dòng i bằng bậc của đỉnh thứ i - Tổng các phần tử trên cột j bằng bậc của đỉnh thứ j.

Ví dụ 2.26

Xác định bậc của đỉnh v_5 của đồ thị G_{11}?

Hướng dẫn:

Tổng các phần tử trên dòng 5 bằng 3, do đó bậc của đỉnh $v_5 = 3$

Tổng các phần tử trên cột 5 bằng 3, do đó bậc của đỉnh $v_5 =3$

Cả hai cách tính đều cho kết quả $\deg(v_5)= 3$.

Định nghĩa 2.20

Cho đơn đồ thị có hướng G = (V, E), trong đó V = $\{v_1, v_2, v_3, \ldots, v_n\}$

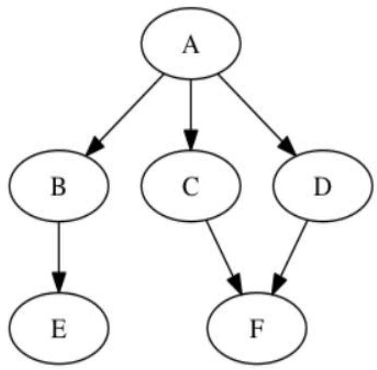
Ma trận kề (adjacency matrix) biểu diễn đơn đồ thị có hướng G là một ma trận vuông n x n thỏa mãn A = $[\varphi_{ij}]$ trong đó:

$$\varphi_{ij} = \begin{cases} 1 \text{ nếu } v_i \text{ kề với } v_j \ (\textit{có cung từ } v_i \textit{ đến } v_j) \\ 0 \text{ nếu } v_i \text{ không kề } v_j \ (\textit{không có cung từ } v_i \textit{ đến } v_j) \end{cases}$$

Ví dụ 2.27

Cho đồ thị có hướng $G_{12} = (V_{12}, E_{12})$

Trong đó V_{12} = {A, B, C, D, E, F} và E_{12} ={(A, B), (A, C), (A, D), (B, E), (C, F), (D, F)}.



Hình 2.33: Ma trận kề biểu diễn đồ thị có hướng G_{12}.

Xác định ma trận kề biểu diễn đồ thị G_{12}

Hướng dẫn:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Tính chất

- Ma trận kề biểu diễn đơn đồ thị có hướng không phải ma trận đối xứng, tức là $[\varphi_{ij}] \neq [\varphi_{ji}]$
- Các phần tử trên đường chéo chính bằng 0
- Tổng các phần tử trên dòng i bằng bậc ra của đỉnh thứ i ($deg^+(i)$)
- Tổng các phần tử trên cột j bằng bậc vào của đỉnh thứ j ($deg^-(j)$).

Ví dụ 2.28

Dựa vào ma trận kề ở Ví dụ 2.27, xác định bậc vào và bậc ra các đỉnh của đồ thị.

Hướng dẫn:

Tổng các phần tử trên dòng 1 bằng 3, do đó $deg^+(A) = 3$;

Tổng các phần tử trên cột 1 bằng 0, do đó $deg^-(A) = 0$;

Tương tự, dễ dàng xác định được:

$deg^+(B) = 1$, $deg^-(B) = 1$

$deg^+(C) = 1$, $deg^-(C) = 1$

$deg^+(D) = 1$, $deg^-(D) = 1$

$deg^+(E) = 0$, $deg^-(E) = 1$

$deg^+(F) = 0$, $deg^-(F) = 2$.

Định nghĩa 2.21

Cho đa đồ thị vô hướng G = (V, E) trong đó V ={v_1, v_2,..., v_n}, E là tập cạnh có chứa khuyên hoặc cạnh song song.

Ma trận kề biểu diễn G là ma trận vuông n x n: A = $[\varphi_{ij}]$ được xác định như sau:

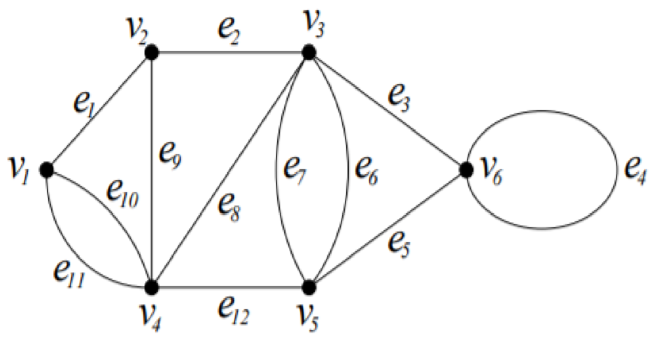
$$\varphi_{ij} = \begin{cases} k \text{ với } k \text{ là số cạnh từ đỉnh } v_i \text{ đến đỉnh } v_j \\ 0 \text{ nếu đỉnh } v_i \text{ không kề với đỉnh } v_j \end{cases}$$

Tính chất

- Ma trận kề biểu diễn đa đồ thị vô hướng là ma trận đối xứng, tức là $[\varphi_{ij}] = [\varphi_{ji}]$
- Các phần tử trên đường chéo chính thể hiện đỉnh có khuyên hay không.
- Tổng các phần tử trên dòng i (cột j) bằng bậc của đỉnh thứ i (đỉnh j).

Ví dụ 2.29

Cho đa đồ thị $G_{13} = (V_{13}, E_{13})$ với V_{13} = {v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6} và E_{13} = {e_1, e_2, e_3,..., e_9, e_{10}, e_{11}} như trong hình vẽ 2.34 dưới đây:



Hình 2.34: Ví dụ về ma trận kề biểu diễn đa đồ thị vô hướng.

Xác định ma trận kề biểu diễn đồ thị G_{13}.

Hướng dẫn:

Ma trận kề biểu diễn đồ thị G_{13} là ma trận vuông 6 x 6

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Dễ dàng xác định được bậc của các đỉnh đồ thị (bằng cách cộng theo dòng hoặc theo cột).

Đỉnh	**Bậc**
v_1	3
v_2	3
v_3	5
v_4	5
v_5	4
v_6	4

Lưu ý:

Với đa đồ thị có hướng cách biểu diễn ma trận kề tương tự.

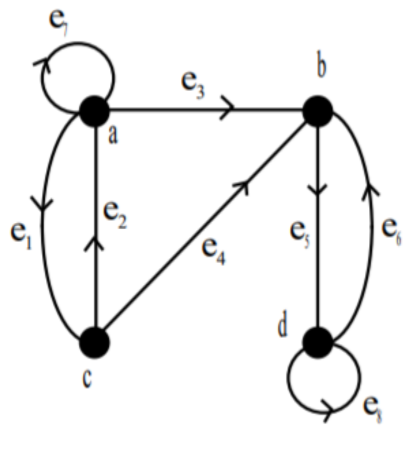
Ví dụ 2.30

Cho đồ thị $G_{14} = (V_{14}, E_{14})$:

Tập đỉnh $V_{14} = \{a, b, c, d\}$

Tập các cung $E_{14} = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6, e_7, e_8\}$

G_{14} như hình vẽ 2.35 sau đây:



Hình 2.35: Minh họa về ma trận kề biểu diễn đa đồ thị có hướng.

Xác định ma trận kề biểu diễn đồ thị G_{14}?

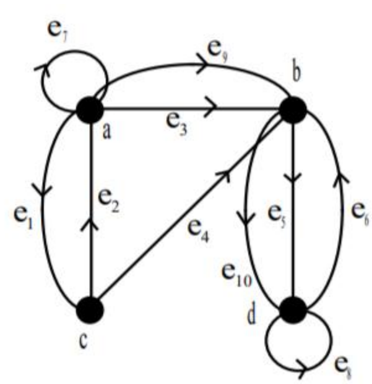
Hướng dẫn:

Ma trận kề biểu diễn đồ thị G_{14}:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Ví dụ 2.31

Cho đa đồ thị $G_{15} = (V_{15}, E_{15})$ như hình vẽ 2.36 dưới đây



Hình 2.36: Ví dụ khác về ma trận kề biểu diễn đa đồ thị có hướng.

Xác định ma trận kề biểu diễn đồ thị G_{15}?

Hướng dẫn:

Ma trận kề biểu diễn cho đồ thị G_{15}:

$$\begin{matrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{matrix}$$

Lưu ý:

Ma trận kề biểu diễn đa đồ thị có hướng (giả đồ thị) không có tính chất đối xứng.

Trường hợp đồ thị có trọng số thì thay vì sử dụng ma trận kề, người ta sử dụng trọng số của các cạnh làm giá trị cho các phần tử của ma trận. Khi đó ma trận biểu diễn đồ thị này được gọi là ma trận trọng số.

Định nghĩa 2.22

Cho đồ thị G = (V, E) trong đó V ={v_1, v_2,...,v_n}, E là tập cạnh trong đó các cạnh được gán các trọng số thể hiện giá trị của cạnh.

Ma trận kề biểu diễn G là ma trận vuông n x n: A = [φ_{ij}] được xác định như sau:

$$\varphi_{ij} = \begin{cases} c(i,j) \text{ với } c(i,j) \text{ là trọng số của cạnh } (v_i, v_j) \\ \theta \text{ nếu đỉnh } v_i \text{ không kề với đỉnh } v_j \end{cases}$$

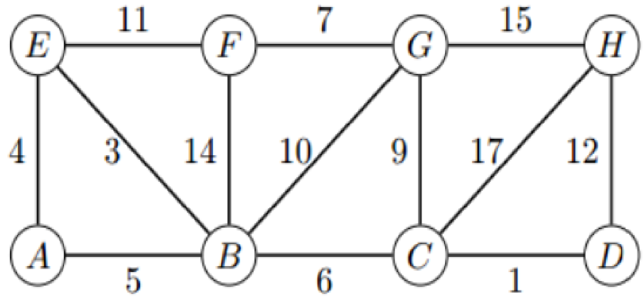
Trong đó θ có thể nhận các giá trị 0, $+\infty, -\infty$ tùy vào trường hợp cụ thể.

Lưu ý:

Các giá trị mà θ có thể nhận là 0 hoặc "vô cực" (∞) có cùng chung một ý nghĩa là không có cạnh nào nối giữa hai đỉnh v_i và v_j. Trong nhiều thuật toán đồ thị, mục đích là tìm ra tập con các cạnh (thỏa mãn những ràng buộc nhất định) để giảm thiểu tổng trọng số của các cạnh trong tập con đó (Bài toán tìm cây bao trùm tối thiểu, sẽ đề cập ở phần sau của giáo trình). Trong trường hợp đó, trọng lượng của một cạnh thể hiện "*chi phí*" của cạnh trong giải pháp của thuật toán. Do đó, trong nhiều trường hợp, ta có thể diễn giải một cạnh với trọng lượng "vô hạn" ($+\infty$ hoặc $-\infty$) khi ta thực sự không muốn cạnh đó trong giải pháp (thậm chí nó không tồn tại trong đồ thị gốc). Chính vì lý do đó, để đơn giản trong các thuật toán đồ thị khi muốn diễn tả các cạnh không tồn tại bằng các trọng số "vô cực" (đặc biệt với các đồ thị dày đặc, tức là đồ thị có nhiều cạnh so với số lượng đỉnh).

Ví dụ 2.32

Cho đồ thị trọng số G_{16} sau đây:



Hình 2.37: Ví dụ về ma trận kề biểu diễn đồ thị trọng số G_{16}.

Xác định ma trận trọng số biểu diễn đồ thị G_{16} ?

Hướng dẫn:

Ma trận trọng số biểu diễn đồ thị G_{16} như sau:

$$\begin{array}{c} \\ A \\ B \\ C \\ D \\ E \\ F \\ G \\ H \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccccc} A & B & C & D & E & F & G & H \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 5 & \infty & \infty & 4 & \infty & \infty & \infty \\ 5 & 0 & 6 & \infty & 3 & 14 & 10 & \infty \\ \infty & 6 & 0 & 1 & \infty & \infty & 9 & 17 \\ \infty & \infty & 1 & 0 & \infty & \infty & \infty & 12 \\ 4 & 3 & \infty & \infty & 0 & 11 & \infty & \infty \\ \infty & 14 & \infty & \infty & 11 & 0 & 7 & \infty \\ \infty & 10 & 9 & \infty & \infty & 7 & 0 & 15 \\ \infty & \infty & 17 & 12 & \infty & \infty & 15 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

Ưu và nhược điểm của ma trận kề

Ưu điểm: Ma trận kề cho phép xác định nhanh hai đỉnh có kề nhau hay không.

Nhược điểm: Không gian bộ nhớ lớn, cần n^2 ô nhớ để biểu diễn đồ thị, trong trường hợp đồ thị có n đỉnh.

2.1.3.2. Ma trận liên thuộc đỉnh cạnh

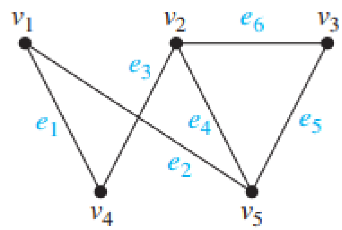
Định nghĩa 2.23

Cho đồ thị vô hướng G = (V, E) trong đó tập đỉnh V = $\{v_1, v_2, ..., v_n\}$, tập cạnh E = $\{e_1, e_2, e_3, \ldots, e_m\}$. Ma trận liên thuộc đỉnh cạnh biểu diễn mối quan hệ giữa đỉnh và cạnh của đồ thị là ma trận n x m: A = $[\varphi_{ij}]$ được xác định như sau:

$$\varphi_{ij} = \begin{cases} 1 \ khi\ đỉnh\ v_i \text{ là } đỉnh\ thuộc\ cạnh\ e_j \\ 0\ khi\ đỉnh\ v_i\ không\ liên\ quan\ cạnh\ e_j \end{cases}$$

Ví dụ 2.33

Cho đồ thị G_{17} sau đây:



Hình 2.38: Ví dụ về ma trận liên thuộc đỉnh cạnh với đồ thị vô hướng.

Xác định ma trận liên thuộc đỉnh cạnh biểu diễn đồ thị G_{17}?

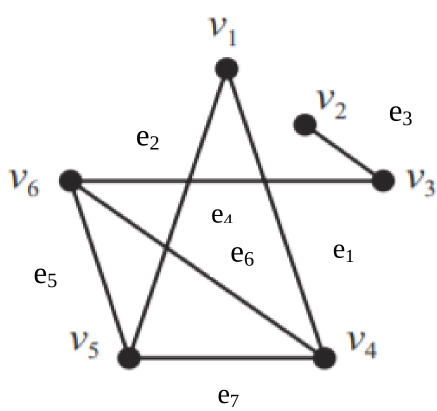
Hướng dẫn:

Ma trận liên thuộc đỉnh cạnh biểu diễn đồ thị vô hướng G_{17}

$$\begin{array}{c} \\ v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & e_5 & e_6 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

Ví dụ 2.34

Cho đồ thị G_{18} như hình 2.39 sau đây:



Hình 2.39: Ví dụ khác về ma trận liên thông biểu diễn đơn đồ thị G_{18}.

Xác định ma trận liên thuộc đỉnh cạnh biểu diễn đồ thị G_{18}.

Hướng dẫn:

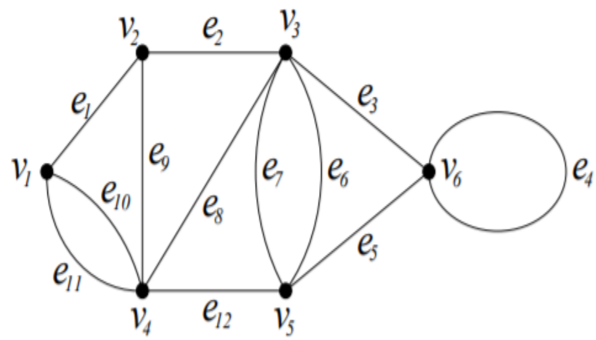
Ma trận liên thuộc đỉnh cạnh biểu diễn đồ thị G_{18} như sau:

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccccccc} e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & e_5 & e_6 & e_7 \end{array} \\ \begin{array}{c} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \\ v_6 \end{array} & \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

Ma trận liên thuộc đỉnh cạnh cũng được sử dụng để biểu diễn cho đa đồ thị (chứa khuyên và cạnh song song).

Ví dụ 2.35

Cho đa đồ thị vô hướng G_{19} sau đây:



Hình 2.40: Ví dụ ma trận liên thuộc đỉnh cạnh biểu diễn đa đồ thị.

Xác định ma trận liên thuộc đỉnh cạnh biểu diễn đồ thị G_{19}

Hướng dẫn:

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cccccccccccc} e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & e_5 & e_6 & e_7 & e_8 & e_9 & e_{10} & e_{11} & e_{12} \end{array} \\ \begin{array}{c} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \\ v_6 \end{array} & \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

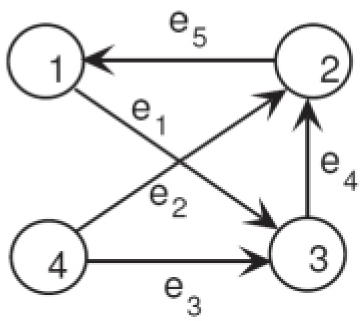
Định nghĩa 2.24

Cho đơn đồ thị có hướng G = (V, E) trong đó tập đỉnh V = {v_1, v_2,...,v_n}, tập cung E ={e_1, e_2, e_3,…, e_m}. Ma trận liên thuộc đỉnh cạnh biểu diễn mối quan hệ giữa đỉnh và cạnh của đồ thị là ma trận n x m: A = [φ_{ij}] được xác định như sau:

$$\varphi_{ij} = \begin{cases} 1\ khi\ đỉnh\ v_i\ \text{là}\ đỉnh\ \text{đầu}\ của\ cung\ e_j \\ -1\ khi\ đỉnh\ v_i\ \text{là}\ đỉnh\ cuối\ của\ cung\ e_j \\ 0\ khi\ đỉnh\ v_i\ không\ liên\ quan\ cung\ e_j \end{cases}$$

Ví dụ 2.36

Cho đồ thị có hướng G_{20} sau đây:



Hình 2.41: Ví dụ về ma trận liên thuộc đỉnh cạnh biểu diễn đồ thị có hướng.

Hướng dẫn:

Ma trận liên thuộc đỉnh cạnh biểu diễn đồ thị có hướng G_{20}

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccccc} e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & e_5 \end{array} \\ \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array} & \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

Ưu và nhược điểm của ma trận liên thuộc đỉnh cạnh

Ưu điểm: Biểu diễn đồ thị bằng ma trận liên thuộc đỉnh cạnh sẽ tiết kiệm bộ nhớ hơn trong trường hợp đồ thị có ít cạnh.

Nhược điểm: Biểu diễn phức tạp.

2.1.3.3. Danh sách cạnh

Nếu số cạnh của đồ thị thỏa mãn điều kiện m < 6n (với n là số đỉnh của đồ thị, m là số cạnh của đồ thị) (Trong trường hợp này, đồ thị có ít cạnh được gọi là đồ thị thưa), người ta dùng phương pháp danh sách cạnh để biểu diễn đồ thị.

Trong cài đặt, người ta sử dụng mảng một chiều để lưu trữ danh sách cạnh, mỗi phần tử của mảng thể hiện thông tin về hai đỉnh kề nhau. Ưu điểm của phương pháp danh sách cạnh khi biểu diễn đồ thị là giảm không gian lưu trữ. Nếu phương pháp biểu diễn bằng ma trận kề cần số ô nhớ được sử dụng là n^2 (n là số đỉnh của đồ thị), thì phương pháp biểu diễn danh sách cạnh chỉ cần 2m ô nhớ (m là số cạnh của đồ thị). Vì thế nếu số cạnh của đồ thị (m) bé, thì chi phí duyệt và không gian bộ nhớ của chương trình được giảm đáng kể. Thuật toán điển hình sử dụng phương pháp này là thuật toán tìm cây bao trùm tối thiểu Kruskal (được đề cập ở phần sau).

Định nghĩa 2.25

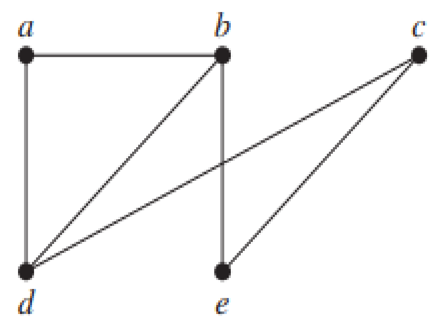
Cho đồ thị vô hướng (có hướng) G = (V, E). Trong đó tập đỉnh V = {v_1, v_2,…, v_n}, tập cạnh (cung) E= {e_1, e_2,…, e_m}.

Phương pháp biểu diễn đồ thị bằng danh sách cạnh (cung) sẽ lưu trữ tất cả các cạnh (cung) của đồ thị. Sử dụng 2 mảng Dau[], Cuoi[] để lưu các đỉnh đầu và các đỉnh cuối của tất cả các đỉnh của đồ thị.

Ký hiệu Dau[e] = u, Cuoi[e] = v, với ∀e = (u, v) ∈ E là 1 cạnh (cung) bất kỳ của đồ thị.

Ví dụ 2.37

Cho đồ thị vô hướng G_{21} sau đây:



Hình 2.42: Ví dụ biểu diễn đồ thị bằng danh sách cạnh.

Biểu diễn đồ thị bằng danh sách cạnh.

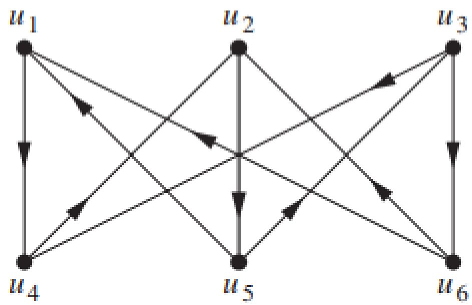
Hướng dẫn:

Sử dụng 2 mảng Dau[], Cuoi[] để lưu trữ đỉnh đầu và đỉnh cuối các cạnh của đồ thị.

Cạnh	**Dau[]**	**Cuoi[]**
(a, b)	a	b
(a, d)	a	d
(b, d)	b	d
(b, e)	b	e
(c, d)	c	d
(c, e)	c	e

Ví dụ 2.38

Cho đồ thị có hướng G_{22} sau đây:



Hình 2.43: Ví dụ danh sách cạnh biểu diễn đồ thị có hướng G_{22}.

Hướng dẫn:

Cung	Dau[]	Cuoi[]
(u_1, u_4)	u_1	u_4
(u_2, u_5)	u_2	u_5
(u_3, u_4)	u_3	u_4
(u_3, u_6)	u_3	u_6
(u_4, u_2)	u_4	u_2
(u_5, u_1)	u_5	u_1
(u_5, u_3)	u_5	u_3
(u_6, u_1)	u_6	u_1
(u_6, u_2)	u_6	u_2

Nhận xét

Ưu điểm:

- Nếu đồ thị có m cạnh (cung) thì cần 2m ô nhớ để biểu diễn danh sách cạnh. Như vậy trong trường hợp đồ thị có ít cạnh (đồ thị thưa) thỏa mãn m < 6n, cách biểu diễn đồ thị bằng danh sách cạnh sẽ tiết kiệm bộ nhớ.

- Trong một số bài toán, ta cần phải xét tất cả các cạnh của đồ thị (chẳng hạn thuật toán tìm cây bao trùm tối thiểu Kruskal) để việc duyệt các cạnh được thuận lợi hơn.

Nhược điểm:

- Để xác định những đỉnh là đỉnh kề của đỉnh nào đó cho trước cần phải duyệt qua danh sách tất cả các cạnh của đồ thị, số phép so sánh là m. Điều này làm tốn thời gian nếu đồ thị có nhiều cạnh (đồ thị dày đặc).

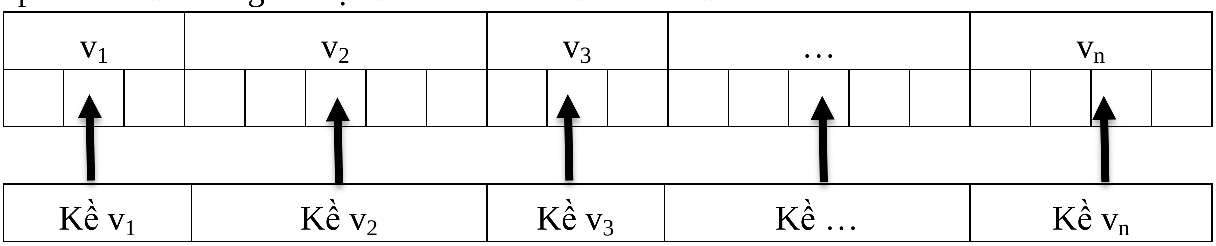
2.1.3.4. Danh sách kề

Để khắc phục nhược điểm của ma trận kề (tốn không gian bộ nhớ, cần n^2 ô nhớ nếu đồ thị có n đỉnh) và nhược điểm của danh sách cạnh (tốn thời gian để xác định các đỉnh kề của một đỉnh v nào đó), người ta đưa ra cách biểu diễn đồ thị bằng danh sách kề.

Định nghĩa 2.26
Cho đồ thị G = (V, E). Với $\forall v \in V$, ta lưu trữ danh sách các đỉnh kề của đỉnh v: ke[v] = $\{u \in V \ sao\ cho\ (u, v) \in E\}$.   Nói cách khác, ke[u] là một mảng chỉ chứa các đỉnh kề với v.

Để biểu diễn đồ thị bằng danh sách kề trong quá trình cài đặt thực tế, người ta sử dụng một trong hai phương pháp sau:

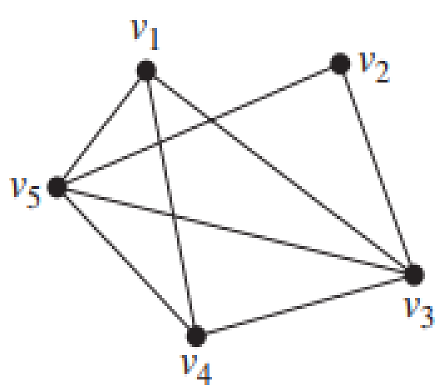
+ Dùng một mảng các đỉnh gồm n phần tử đại diện cho n đỉnh của đồ thị, mỗi phần tử của mảng là một danh sách các đỉnh kề của nó.



+ Sử dụng danh sách móc nối đơn: Với mỗi đỉnh v của đồ thị, ta sử dụng một danh sách móc nối các đỉnh kề của v, đồng nghĩa với việc tại một đỉnh v $\in V$ ta sử dụng list[v] chứa các đỉnh kề của v.

Ví dụ 2.39

Cho đồ thị G_{23} sau đây:



Hình 2.44: Minh họa biểu diễn đồ thị bằng danh sách kề.

Xác định danh sách kề biểu diễn G_{23}

Hướng dẫn:

Sử dụng danh sách liên kết đơn biểu diễn danh sách kề của đồ thị G_{23}

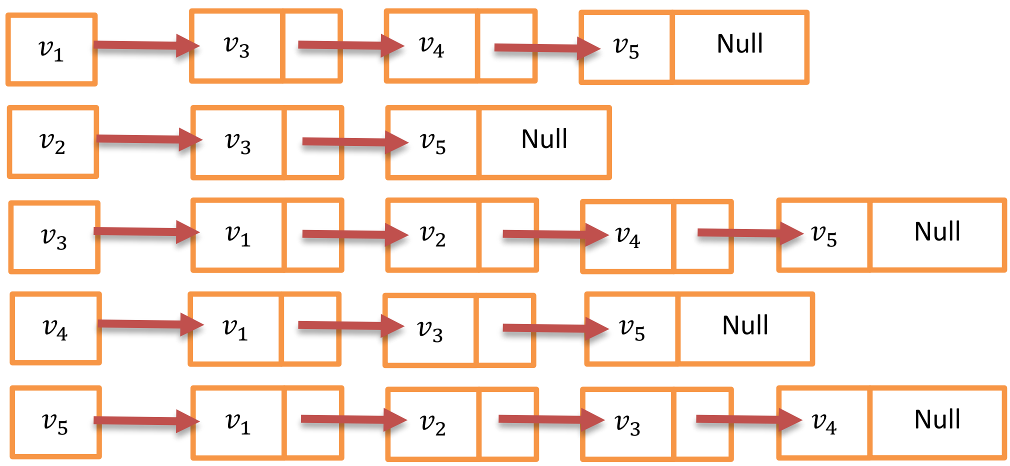
Với mỗi đỉnh, xác định các đỉnh kề.

Sử dụng danh sách móc nối đơn để biểu diễn cho danh sách kề.

Với mỗi đỉnh, thể hiện danh sách mối nối, mỗi node gồm hai thành phần:

- Thành phần thứ nhất là tên đỉnh.
- Thành phần thứ hai link lưu địa chỉ của đỉnh kế tiếp.

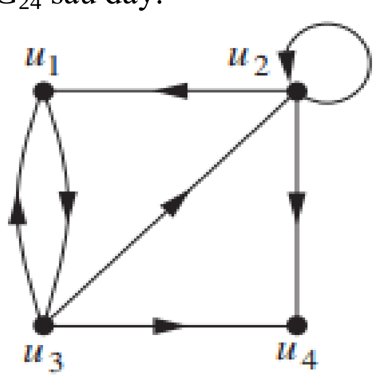
Node cuối cùng, thành phần link trỏ tới Null.



Hình 2.45: Danh sách kề biểu diễn đồ thị G23.

Ví dụ 2.40

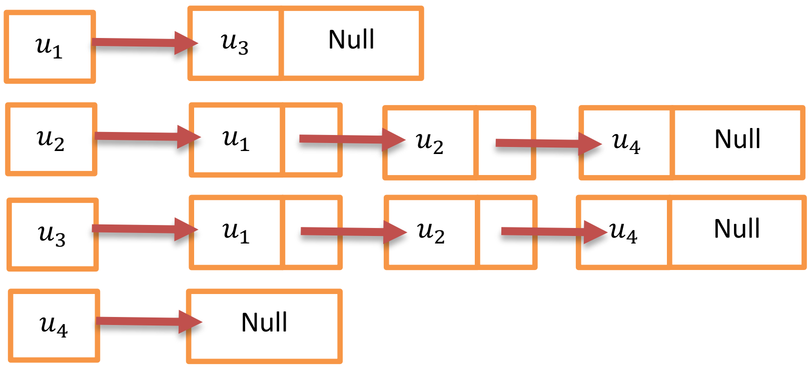
Cho đồ thị có hướng G_{24} sau đây:



Hình 2.46: Minh họa biểu diễn danh sách kề với đồ thị có hướng.

Xác định danh sách kề biểu diễn đồ thị G_{24}?

Hướng dẫn:



Hình 2.47: Danh sách kề biểu diễn đồ thị G_{24}.

Nhận xét

Ưu điểm:

- Thuận lợi cho việc các đỉnh kề của một đỉnh bất kỳ của đồ thị.

Nhược điểm:

- Cài đặt phức tạp.

2.2. CÁC THUẬT TOÁN TÌM KIẾM TRÊN ĐỒ THỊ

Một trong những bài toán thu hút sự quan tâm của các nhà khoa học và có ứng dụng trong việc giải quyết các vấn đề thực tế là bài toán duyệt đồ thị, tìm kiếm đường đi qua các đỉnh của đồ thị. Trong nội dung của môn học này, chúng ta đề cập đến hai thuật toán:

- Thuật toán tìm kiếm theo chiều sâu (Depth First Search – DFS)

- Thuật toán tìm kiếm theo chiều rộng (Breadth First Search – BFS).

2.2.1. Tìm kiếm theo chiều sâu

Phát biểu bài toán

Input: Cho đồ thị G = (V, E) liên thông, không chứa khuyên và một đỉnh u thuộc G.

Output: Tập hợp các đỉnh được thăm của đồ thị, xuất phát từ u.

Tư tưởng thuật toán

Xét đồ thị G(V, E).

Xuất phát từ một đỉnh u thuộc V, ta sẽ thăm tới đỉnh kề v của u và quá trình được lặp lại đối với đỉnh v.

Ở bước tổng quát, giả sử hiện tại đang xét đỉnh u_0, chúng ta sẽ có hai khả năng sẽ xảy ra:

+ Nếu như tồn tại một đỉnh v_0 kề với u mà chưa được thăm thì đỉnh v_0 đó sẽ trở thành đỉnh đã thăm và quá trình tìm kiếm lại bắt đầu từ đỉnh v_0 đó.

+ Ngược lại, nếu mọi đỉnh kề với u_0 đều đã thăm thì ta sẽ quay trở lại đỉnh mà trước đó ta đến đỉnh u_0 để tiếp tục quá trình tìm kiếm.

Cụ thể thuật toán tìm kiếm theo chiều sâu được thực hiện như sau:

Xuất phát từ đỉnh u chưa được thăm, thăm u, rồi tìm đến đỉnh v là đỉnh kề với đỉnh u, thăm v, v.v. thuật toán được lặp đi lặp lại cho đến khi tất cả các đỉnh đều được thăm. Nếu tại một đỉnh v_i nào đó, không còn đỉnh nào kề với v_i chưa được thăm thì quay trở lại tiếp tục tìm đỉnh kề chưa thăm khác của v_{i-1}.

Nhận xét:

Trong quá trình duyệt các đỉnh bằng thuật toán tìm kiếm theo chiều sâu, đỉnh được thăm càng muộn càng sớm được duyệt xong trước (Last In First Out - *Vào sau ra trước*).

Sử dụng ngăn xếp trong quá trình thăm các đỉnh theo chiều sâu của đồ thị G, xuất phát từ một đỉnh u.

Đánh dấu đỉnh bắt đầu đồ thị đã được thăm và đẩy vào ngăn xếp.

Trong khi ngăn xếp chưa rỗng

Xem xét đỉnh u ở trên cùng của ngăn xếp

Nếu có đỉnh kề v với đỉnh u

Đánh dấu đỉnh v, đẩy v vào ngăn xếp

Ngược lại lấy đỉnh trên cùng ra khỏi stack.

Cài đặt thuật toán

Tổ chức quá trình này bằng một thủ tục đệ quy như sau:

```
Void DFS(u)
{
 Visit(u); // thăm đỉnh u
 Daxet[u]=True; // đánh dấu đỉnh u đã xét
 For v ∈ Kề(u) // xét tất cả các đỉnh v là đỉnh kề với u
 if not Daxet[v] // nếu chưa xét v
 DFS(v); // gọi thủ tục duyệt sau với v
```

```
}
Và thủ tục duyệt hệ thống toàn bộ đỉnh của đồ thị sẽ là:
Void FindAll()
{
 For u ∈ V // với mỗi đỉnh u thuộc tập đỉnh V
 if not Daxet[u] // nếu đỉnh u chưa được xét
 DFS(u); // thì duyệt u theo chiều sâu
}
```

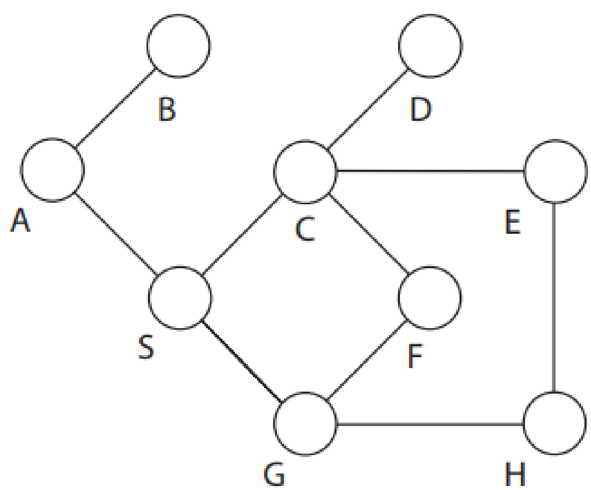
Nhận xét:

Dễ nhận thấy rằng, mỗi lần gọi DFS(u) thì toàn bộ các đỉnh cùng thành phần liên thông với u sẽ được viếng thăm.

Thủ tục Visit(u) là thao tác trên đỉnh u trong từng bài toán đặt ra cụ thể.

Ví dụ 2.41

Cho đồ thị G_{25} sau đây:



Hình 2.48: Minh họa cho thuật toán tìm kiếm theo chiều sâu.

Mô tả các bước của thuật toán tìm kiếm theo chiều sâu đối với đồ thị G_{25} với đỉnh xuất phát là đỉnh S?

Hướng dẫn:

Xác định danh sách kề như sau:

Đỉnh	Đỉnh kề
A	B, S
B	A
C	D, E, F, S
D	C
E	C, H
F	C, G
G	F, H, S
H	E, G
S	A, C, G

Quá trình tìm kiếm theo chiều sâu được diễn ra như sau:

Hành động	Ngăn xếp	Chưa xét	Đã xét
Bắt đầu với đỉnh S	S	A, B, C, D, E, F, G, H	S
Đỉnh S có 3 đỉnh kề là A, C, G	S	A, B, C, D, E, F, G, H	S
Đánh dấu đỉnh được thăm là đỉnh A	S, A	B, C, D, E, F, G, H	S, A
Đỉnh A có 2 đỉnh kề là B, S	S, A	B, C, D, E, F, G, H	S, A
Đánh dấu đỉnh được thăm là đỉnh B	S, A, B	C, D, E, F, G, H	S, A, B
Đỉnh B có 1 đỉnh kề là A (đã thăm)	S, A, B	C, D, E, F, G, H	S, A, B
Quay lui thăm đỉnh C, đánh dấu đỉnh được thăm là đỉnh C	S, A, B, C	D, E, F, G, H	S, A, B, C
Đỉnh C có các đỉnh kề là đỉnh D, E, F, S	S, A, B, C	D, E, F, G, H	S, A, B, C
Đánh dấu đỉnh được thăm là đỉnh D	S, A, B, C, D	E, F, G, H	S, A, B, C, D
Đỉnh D có đỉnh kề là C	S, A, B, C, D	E, F, G, H	S, A, B, C, D
Quay lui, thăm đỉnh E, đánh dấu đỉnh được thăm là đỉnh E	S, A, B, C, D, E	F, G, H	S, A, B, C, D, E

Đỉnh E có các đỉnh kề là C và H	S, A, B, C, D, E	F, G, H	S, A, B, C, D, E
Đánh dấu đỉnh được thăm là đỉnh H	S, A, B, C, D, E, H	F, G	S, A, B, C, D, E, H
Đỉnh H có các đỉnh kề là đỉnh E, G	S, A, B, C, D, E, H	F, G	S, A, B, C, D, E, H
Đánh dấu đỉnh được thăm là đỉnh G	S, A, B, C, D, E, H, G	F	S, A, B, C, D, E, H, G
Đỉnh G có các đỉnh kề là F, H, S	S, A, B, C, D, E, H, G	F	S, A, B, C, D, E, H, G
Đánh dấu đỉnh được thăm là đỉnh F	S, A, B, C, D, E, H, G, F		S, A, B, C, D, E, H, G, F

Tất cả các đỉnh đều được thăm, ta có trình tự duyệt đồ thị theo chiều sâu là:

S, A, B, C, D, E, H, G, F

2.2.2. Tìm kiếm theo chiều rộng

Phát biểu bài toán

Input: Cho đồ thị G = (V, E) liên thông, không chứa khuyên và đỉnh u thuộc G.

Output: Tập hợp các đỉnh được thăm của đồ thị, xuất phát từ u.

Tư tưởng thuật toán

Thuật toán này là sự cải tiến về thứ tự duyệt đỉnh trên đồ thị của tìm kiếm theo chiều sâu bằng cách thay vì dùng một STACK thì ta lại dùng một hàng đợi QUEUE để kết nạp đỉnh được thăm. Như vậy, đỉnh được thăm càng sớm sẽ càng sớm trở thành duyệt xong (cơ chế First In First Out - *Vào trước ra trước*).

Cụ thể thuật toán tìm kiếm theo chiều rộng được thực hiện như sau:

Từ một đỉnh u nào đó chưa được thăm, thăm u, đưa tất cả các đỉnh v (chưa thăm) kề với u vào hàng đợi. Lấy một đỉnh v từ hàng đợi, thăm v, đưa tất cả các đỉnh t (chưa thăm) kề với v vào hàng đợi, v.v.. Thuật toán được lặp đi lặp lại việc thăm các đỉnh cho đến khi hàng đợi rỗng.

Nếu tại một đỉnh v_i nào đó, không còn đỉnh nào kề với v_i chưa được thăm thì quay trở lại tiếp tục tìm đỉnh kề chưa thăm khác của đỉnh v_{i-1} (v_{i-1} là đỉnh trước khi đến v_i)

Cài đặt thuật toán

Thủ tục được mô tả dưới đây:

```
void BFS(u)
{
        Queue =Empty // thiết lập 1 hàng đợi để chứa các đỉnh
        Kết nạp u vào Queue;
        Daxet[u]=True; // đánh dấu đỉnh u đã được xét
        While Queue != Empty // nếu còn đỉnh trong hàng đợi
        {
         Lấy v từ Queue;
         Visit(v); // thăm v
         For w ∈ Kề(v) // xét các đỉnh w là đỉnh kề của v
         If (not Daxet[w]) // nếu đỉnh w chưa được đánh dấu (chưa thăm)
           {
          Kết nạp w vào Queue; // đưa w vào hàng đợi
          Daxet[w]=True; // đánh dấu đỉnh w đã xét
           }
         }
 }
```

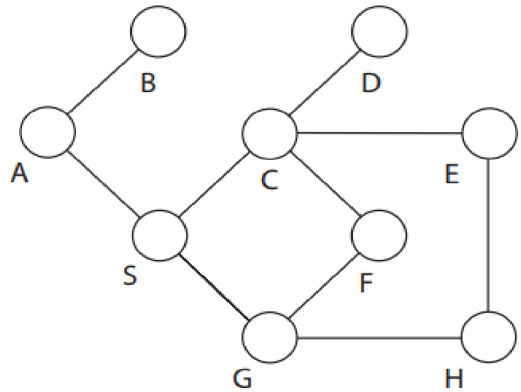
Ta có thủ tục tìm kiếm theo chiều rộng là:

```
void FindAll() // xét với toàn bộ các đỉnh của đồ thị
{
 For u ∈ V // với một đỉnh u bất kỳ thuộc V
 If not Daxet[u] // nếu đỉnh u chưa được thăm
 BFS(u); // thăm u theo thuật toán duyệt chiều rộng
 }
```

Tương tự như thuật toán tìm kiếm theo chiều sâu, ở thuật toán này mỗi lần gọi thủ tục BFS(u) thì mọi đỉnh cùng thành phần liên thông với u sẽ được thăm. Thủ tục Visit(u) như đã nói ở trên.

Ví dụ 2.42

Cho đồ thị G_{26} như hình vẽ dưới đây:



Hình 2.49: Đồ thị G_{26} minh họa cho thuật toán tìm kiếm theo chiều rộng.

ô tả các bước của thuật toán tìm kiếm theo chiều rộng đối với đồ thị G_{26} với đỉnh xuất phát là đỉnh S?

Hướng dẫn:

Xác định danh sách kề như sau:

Đỉnh	Đỉnh kề
A	B, S
B	A
C	D, E, F, S
D	C
E	C, H
F	C, G
G	F, H, S
H	E, G
S	A, C, G

Quá trình tìm kiếm theo chiều rộng được diễn ra như sau:

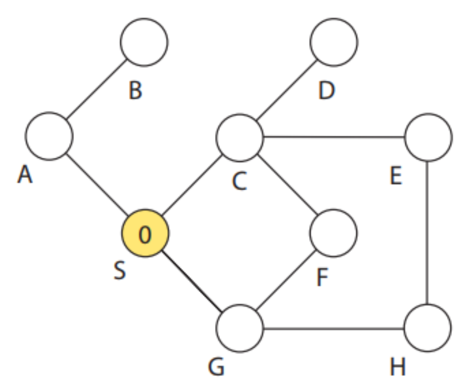
Hành động	Đỉnh hiện tại	Hàng đợi	Đỉnh chưa thăm	Đỉnh đã thăm
Bắt đầu với đỉnh S		S	A, B, C, D, E, F, G, H	S
Lấy S ra khỏi hàng đợi	S		A, B, C, D, E, F, G, H	S
Đỉnh S có các đỉnh kề là A, C, G	S		A, B, C, D, E, F, G, H	S

Đánh dấu đỉnh A đã thăm và đẩy vào hàng đợi	S	A	B, C, D, E, F, G, H	S, A
Đánh dấu đỉnh C đã thăm và đẩy vào hàng đợi	S	A, C	B, D, E, F, G, H	S, A, C
Đánh dấu đỉnh G đã thăm và đẩy vào hàng đợi	S	A, C, G	B, D, E, F, H	S, A, C, G
Đỉnh S hết các đỉnh kề đã thăm, đưa đỉnh A ra khỏi hàng đợi và trở thành đỉnh hiện tại.	A	C, G	B, D, E, F, H	S, A, C, G
Đỉnh A có đỉnh kề là đỉnh B	A	C, G	B, D, E, F, H	S, A, C, G
Đánh dấu đỉnh B đã thăm và đẩy đỉnh B vào hàng đợi	A	C, G, B	D, E, F, H	S, A, C, G, B
Đỉnh A hết các đỉnh đã thăm, đưa đỉnh C ra khỏi hàng đợi và trở thành đỉnh hiện tại	C	G, B	D, E, F, H	S, A, C, G, B
Đỉnh C có các đỉnh kề là D, E, F	C	G, B	D,E, F, H	S, A, C, G, B
Đánh dấu đỉnh D đã thăm và đẩy đỉnh D vào hàng đợi	C	G, B, D	E, F, H	S, A, C, G, B, D
Đánh dấu đỉnh E đã thăm và đẩy đỉnh E vào hàng đợi	C	G, B, D, E	F, H	S, A, C, G, B, D, E
Đánh dấu đỉnh F đã thăm và đẩy đỉnh F vào hàng đợi	C	G, B, D, E, F	H	S, A, C, G, B, D, E, F
Đỉnh C hết đỉnh đã thăm, đưa đỉnh G ra	G	B, D, E, F	H	S, A, C, G, B, D, E, F

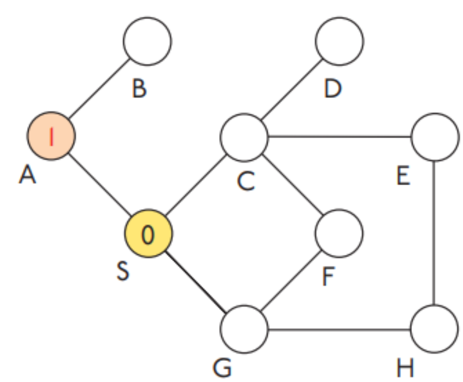
khỏi hàng đợi và trở thành đỉnh hiện tại				
Đỉnh G có đỉnh kề là H	G	B, D, E, F	H	S, A, C, G, B, E, F
Đánh dấu đỉnh H đã thăm và đẩy đỉnh H vào hàng đợi	G	B, D, E, F, H		S, A, C, G, B, D, E, F, H
Lấy đỉnh B ra khỏi hàng đợi	B	D, E, F, H		S, A, C, G, B, D, E, F, H
Lấy đỉnh D ra khỏi hàng đợi	D	E, F, H		S, A, C, G, B, D, E, F, H
Lấy đỉnh E ra khỏi hàng đợi	E	F, H		S, A, C, G, B, D, E, F, H
Lấy đỉnh F ra khỏi hàng đợi	F	H		S, A, C, G, B, D, E, F, H
Lấy đỉnh H ra khỏi hàng đợi	H			S, A, C, G, B, D, E, F, H

Kết quả duyệt đồ thị theo chiều rộng như sau: S, A, C, G, B, D, E, F, H

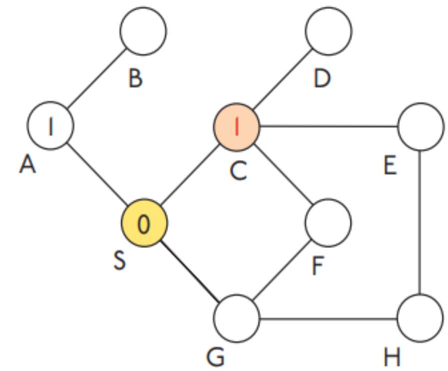
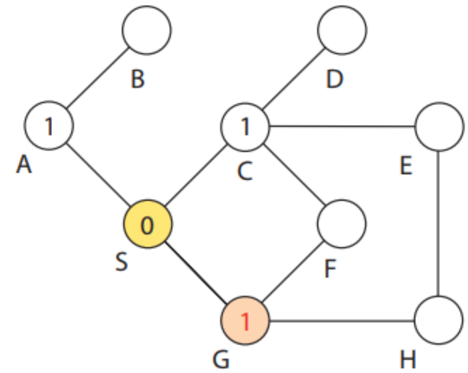
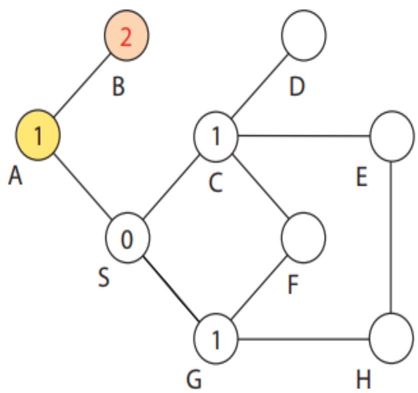
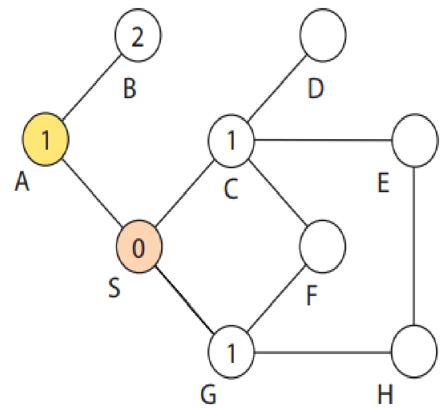
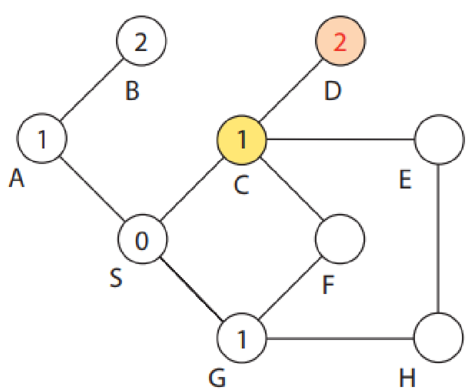
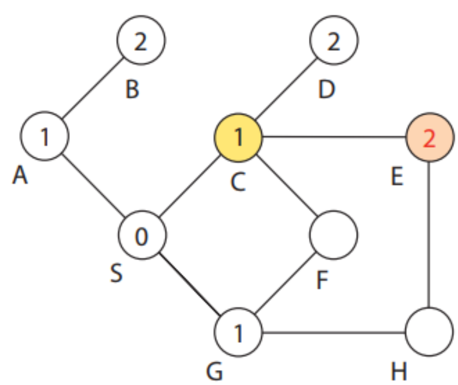
Trình tự các bước trên được thể hiện thông qua các hình sau đây: *(xem từ trái qua phải, từ trên xuống dưới)*

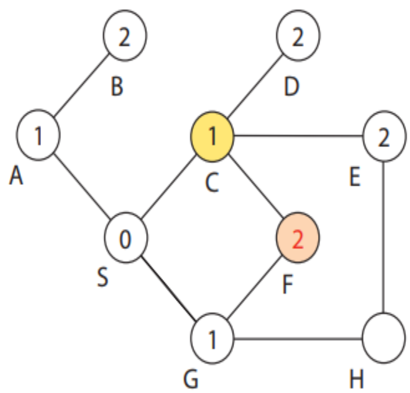


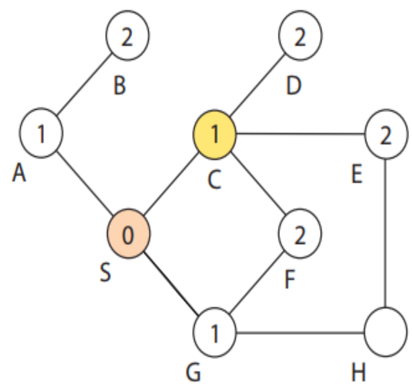
Bắt đầu với đỉnh S, đẩy S vào hàng đợi (đánh dấu S – 0), xét các đỉnh kề của S

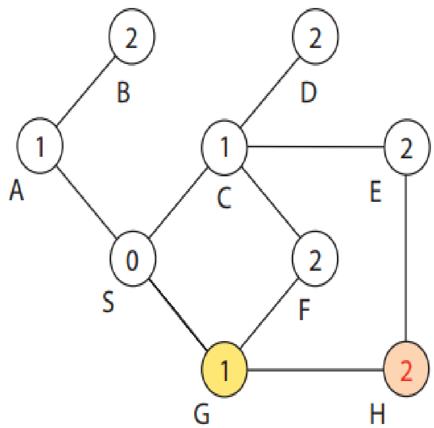


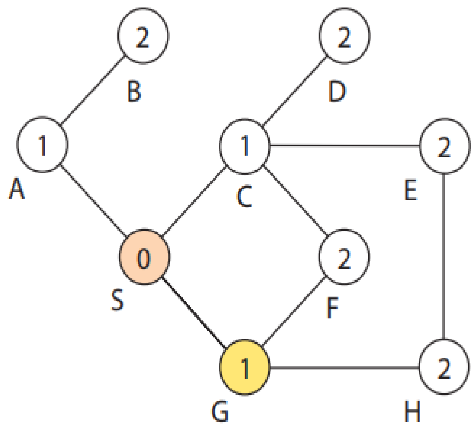
Lấy S khỏi hàng đợi, A là đỉnh kề của S, thêm A vào hàng đợi (đánh dấu A – 1)

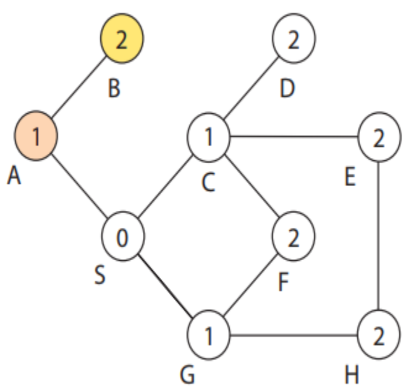
 Thêm C vào hàng đợi (đánh dấu C – 1)	 Thêm G vào hàng đợi (đánh dấu G – 1)
 S đã xét hết các đỉnh kề, lấy A khỏi hàng đợi, xét các đỉnh kề của A. B là đỉnh kề của A. Thêm B vào hàng đợi (B – 2)	 Quay lui lại S, xét các đỉnh kề khác của S.
 Lấy C khỏi hàng đợi, xét kề của C. Thêm D vào hàng đợi (Đánh dấu D – 2)	 Thêm E vào hàng đợi (Đánh dấu E –2)

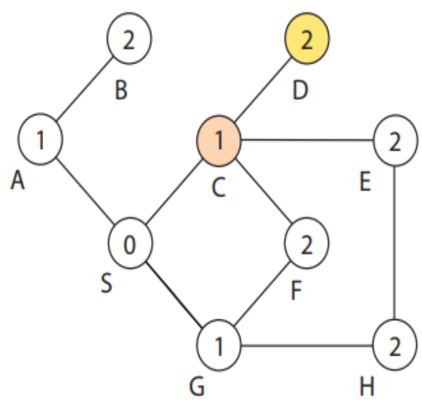
<table>
<tr>
<td>

Thêm F vào hàng đợi (đánh dấu F – 2)</td>
<td>

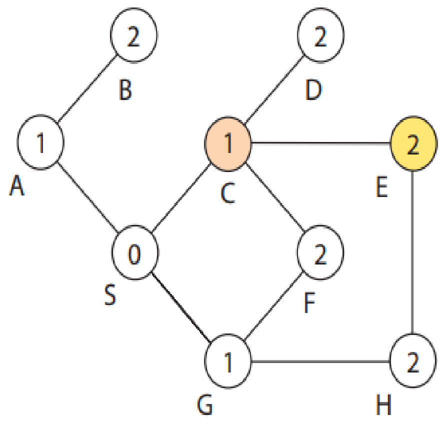
C đã xét hết các đỉnh kề, xét các đỉnh kề của G</td>
</tr>
<tr>
<td>

Lấy G ra khỏi hàng đợi, thêm H vào hàng đợi (Đánh dấu H – 2)</td>
<td>

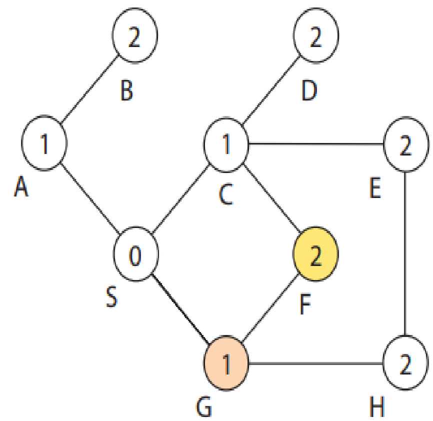
Đã hết đỉnh cần xét, quay lui lại S, xét kề mức 1 của S.</td>
</tr>
<tr>
<td>

Xét A – kề mức 1, lấy đỉnh B ra khỏi hàng đợi (Kề mức 2 của A).</td>
<td>

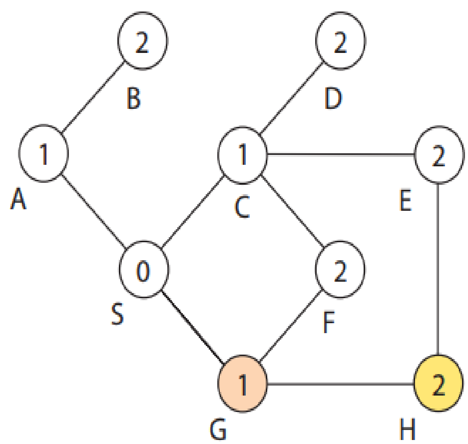
Xét C - kề mức 1 của S, lấy D (Kề mức 2) của C khỏi hàng đợi.</td>
</tr>
</table>



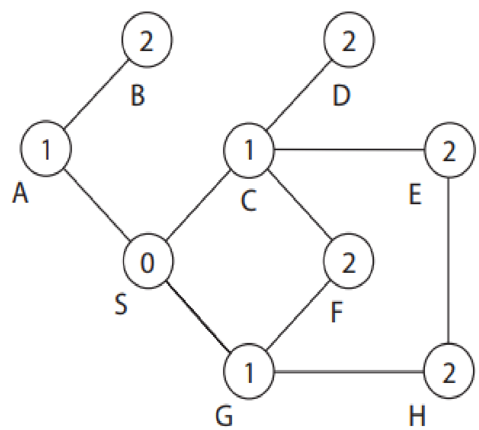
Lấy E (kề mức 2) của C ra khỏi hàng đợi.



Lấy F (kề mức 2) của C ra khỏi hàng đợi.



Lấy H (kề mức 2) của G ra khỏi hàng đợi.



Đã lấy hết các đỉnh ra khỏi hàng đợi.

Kết quả duyệt đồ thị theo chiều rộng như sau: S (nhãn 0), A (nhãn 1), C (nhãn 1), G (nhãn 1), B (nhãn 2), D (nhãn 2), E (nhãn 2), F (nhãn 2), H (nhãn 2).

2.2.3. Ứng dụng của bài toán tìm kiếm

2.2.3.1. Bài toán tìm thành phần liên thông của đồ thị

Bài toán
Cho một đồ thị G =(V, E). Hãy cho biết số thành phần liên thông của đồ thị và mỗi thành phần liên thông gồm những đỉnh nào.
Ý tưởng thuật toán
Sử dụng các thủ tục DFS(u) và BFS(u) cho phép thăm tất cả các đỉnh có cùng thành phần liên thông với u nên số thành phần liên thông của đồ thị chính là

số lần gọi thủ tục trên. Ta sẽ dùng thêm biến đếm Connect để đếm số thành phần liên thông.

Vấn đề còn lại là cách ghi nhận các đỉnh trong từng thành phần liên thông. Sử dụng biến Lienthong[u] để ghi nhận chỉ số của thành phần liên thông chứa đỉnh u, biến Connect để đếm số thành phần liên thông (giá trị khởi tạo bằng 0).

Cài đặt thuật toán

Vòng lặp chính trong các thủ tục tìm kiếm theo chiều sâu hoặc tìm kiếm theo chiều rộng chỉ cần sửa lại như sau:

```
Void FindAll()
{
 Connect = 0; // sử dụng biến Connect để đếm số thành phần liên thông
 For u thuộc V do
 If (not Daxet[u])
  {
  Connect++; // tăng biến đếm
          DFS(u); (* BFS(u))
  }
```

Thủ tục Visit(u) sẽ làm công việc đánh số thành phần liên thông của đỉnh u:

LienThong[u]= Connect;

2.2.3.2. Bài toán tìm đường đi giữa hai đỉnh của đồ thị

Bài toán

Cho một đồ thị G =(V, E). Với hai đỉnh s và t là hai đỉnh nào đó của đồ thị. Hãy tìm đường đi từ s đến t.

Ý tưởng thuật toán

Do thủ tục DFS(s) và BFS(s) sẽ thăm lần lượt các đỉnh cùng thành phần liên thông với s nên sau khi thực hiện xong thủ tục thì có hai khả năng:

+ Daxet[t] = True thì có nghĩa: tồn tại một đường đi từ đỉnh s tới đỉnh t.

+ Ngược lại, thì không có đường đi nối giữa s và t

Vấn đề còn lại của bài toán là: *Nếu tồn tại đường đi nối đỉnh s và đỉnh t thì làm cách nào để viết được hành trình (gồm thứ tự các đỉnh) từ s đến t.*

Cài đặt thuật toán

Dùng một mảng Truoc với: Truoc[v] là đỉnh trước của v trong đường đi. Khi đó, câu lệnh If trong thủ tục DFS(u) được sửa lại như sau:

```
if (not Daxet[v]) // nếu đỉnh v chưa được thăm
 {
 DFS(v); // gọi thủ tục thăm theo chiều sâu với v
 Truoc[v] = u; //ghi nhận đỉnh trước v là đỉnh u
 }
```

Còn với thủ tục BFS ta cũng sửa lại trong lệnh If như sau:

```
If (not Daxet[w]) // nếu đỉnh w chưa được xét
 {
 Kết nạp w vào Queue;
 Daxet[w] = True; // đánh dấu đỉnh w đã thăm
 Truoc[w] = v; // ghi nhận đỉnh trước đỉnh w là đỉnh v
 }
```

Việc viết đường đi lên màn hình (hoặc ghi ra tệp) có thể có 3 cách:

- Viết trực tiếp dựa trên mảng Truoc: Hiển nhiên đường đi hiển thị sẽ ngược từ đỉnh t trở về s như sau:

p1 =Truoc[t] p2=Truoc[p1] .... s

- Dùng thêm một mảng phụ P: cách này dùng để đảo đường đi từ mảng Truoc để có đường đi thuận từ đỉnh s đến đỉnh t.

- Cách thứ 3: là dùng chương trình đệ quy để viết đường đi.

```
void Print_Way( i : Byte);
 If (i! = s)
 {
  Print_Way(Truoc[i]);
  Cout<<“ ->”<< i;
 }
```

Lời gọi thủ tục đệ quy như sau:

```
Cout<<s;
Print_Way(s);
```

Nhận xét: *Nếu có đường đi từ s đến t, thì đường đi tìm được do thuật toán tìm kiếm theo chiều rộng cho chúng ta một hành trình tối thiểu về số cạnh.*

Nhận xét quan trọng trên là cơ sở cho các thuật toán tìm kiếm lời giải tối ưu dựa trên lý thuyết đồ thị. Thực ra, nó là trường hợp riêng của một bài toán lớn trong đồ thị - *Bài toán tìm đường đi ngắn nhất* (Chúng ta sẽ xem xét bài toán này ở phần sau của chương này).

Trên đây là những thuật toán tìm kiếm cơ bản nhưng rất quan trọng trên đồ thị. Những thuật toán này sẽ là nền móng quan trọng để có thể xây dựng và thiết kế những thuật giải khác trong lý thuyết đồ thị.

2.3. ĐỒ THỊ EULER VÀ ĐỒ THỊ HAMILTON

2.3.1. Đồ thị Euler

Leonhard Euler (15/4/1707 – 18/9/1783) là một nhà toán học và nhà vật lý học, nhà thiên văn học, nhà lý luận người Thụy Sĩ. Ông (cùng với Archimedes và Newton) được xem là một trong những nhà toán học lừng lẫy nhất. Ông đã có những khám phá quan trọng và rất ảnh hưởng trong nhiều ngành toán học, như vi tích phân và lý thuyết đồ thị, đồng thời có những đóng góp tiên phong cho một số ngành như topology và lý thuyết số giải tích. Ông cũng giới thiệu nhiều thuật ngữ và ký hiệu toán học hiện đại, đặc biệt cho ngành giải tích toán học, nổi bật là khái niệm hàm số toán học. Ông cũng được biết đến với nghiên cứu của ông về cơ học, thủy động lực học, quang học, thiên văn học và lý thuyết âm nhạc.

Euler là một trong những nhà toán học nổi tiếng nhất của thế kỷ XVIII và được coi là một trong những nhà toán học vĩ đại nhất trong lịch sử. Ông cũng được nhiều người coi là nhà toán học có năng suất nhất mọi thời đại. Sau khi ông qua đời, các công trình của ông được tập hợp lại trong quyển *"Leonhard Euler Opera Omnia"* gồm 85 quyển cỡ lớn với hơn 40.000 trang, (ước tính một người phải làm việc khoảng 40 năm mới có thể ghi lại lượng công trình này). Ông đã dành phần lớn cuộc đời của mình ở Saint Petersburg, Nga và Berlin, khi ấy là thủ đô của nước Phổ.

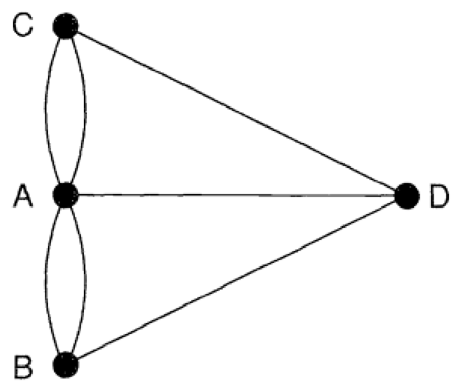
Một nhận xét của Pierre-Simon Laplace đã thể hiện ảnh hưởng của Euler đối với toán học: *"Hãy đọc Euler, đọc Euler đi, ông ấy là bậc thầy của tất cả chúng ta"*. Tên của ông đã được đặt cho một miệng núi lửa trên Mặt Trăng và cho tiểu hành tinh 2002 Euler.

Hình 2.50: Bài toán bảy cây cầu của Euler.

Đặt vấn đề: Ở thành phố Königsberg (Lithuania, Nga) có bảy cây cầu bắc ngang con sông Pregel như hình 2.50.

Người ta đặt ra câu đố "*Tìm cách đi qua tất cả bảy cây cầu này, mỗi cái đúng một lần rồi quay về điểm xuất phát*".

Năm 1736, Leorhard Euler (1707 – 1783) đã chứng minh không thể có một đường đi như thể bằng lập luận sau: "*biểu diễn bốn miền đất A, B, C, D bằng bốn điểm trong mặt phẳng, mỗi cầu nối hai miền đất được biểu diễn bằng một đoạn nối hai điểm tương ứng, đồ thị thu được như sau:*



Hình 2.51: Biểu diễn bài toán bảy cây cầu bằng đồ thị.

Một đường đi qua bảy cây cầu, mỗi cầu đúng một lần rồi quay về điểm xuất phát sẽ có số lần đi đến A bằng số lần rời khỏi A, tức là phải sử dụng số chẵn cây cầu nối với A. Trong khi số cây cầu nối với A (Trên hình mỗi cây cầu là 1 cạnh) bằng 5, là số lẻ. Vì vậy không thể có đường đi nào thỏa mãn điều kiện của bài toán".

2.3.1.1. Chu trình Euler và đường đi Euler

Định nghĩa 2.27
Xét đồ thị liên thông G. Một chu trình Euler của đồ thị G là một chu trình đi qua tất cả các cạnh của đồ thị, mỗi cạnh chỉ qua duy nhất 1 lần. Đồ thị chứa chu trình Euler gọi là đồ thị Euler. Một đường đi Euler của đồ thị G là một đường đi đi qua tất cả các cạnh của đồ thị, mỗi cạnh đi qua duy nhất 1 lần, điểm bắt đầu khác với điểm kết thúc. Đồ thị chứa đường đi Euler gọi là đồ thị nửa Euler.

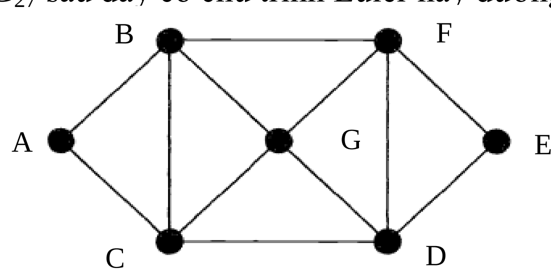
Nhận xét: Đồ thị Euler luôn là đồ thị nửa Euler, điều ngược lại không đúng.

Định lý 2. 4
Định lý Euler 1: Cho một đồ thị vô hướng G liên thông và có hơn một đỉnh. G có chu trình Euler nếu và chỉ nếu mọi đỉnh của G đều có bậc chẵn.

Định lý 2. 5
Định lý Euler 2: Cho một đồ thị vô hướng G liên thông và có hơn một đỉnh. G có đường đi Euler nếu và chỉ nếu G có đúng hai đỉnh bậc lẻ.

Ví dụ 2.43

Cho biết đồ thị G_{27} sau đây có chu trình Euler hay đường đi Euler?



Hình 2.52: Minh họa đồ thị Euler.

Hướng dẫn:

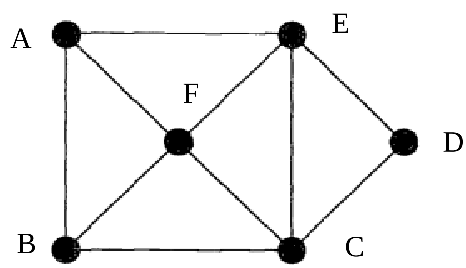
Bước 1: Xác định bậc các đỉnh của đồ thị G_{27}:

Đỉnh	Bậc
A	2
B	4
C	4
D	4
E	2
F	4
G	4

Bước 2: Các đỉnh của đồ thị đều có bậc chẵn, do đó G_{27} có chu trình Euler, hay G_{27} còn được gọi là đồ thị Euler.

Ví dụ 2.44

a. Cho biết đồ thị G_{28} sau đây có chu trình Euler hay đường đi Euler?



Hình 2.53: Minh họa đồ thị nửa Euler.

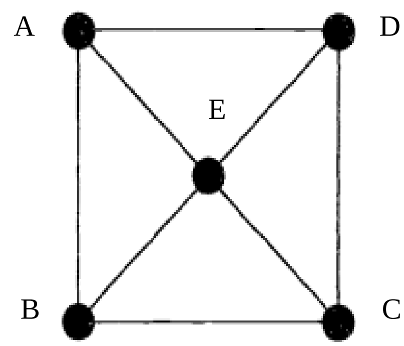
Hướng dẫn:

Bước 1: Xác định bậc các đỉnh của đồ thị G_{28}:

Đỉnh	Bậc
A	3
B	3
C	4
D	2
E	4
F	4

Bước 2: Đồ thị G_{28} có hai đỉnh bậc lẻ (đỉnh A và đỉnh B), do đó G_{28} có đường đi Euler, hay G_{28} là đồ thị nửa Euler.

b. Cho biết đồ thị G_{29} sau đây có chu trình Euler hay đường đi Euler?



Hình 2.54: Minh họa đồ thị không phải Euler.

Hướng dẫn:

Bước 1: Xác định bậc các đỉnh của đồ thị G_{29}:

Đỉnh	**Bậc**
A	3
B	3
C	3
D	3
E	4

Bước 2: Đồ thị G_{29} không có chu trình Euler và không có đường đi Euler, do tất cả các đỉnh của đồ thị không phải bậc chẵn hoặc chỉ có duy nhất hai đỉnh bậc lẻ.

2.3.1.2. Thuật toán tìm chu trình Euler

Thuật toán Fleury (Floyd)
Input: Đồ thị liên thông G = (V, E), có các đỉnh bậc chẵn. **Output:** Chu trình Euler W của đồ thị G
Thuật toán: **Bước 1:** Chọn đỉnh v_0 tùy ý và thiết lập $W_0 = v_0$ (giả sử ban đầu $G_0 = G$) **Bước 2:** Giả sử tại bước k, thiết lập đường đi $W_k = (v_0, e_1, v_1, e_2, v_2, \ldots, v_{k-1}, e_k, v_k)$, từ đồ thị $G_{k-1} – e_k$ (Do đó, đồ thị $G_{k-1} = G – \{e_1, e_2, e_3,\ldots, e_k\}$ với $G_0 = G$) **Bước 3:** Nếu không còn cạnh liên thuộc đến v_k trong đồ thị G_k, thì dừng. Khẳng định W_k là chu trình Euler của đồ thị G.

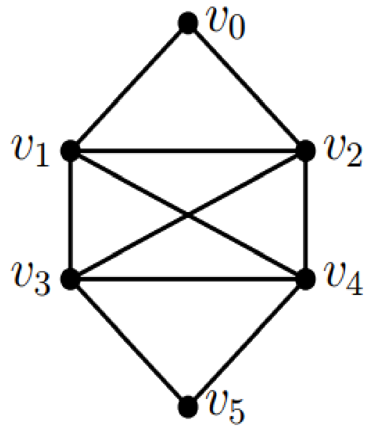
Nếu còn cạnh có liên thuộc đến đỉnh v_k trong đồ thị G_k, chọn 1 cạnh e_{k+1} = (v_k, v_{k+1}), xóa bỏ cạnh này khỏi G_k.

Định nghĩa W_{k+1} = (v_0, e_1, v_1, e_2, v_2, …, v_{k-1}, e_k, v_k, e_{k+1}, v_{k+1}).

Quay lại bước 2 với W_{k+1}.

Ví dụ 2.45

Cho đồ thị G_{30} sau đây:



Hình 2.55: Minh họa thuật toán tìm chu trình Euler.

Xác định chu trình Euler của đồ thị G_{30}?

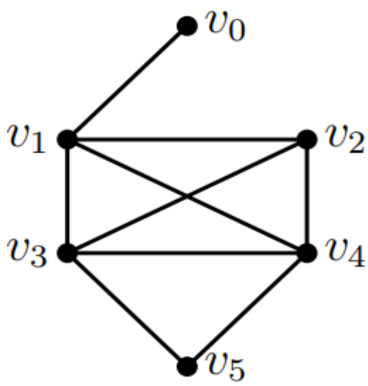
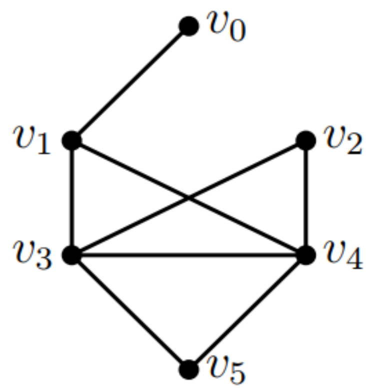
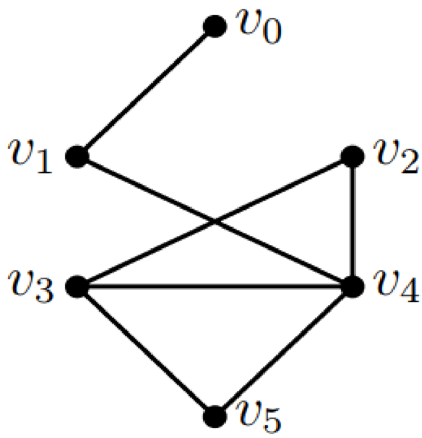
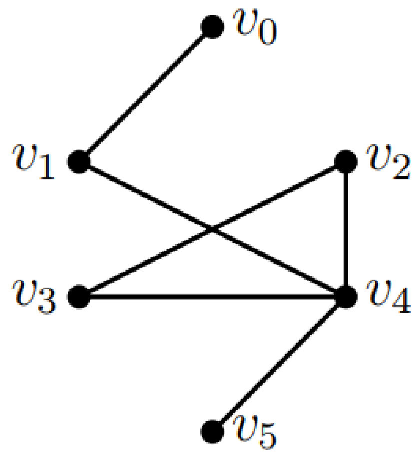
Hướng dẫn:

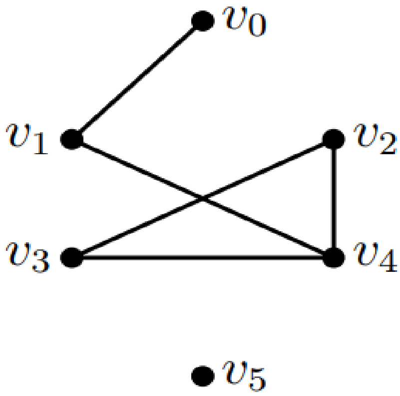
Xác định bậc các đỉnh của đồ thị

Đỉnh	**Bậc**
v_0	2
v_1	4
v_2	4
v_3	4
v_4	4
v_5	2

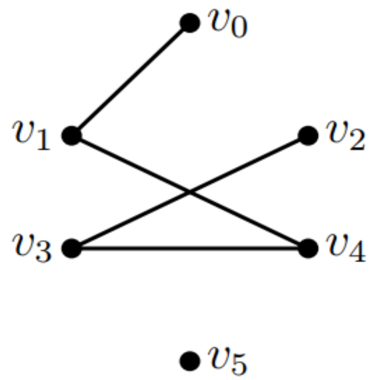
Vì các đỉnh của đồ thị G_{30} có bậc chẵn, do đó khẳng định G_{30} có chu trình Euler.

Trình tự các bước theo thuật toán để xác định chu trình Euler như sau: *(Xem các hình từ trái sang phải, từ trên xuống dưới)*

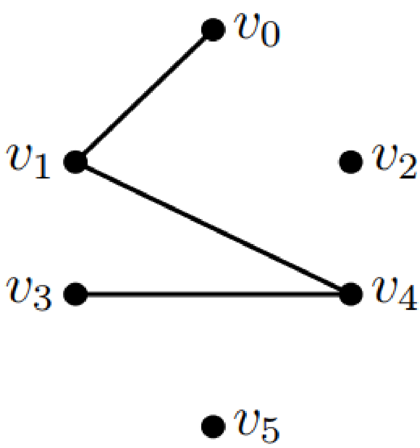
 $W_1 = (v_0, v_2)$; $G_1 = G - \{(v_0, v_2)\}$	 $W_2 = (v_0, v_2)\ (v_2, v_1)$; $G_2 = G -\{(v_0, v_2)\ (v_2, v_1)\}$
 $W_3 = (v_0, v_2)\ (v_2, v_1)\ (v_1, v_3)$ $G_3 = G -\{(v_0, v_2)\ (v_2, v_1)\ (v_1, v_3)\}$	 $W_4 = (v_0, v_2)\ (v_2, v_1)\ (v_1, v_3)\ (v_3, v_5)$ $G_4 = G - \{(v_0, v_2)\ (v_2, v_1)\ (v_1, v_3)\ (v_3, v_5)\}$

<table>
<tr>
<td>


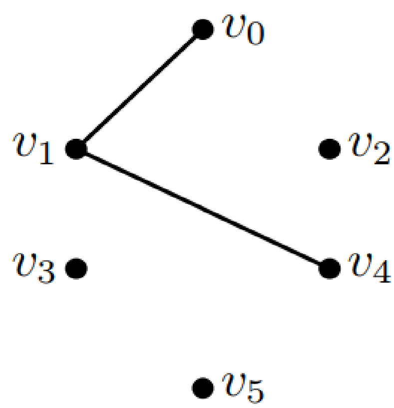
$W_5 = (v_0, v_2)\ (v_2, v_1)\ (v_1, v_3)\ (v_3, v_5)\ (v_5, v_4)$

$G_5 = G - \{(v_0, v_2)\ (v_2, v_1)\ (v_1, v_3)\ (v_3, v_5)\ (v_5, v_4)\}$
</td>
<td>


$W_6 = (v_0, v_2)\ (v_2, v_1)\ (v_1, v_3)\ (v_3, v_5)\ (v_5, v_4)\ (v_4, v_2)$

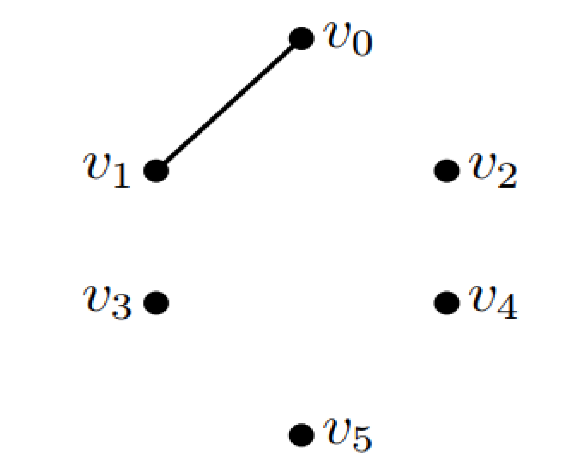
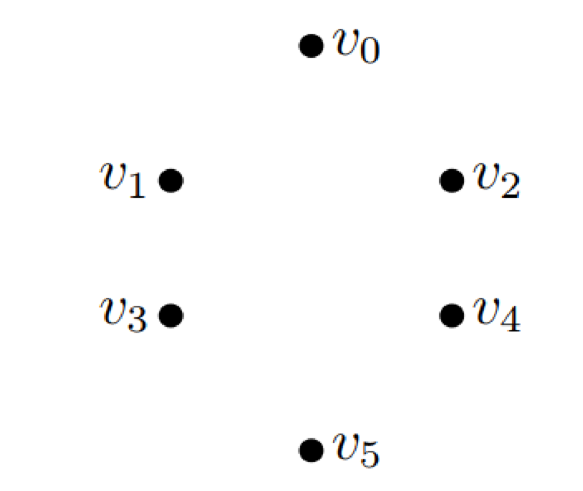
$G_6 = G - \{(v_0, v_2)\ (v_2, v_1)\ (v_1, v_3)\ (v_3, v_5)\ (v_5, v_4)\ (v_4, v_2)\}$
</td>
</tr>
<tr>
<td>


$W_7 = (v_0, v_2)\ (v_2, v_1)\ (v_1, v_3)\ (v_3, v_5)\ (v_5, v_4)\ (v_4, v_2)\ (v_2, v_3)$

$G_7 = G - \{(v_0, v_2)\ (v_2, v_1)\ (v_1, v_3)\ (v_3, v_5)\ (v_5, v_4)\ (v_4, v_2)\ (v_2, v_3)\}$
</td>
<td>


$W_8 = (v_0, v_2)\ (v_2, v_1)\ (v_1, v_3)\ (v_3, v_5)\ (v_5, v_4)\ (v_4, v_2)\ (v_2, v_3)\ (v_3, v_4)$

$G_8 = G - \{(v_0, v_2)\ (v_2, v_1)\ (v_1, v_3)\ (v_3, v_5)\ (v_5, v_4)\ (v_4, v_2)\ (v_2, v_3)\ (v_3, v_4)\}$
</td>
</tr>
</table>

	
$W_9 = (v_0, v_2)\ (v_2, v_1)\ (v_1, v_3)\ (v_3, v_5)\ (v_5, v_4)\ (v_4, v_2)\ (v_2, v_3)\ (v_3, v_4)\ (v_4, v_1)$ $G_9 = G - \{(v_0, v_2)\ (v_2, v_1)\ (v_1, v_3)\ (v_3, v_5)\ (v_5, v_4)\ (v_4, v_2)\ (v_2, v_3)\ (v_3, v_4)\ (v_4, v_1)\}$	$W_{10} = (v_0, v_2)\ (v_2, v_1)\ (v_1, v_3)\ (v_3, v_5)\ (v_5, v_4)\ (v_4, v_2)\ (v_2, v_3)\ (v_3, v_4)\ (v_4, v_1)\ (v_1, v_0)$ $G_{10} = G - \{(v_0, v_2)\ (v_2, v_1)\ (v_1, v_3)\ (v_3, v_5)\ (v_5, v_4)\ (v_4, v_2)\ (v_2, v_3)\ (v_3, v_4)\ (v_4, v_1)\ (v_1, v_0)\}$

Thuật toán hình thành các đường đi W_1, W_2,…, W_{10} và các đồ thị G_1, G_2, …, G_{10}. Đường đi W_{10} là đường đi khép kín (chu trình).

Chu trình Euler thu được là: $W_{10} = (v_0, v_2)\ (v_2, v_1)\ (v_1, v_3)\ (v_3, v_5)\ (v_5, v_4)\ (v_4, v_2)\ (v_2, v_3)\ (v_3, v_4)\ (v_4, v_1)\ (v_1, v_0)$.

2.3.1.3. Ứng dụng của đồ thị Euler

Bài toán người đưa thư Trung Quốc, còn được gọi là bài toán kiểm tra tuyến đường, là tìm một chu trình trong một đồ thị liên thông, vô hướng, đi qua mỗi cạnh ít nhất một lần với tổng chi phí ít nhất. Nếu tất cả các đỉnh của đồ thị có bậc chẵn thì giải pháp tối ưu là chu trình Euler của đồ thị. Trong trường hợp này, chi phí của giải pháp là tổng của tất cả các trọng số cạnh trong đồ thị.

Trong trường hợp đồ thị có một số đỉnh bậc lẻ, giải pháp phức tạp hơn. Đầu tiên, xác định tất cả các đỉnh có đỉnh bậc lẻ. Tiếp theo, ghép các đỉnh bậc lẻ sao cho tổng trọng số của các đường đi ngắn nhất giữa các cặp là tối thiểu. Sau đó, lấy tất cả các cạnh từ các đường đi trong bước trước đó và sao chép chúng. Điều này đảm bảo rằng tất cả các đỉnh bây giờ có bậc chẵn, trong khi thêm trọng lượng tối thiểu có thể vào đồ thị. Cuối cùng, giải pháp là chu trình Euler của đồ thị đã sửa đổi và chi phí là tổng của tất cả các trọng số cạnh trong đồ thị gốc cộng với tổng các trọng số của các cạnh trùng lặp.

Ba bước chính:

+ Tìm các đỉnh bậc lẻ

+ Tìm đường đi tối thiểu

+ Tìm chu trình Euler.

Đều có thể được giải quyết trong thời gian đa thức, vì vậy bài toán này có thể được giải quyết trong thời gian đa thức.

Bài toán người đưa thư Trung Hoa
***Lịch sử của bài toán*:** Trong thời kỳ cách mạng *"Đại nhảy vọt"* trong lịch sử Trung Quốc (1958-1960), Chủ tịch Mao Trạch Đông của Trung Quốc khuyến khích các nhà khoa học giải quyết các vấn đề trong thế giới thực để thúc đẩy quá trình chuyển đổi nền kinh tế Trung Quốc. Vào thời điểm đó, nhiều nhà nghiên cứu toán học tập trung vào các vấn đề như giao thông và lập kế hoạch sản xuất. Tỉnh Sơn Đông, là một trung tâm nghiên cứu toán học Trung Quốc thời kỳ đầu, là nơi tạo ra bài toán *"Người đưa thư Trung Quốc"*. Bài toán tối ưu này được thảo luận lần đầu tiên trong một bài báo khoa học của nhà toán học Trung Quốc Kwan Mei-Ko (năm 1962) và do đó bài toán này có tên là *"Bài toán người đưa thư Trung Hoa"* (Chinese Postman Problem). Bài toán mô tả một tình huống mà một người đưa thư Trung Quốc sẽ phải đối mặt hàng ngày. Bài toán chính xác được xác định trong bài báo của Kwan là: *"Một người đưa thư phải gửi thư đến một khu phố nhất định. Anh ta cần đi bộ qua tất cả các đường phố trong khu phố và trở lại bưu điện. Làm thế nào anh ta có thể thiết kế tuyến đường của mình để anh ta đi bộ khoảng cách ngắn nhất?"*
Mô hình giải quyết bài toán theo lý thuyết đồ thị: Sử dụng đồ thị liên thông, thiết kế một thuật toán để tìm một đường đi khép kín có số cạnh tối thiểu đi qua mọi cạnh của G, ít nhất một lần. Rõ ràng là nếu G là đồ thị Euler thì chúng ta có thể áp dụng thuật toán Fleury và kết quả chu trình Euler là một đường đi tối ưu, vì mỗi cạnh xuất hiện chính xác một lần. Tuy nhiên, nếu G không phải là Euler, chúng ta có thể xây dựng một siêu đồ thị G* là đồ thị Euler từ đồ thị G bằng cách nhân đôi một số cạnh nhất định. Lưu ý rằng bằng cách nhân đôi mọi cạnh của G, chúng ta có được một siêu đồ thị của G là đồ thị Euler. Vì vậy, vấn đề là tìm một tập hợp tối ưu các cạnh trong G để khi nhân đôi số cạnh của tập này ta được một đồ thị Euler. Định lý sau đây là một giải pháp cho vấn đề người đưa thư Trung Quốc áp dụng cho đồ thị vô hướng:

Định lý Goodman-Hedetniemi (1973)

Nếu G là một đồ thị liên thông có q cạnh thì hành trình ngắn nhất trong G có chiều dài: q + m(G), trong đó m(G) là số cạnh mà hành trình đi qua hai lần.

G có một số chẵn các đỉnh bậc lẻ, gọi số lượng này là 2k.

Gọi $V_0(G)$ là tập hợp các đỉnh bậc lẻ (2k đỉnh) của G. Ta phân 2k đỉnh này thành k cặp, mỗi tập hợp k cặp này được gọi là một phân hoạch P_i của $V_0(G)$

Với mỗi cặp đỉnh u, v trong một phân hoạch Pi của $V_0(G)$, ta xét khoảng cách giữa hai đỉnh đó (chính bằng độ dài đường đi ngắn nhất nhận u, v làm hai đỉnh đầu cuối), ký hiệu là d(u, v). Tính khoảng cách của k cặp đỉnh, rồi cộng lại ta được tổng $d(P_i)$

Số m(G) chính là số nhỏ nhất trong các tổng $d(P_i)$

Trong trường hợp đồ thị có trọng số thì m(G) chính là trọng số nhỏ nhất trong tổng các $d(P_i)$.

Phát biểu bài toán: *"Một người đưa thư phải gửi thư đến một khu phố nhất định. Anh ta cần đi bộ qua tất cả các đường phố trong khu phố và trở lại bưu điện. Làm thế nào anh ta có thể thiết kế tuyến đường của mình để anh ta đi bộ khoảng cách ngắn nhất?"*

Input: Đồ thị trọng số liên thông G.

Output: Một đường đi khép kín tối ưu (có tổng trọng số bé nhất) trong G, đi qua mọi cạnh, ít nhất 1 lần.

Thuật toán:

Bước 1: Liệt kê các đỉnh bậc lẻ của đồ thị.

Bước 2: Phân hoạch tất cả các cặp đỉnh có thể của các đỉnh bậc lẻ.

Bước 3: Với mỗi cặp, tìm các cạnh kết nối các đỉnh có trọng số nhỏ nhất.

Bước 4: Lấy phân hoạch chứa các cặp cạnh, sao cho tổng trọng số là nhỏ nhất.

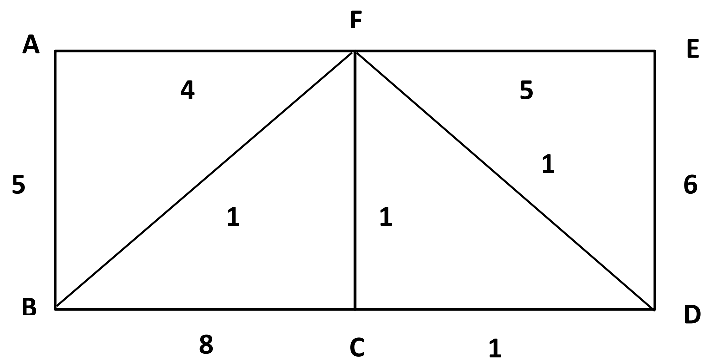
Bước 5: Trên đồ thị ban đầu, thêm các cạnh được tìm thấy ở bước 4.

Bước 6: Độ dài tối ưu của tuyến đường trong bài toán người đưa thư Trung Hoa chính là tổng trọng số của các cạnh của đồ thị được hình thành ở bước 5.

Dễ dàng để chỉ ra hành trình của tuyến đường này dựa vào thuật toán tìm chu trình Euler.

Ví dụ 2.46

Xác định hành trình đi qua tất cả các cạnh của đồ thị ít nhất một lần, sao cho tổng trọng số bé nhất của đồ thị sau đây:



Hình 2.56: Ví dụ bài toán người đưa thư Trung Hoa.

Hướng dẫn:

Xác định bậc của các đỉnh trong đồ thị:

Đỉnh	**Bậc**
A	2
B	3
C	3
D	3
E	2
F	5

Bước 1: Xác định các đỉnh có bậc lẻ

Như vậy đồ thị có các đỉnh B – 3, C – 3, D – 3, F – 5 là các đỉnh bậc lẻ.

Bước 2: Phân hoạch

Phân hoạch 4 đỉnh trên thành 3 cặp như sau:

Phân hoạch P_1 ={ (B, C), (D, F)}

Phân hoạch P_2 ={ (B, D), (C, F)}

Phân hoạch P_3 ={ (B, F), (C, D)}

Bước 3: Với từng phân hoạch trong bước 2, xác định các cạnh nối các đỉnh có trọng số bé nhất:

Phân hoạch 1: P_1 = { (B, C) , (D, F)}

$d(P_1) = 8 + 6 + 5 = 19$.

Phân hoạch 2: P_2 ={ (B, D), (C, F)}

$d(P_2) = (10 + 8) + (8 + 5 + 4) = 35$.

Phân hoạch 3: P_3 ={ (B, F), (C, D)}

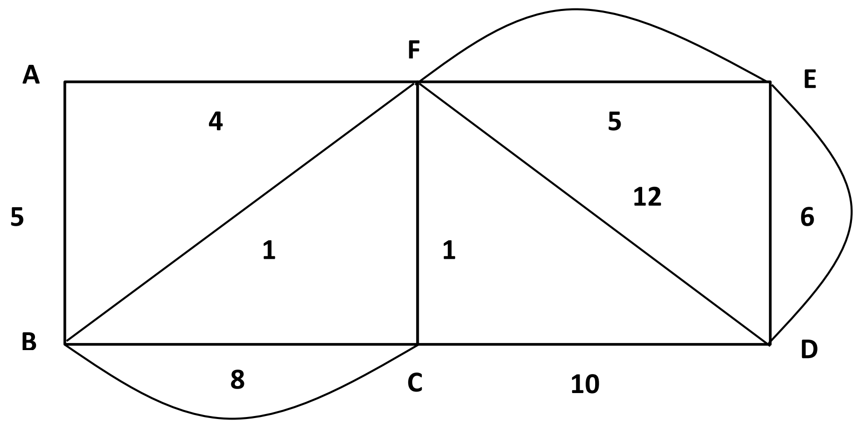
$d(P_3) = (5 + 4) + 10 = 19$.

Bước 4: Tìm được 2 phân hoạch ((B, C), (D, F)) và ((B, F), (C, D)) có trọng số nhỏ nhất, đều bằng 19.

Bước 5: Trên đồ thị ban đầu thêm các cạnh được tìm thấy ở bước 4

Có 2 trường hợp:

Trường hợp 1: Chọn phân hoạch P_1 ={(B,C), (D, F)}



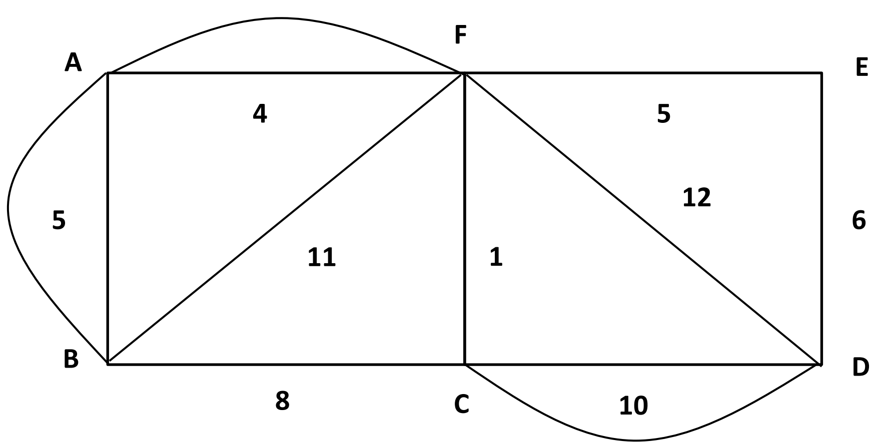
Hình 2.57: Kết quả trường hợp 1 – bài toán người đưa thư Trung Hoa.

Tổng trọng số của đường đi khép kín thu được là: (5 + 8 +10 + 6 + 5 + 4 + 11 +18 +18) + (8 + 6 + 5) = 79 + 19 = 98.

Hành trình khép kín xuất phát từ A trong trường hợp này là A→ F → E → D → F → E → D → C → F → B → C → B → A đi qua tất cả các cạnh của đồ thị, ít nhất một lần, có trọng số bé nhất = 98.

Trường hợp 2: Chọn phân hoạch P_3 ={(B, F), (C, D)}

Thêm các cạnh phát sinh ở bước 4, kết quả thu được đồ thị như sau:



Hình 2.58: Kết quả trường hợp 2 – bài toán người đưa thư Trung Hoa.

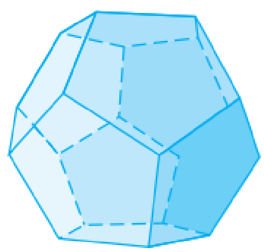
Tổng trọng số của đường đi khép kín thu được là: (5 + 8 + 10 + 6 + 5 + 4 + 11 + 18 + 18) + (10 + 5 + 4) = 79 + 19 = 98.

Hành trình khép kín xuất phát từ A trong trường hợp này là A→ F → A → B → F → E → D → C → D → F → C → B → A đi qua tất cả các cạnh của đồ thị, ít nhất một lần, có tổng trọng số bé nhất = 98.

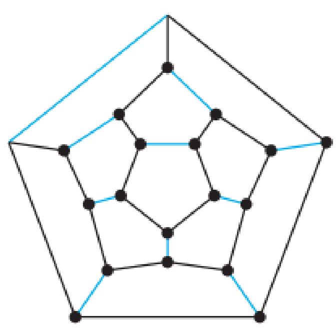
2.3.2. Đồ thị Hamilton

William Rowan Hamilton (04/8/1805 – 02/9/1865) là một nhà toán học, vật lý và thiên văn học người Ireland. Ông đã có những đóng góp quan trọng trong việc phát triển quang học, động lực học, toán học, hình học và đại số. Khám phá của ông về các quaternion là công trình nổi tiếng nhất. Công trình của ông rất quan trọng trong sự phát triển của cơ học lượng tử. Tài năng của Hamilton đã được phát hiện từ rất sớm bởi nhà thiên văn học John Brinkley. Năm 1823, khi Hamilton mười tám tuổi, John Brinkley đã nói rằng: *"Chàng trai trẻ này, tôi không nói rằng sẽ là mà bây giờ chính là nhà toán học hàng đầu ở tuổi của anh"*.

Năm 1859, ông đưa ra một câu đố liên quan đến hình khối gồm 12 mặt hình ngũ giác giống hệt nhau, là tiền đề liên quan đến bài toán tìm đường đi đi qua tất cả đỉnh của đồ thị, mỗi đỉnh một lần.



Hình 2.59: Dodecahedron.



Hình 2.60: Biểu diễn của Dodecahedron trên mặt phẳng.

Mỗi đỉnh được gán nhãn bằng tên của một thành phố lớn trên thế giới như London, Paris, Hong Kong, New York, v.v.. Bài toán mà Hamilton đặt ra là bắt đầu từ một thành phố, thăm quan thế giới bằng cách đến thăm các thành phố này đúng một lần và trở về thành phố khởi đầu. Một cách giải bài toán này là tưởng tượng bề mặt của khối 12 mặt được kéo ra và đặt phẳng trong mặt phẳng, như hình 2.60.

Dễ dàng vạch ra một chu trình đi qua tất cả các đỉnh của đồ thị, mỗi đỉnh đi qua đúng một lần (Mỗi thành phố được biểu diễn bằng một điểm trên đồ thị, nhiều cạnh được bỏ qua trong chu trình).

2.3.2.1. Các định nghĩa và định lý

Định nghĩa 2.28

Xét đồ thị liên thông G.

Đường đi qua tất cả các đỉnh của đồ thị G mỗi đỉnh đúng một lần được gọi là đường đi Hamilton.

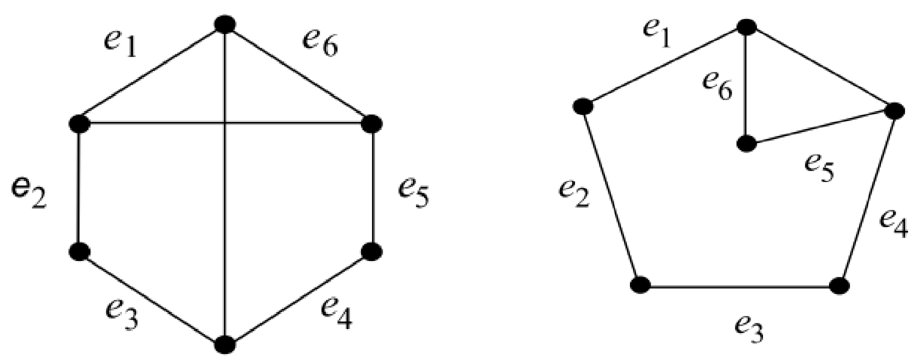
Đồ thị G chứa đường đi Hamilton được gọi là đồ thị nửa Hamilton.

Chu trình bắt đầu từ một đỉnh v nào đó qua tất cả các đỉnh còn lại mỗi đỉnh đúng một lần rồi quay trở về v được gọi là chu trình Hamilton.

Đồ thị G được gọi là đồ thị Hamilton nếu nó chứa chu trình.

Ví dụ 2.47

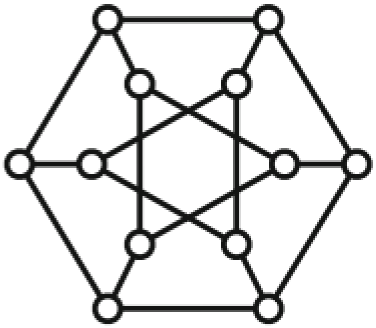
Ví dụ về đồ thị Hamilton



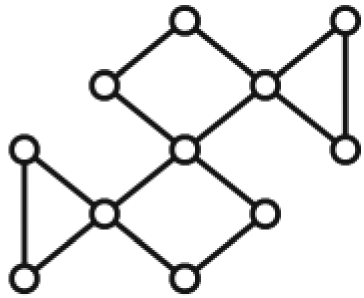
Hình 2.61: Ví dụ về đồ thị Hamilton.

Ví dụ 2.48

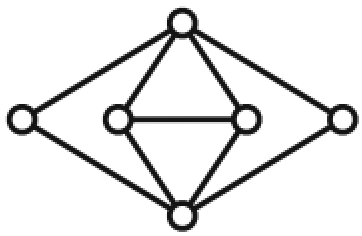
Ví dụ về đồ thị Hamilton, đồ thị nửa Hamilton



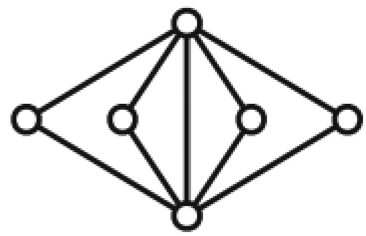
H_1



H_2



H_3



H_4

Hình 2.62: Một số ví dụ về Hamilton.

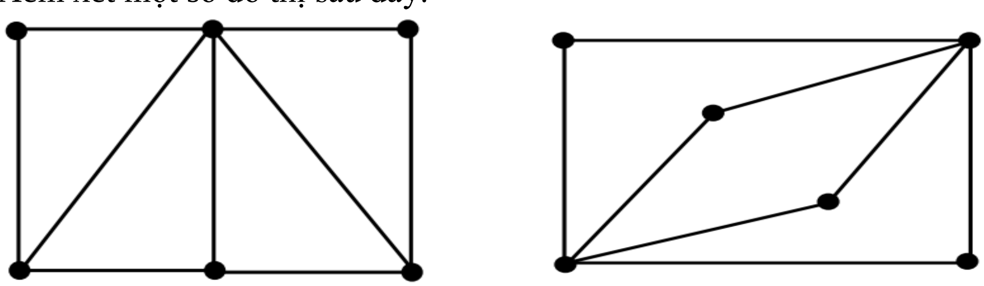
H_1 là đồ thị Hamilton, chứa chu trình Hamilton;

H_2, H_3 là đồ thị nửa Hamilton, chứa đường đi Hamilton;

H_4 không phải là đồ thị Hamilton, không là đồ thị nửa Hamilton.

Ví dụ 2.49

Xem xét một số đồ thị sau đây:



Hình 2.63: Đồ thị H_5 và đồ thị H_6 Euler – Hamilton.

H_5 là đồ thị Hamilton nhưng không phải đồ thị Euler;

H_6 là đồ thị Euler nhưng không phải đồ thị Hamilton.

Không giống như bài toán về đồ thị Euler (đã sáng tỏ điều kiện để đồ thị có chu trình hoặc đường đi Euler, có thuật toán để xác định chu trình Euler), cho đến hiện nay, vấn đề tìm ra tiêu chuẩn (điều kiện cần và đủ) để nhận biết một đồ thị có chu trình hay đường đi Hamilton hay không, đang tiếp tục được nghiên cứu. Các kết quả có được chỉ dừng lại ở các điều kiện đủ để một đồ thị có chu trình hay đường đi Hamilton.

Sau đây là một số kết quả thu được từ các nhà nghiên cứu về đồ thị Hamilton:

Định lý 2.6
Định lý Dirac (1952): Cho đồ thị G liên thông và có n đỉnh ($n \geq 3$). Nếu các đỉnh của G đều có bậc $\geq \frac{n}{2}$ thì G có chu trình Hamilton.

Ví dụ 2.50

Cho đồ thị G_{31} (Hình 2.64). Chứng tỏ đồ thị G_{31} có chu trình Hamilton?

Hướng dẫn:

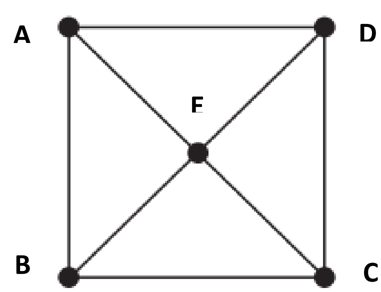
Đồ thị G_{31} là đồ thị liên thông, có $n = 5$ đỉnh (thỏa mãn điều kiện $n \geq 3$)

Bậc các đỉnh của đồ thị: deg(A) = deg(B) = deg(C) = deg(D) = $3 \geq \frac{5}{2}$ ($n = 5$)

deg(E) = $4 \geq \frac{5}{2}$ thỏa mãn các điều kiện trong định lý Dirac.

Do đó, G_{31} có chu trình Hamilton, có thể chỉ ra chu trình đó như sau:

$A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow D \rightarrow E \rightarrow A$

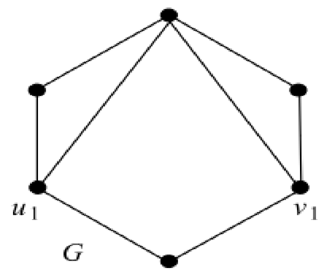


Hình 2.64: Minh họa định lý Dirac.

Bổ đề 2.6
Cho đồ thị G có n đỉnh. Các đỉnh u, v là các đỉnh không kề nhau trong G sao cho $deg(u) + deg(v) \geq n$. Gọi G + uv là đồ thị thu được từ đồ thị G khi nối u với v bởi 1 cạnh. G là đồ thị Hamilton nếu và chỉ nếu đồ thị G + uv là Hamilton.

Ví dụ 2.52

Xem xét Ví dụ sau đây:



Hình 2.65: Minh họa cho định lý Ore.

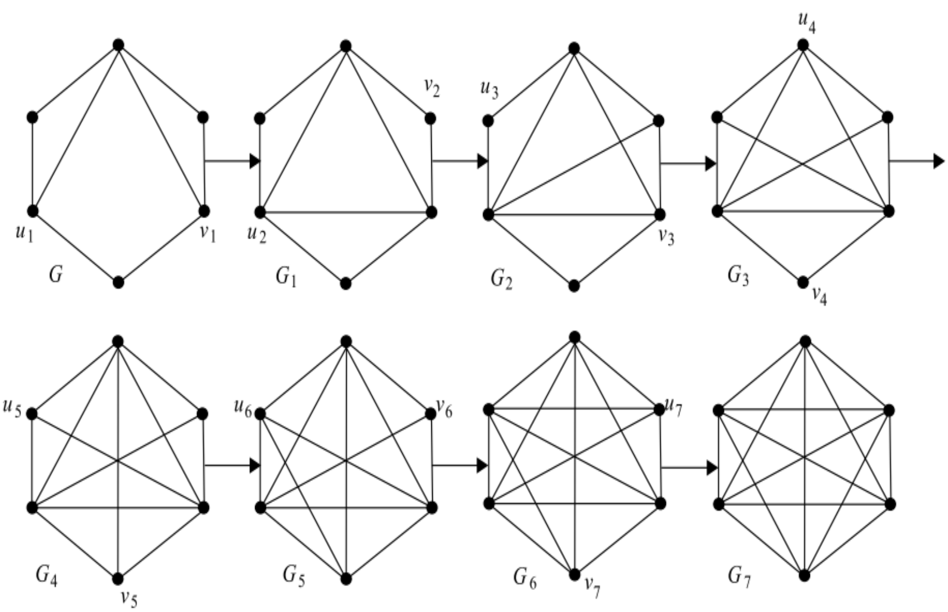
Đồ thị G có 6 đỉnh, $deg(u_1) = 3$, $deg(v_1) = 3$.

Do đó $deg(u_1) + deg(v_1) = 6 \geq n$

Gọi G là đồ thị có n đỉnh. Nếu có hai đỉnh không liền kề u_1 và v_1 trong G sao cho $deg(u_1) + deg(v_1) \geq n$, nối u_1 và v_1 bằng một cạnh để tạo thành siêu đồ thị G_1. Bây giờ, nếu có hai đỉnh không liền kề u_2 và v_2 trong G_1 sao cho $deg(u_1) + deg(v_1) \geq n$, nối u_2 và v_2 bằng một cạnh để tạo thành siêu đồ thị G_2. Tiếp tục theo cách này, một cách đệ quy các cặp đỉnh không liền kề có tổng độ bằng ít nhất là n cho đến khi không còn cặp nào như vậy.

Do đó, siêu đồ thị cuối cùng thu được được gọi là bao đóng của G và được ký hiệu là c(G).

Hình 2.66 dưới đây minh họa cho bao đóng của đồ thị G.



Hình 2.66: Bao đóng của đồ thị G.

Chúng ta quan sát trong ví dụ này rằng có các lựa chọn khác nhau của các cặp không liền kề đỉnh u và v với deg(u) + deg(v) ≥ n . Do đó, thủ tục đóng cửa có thể được thực hiện trong một số cách khác nhau và mỗi cách khác nhau cho cùng một kết quả.

Định lý 2.7
Định lý Bondy and Chvátal's: Đồ thị G là Hamilton nếu và chỉ nếu bao đóng của G là Hamilton**.**

Trong Ví dụ 2.52: Đồ thị đầy đủ G_7 là một đồ thị Hamilton, do đó các đồ thị G_6, G_5, G_4, G_3, G_2, G_1, G cũng là các đồ thị Hamilton vì:

G_7 là bao đóng của G_6, do đó G_6 là Hamilton;

G_6 là bao đóng của G_5, do đó G_5 là Hamilton;

G_5 là bao đóng của G_4, do đó G_4 là Hamilton;

…

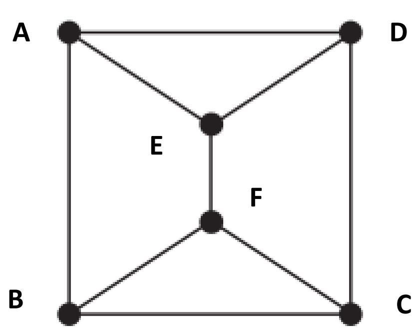
G_2 là bao đóng của G_1, do đó G_1 là Hamilton;

G_1 là bao đóng của G, do đó G là Hamilton;

Định lý 2.8
Định lý Ore (1960): Đơn đồ thị vô hướng G có n đỉnh (n≥ 3). Nếu mọi cặp đỉnh u, v không kề nhau của G đều thỏa mãn deg(u) + deg(v) ≥ n thì G là đồ thị Hamilton.

Ví dụ 2.53

Cho đồ thị G_{32} sau đây:



Hình 2.67: Minh họa cho định lý Ore.

Đồ thị G_{32} có chu trình Hamilton hay không?

Hướng dẫn:

Đồ thị G_{32} có n = 6 đỉnh (n ≥ 3);

Bậc các đỉnh deg(A) = deg(B) = deg(C) = deg(D) = deg(E) = deg(F) = 3.

Đỉnh	**Đỉnh Kề**	**Đỉnh không kề**	**Kiểm tra tính chất deg(u) + deg(v) ≥ n với u, v là 2 đỉnh không kề nhau của G**
A	B, D, E	C, F	deg(A) + deg(C) = deg(A) + deg(F) = 6 ≥ 6
B	A, C, F	D, E	deg(B) + deg(D) = deg(B) + deg(E) = 6 ≥ 6
C	B, D, F	A, E	deg(C) + deg(A) = deg(C) + deg(E) = 6 ≥ 6
D	A, C, E	B, F	deg(D) + deg(B) = deg(D) + deg(F) = 6 ≥ 6
E	A, D, F	B, C	deg(E) + deg(B) = deg(E) + deg(C) = 6 ≥ 6
F	B, C, E	A, D	deg(F) + deg(A) = deg(F) + deg(D) = 6 ≥ 6

Dựa vào định lý Ore, chúng ta có thể khẳng định đồ thị G_{32} là đồ thị Hamilton, chứa chu trình Hamilton.

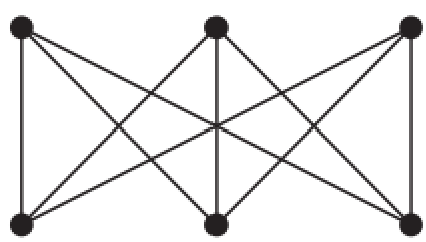
Có thể chỉ ra chu trình đó là: A → B → C → F → E → D → A

Định lý 2.9

Nếu G là đồ thị phân đôi với hai tập đỉnh là V_1, V_2 có số đỉnh cùng bằng n (n ≥ 2) và bậc của mỗi đỉnh lớn hơn $\frac{n}{2}$ thì G là một đồ thị Hamilton.

Ví dụ 2.54

Cho đồ thị hai phía G_{33} sau đây:



Hình 2.68: Đồ thị đầy 2 phía là đồ thị Hamilton.

Dễ dàng nhận thấy, đồ thị G_{33} chính là đồ thị $K_{3,3}$ có 6 đỉnh (mỗi phía có ba đỉnh), bậc mỗi đỉnh của đồ thị = 3 ≥ $\frac{3}{2}$. Do đó, đồ thị G_{33} là đồ thị Hamilton.

Định lý 2.10

Giả sử G = (V, E) là đồ thị có hướng liên thông với n đỉnh. Nếu $deg^+(v) \geq \frac{n}{2}$, $deg^-(v)) \geq \frac{n}{2}$, $\forall v \in V$ thì G là Hamilton.

2.3.2.2. Ứng dụng của bài toán Hamilton

Bài toán người bán hàng (*Travelling salesman problem - TSP*) là một bài toán NP - khó thuộc thể loại tối ưu rời rạc hay tổ hợp được nghiên cứu trong vận trù học hoặc lý thuyết khoa học máy tính.

Bài toán được phát biểu như sau: *"Cho trước một danh sách các thành phố và khoảng cách giữa chúng, tìm chu trình ngắn nhất thăm mỗi thành phố đúng một lần"*.

Bài toán được nêu ra lần đầu tiên năm 1930 và là một trong những bài toán được nghiên cứu sâu nhất trong tối ưu hóa. Nó thường được dùng làm thước đo cho nhiều phương pháp tối ưu hóa. Mặc dù bài toán rất khó giải trong trường hợp tổng quát, có nhiều phương pháp giải chính xác cũng như heuristic đã được tìm ra để giải quyết một số trường hợp có tới hàng chục nghìn thành phố.

Bài toán người bán hàng
Lịch sử bài toán: Bài toán người bán hàng được định nghĩa trong thế kỉ XIX bởi nhà toán học Ireland William Rowan Hamilton và nhà toán học Anh Thomas Kirkman. Trò chơi Icosa của Hamilton là một trò chơi giải trí dựa trên việc tìm kiếm chu trình Hamilton. Trường hợp tổng quát của TSP có thể được nghiên cứu lần đầu tiên bởi các nhà toán học ở Vienna và Harvard trong những năm 1930, đặc biệt là Karl Menger, người đã định nghĩa bài toán, xem xét thuật toán hiển nhiên nhất cho bài toán và phát hiện ra thuật toán láng giềng gần nhất là không tối ưu. Hassler Whitney ở Đại học Princeton đưa ra tên bài toán *người bán hàng* ngay sau đó. Trong những năm 1950 và 1960, bài toán trở nên phổ biến trong giới nghiên cứu khoa học ở châu Âu và Mỹ. George Dantzig, Delbert Ray Fulkerson và Selmer M. Johnson ở Công ty RAND tại Santa Monica đã có đóng góp quan trọng cho bài toán này, biểu diễn bài toán dưới dạng quy hoạch nguyên và đưa ra phương pháp mặt phẳng cắt để tìm ra lời giải. Với phương pháp mới này, họ đã giải được tối ưu một trường hợp có 49 thành phố bằng cách xây dựng một chu trình và chứng minh rằng không có chu trình nào ngắn hơn. Trong những thập niên tiếp theo, bài toán được nghiên cứu bởi nhiều nhà nghiên cứu trong các lĩnh vực toán học, khoa học máy tính, hóa học, vật lý và các ngành khác. Năm 1972, Richard M. Karp chứng minh bài toán chu trình Hamilton là NP - đầy đủ, kéo theo bài toán TSP cũng là NP - đầy đủ. Đây là một lý giải toán học cho sự khó khăn trong việc tìm kiếm chu trình ngắn nhất. Một bước tiến lớn được thực hiện cuối thập niên 1970 và 1980 khi Grötschel, Padberg, Rinaldi và cộng sự đã giải được những trường hợp lên tới 2392 thành phố, sử dụng phương pháp mặt phẳng cắt và nhánh cận.

Trong thập niên 1990, Applegate, Bixby, Chvátal và Cook phát triển một chương trình mang tên Concorde giải được nhiều trường hợp có độ lớn kỉ lục hiện nay. Gerhard Reinelt xuất bản một bộ dữ liệu các trường hợp có độ khó khác nhau mang tên TSPLIB năm 1991 và nó đã được sử dụng bởi nhiều nhóm nghiên cứu để so sánh kết quả. Năm 2005, Cook và cộng sự đã giải được một trường hợp có 33810 thành phố, xuất phát từ một bài toán thiết kế vi mạch. Đây là trường hợp lớn nhất đã được giải trong TSPLIB. Trong nhiều trường hợp khác với hàng triệu thành phố, người ta đã tìm được lời giải với sai số không quá 1% so với lời giải tối ưu.

Phát biểu bài toán:

"Có một người giao hàng cần đi giao hàng tại n thành phố. Anh ta xuất phát từ một thành phố nào đó, đi qua các thành phố khác để giao hàng và trở về thành phố ban đầu. Mỗi thành phố chỉ đến một lần và khoảng cách từ một thành phố đến các thành phố khác đã được biết trước. Hãy tìm một chu trình (một đường đi khép kín thỏa mãn điều kiện trên) sao cho tổng độ dài các cạnh là nhỏ nhất".

Mô hình hóa bài toán về dạng đồ thị:

Bài toán người bán hàng có thể được mô hình hoá như một đồ thị vô hướng có trọng số, trong đó mỗi thành phố là một đỉnh của đồ thị còn đường đi giữa các thành phố là mỗi cách. Khoảng cách giữa hai thành phố là độ dài cạnh. Đây là vấn đề tối thiểu hoá với điểm đầu và điểm cuối là cùng một đỉnh sau khi thăm hết các đỉnh còn lại đúng một lần. Mô hình này thường là một đồ thị đầy đủ (giữa mỗi cặp đỉnh đều có cạnh). Nếu không có đường giữa hai thành phố thì có thể thêm một cạnh với độ dài đủ lớn vào đồ thị mà không ảnh hưởng đến kết quả tối ưu sau cùng.

Tìm kiếm lời giải:

Cũng như các bài toán NP - khó khác, có các hướng sau đây để tiếp cận bài toán người bán hàng:

+ Thiết kế thuật toán tìm kiếm lời giải tối ưu (thường hoạt động hiệu quả cho những trường hợp nhỏ).

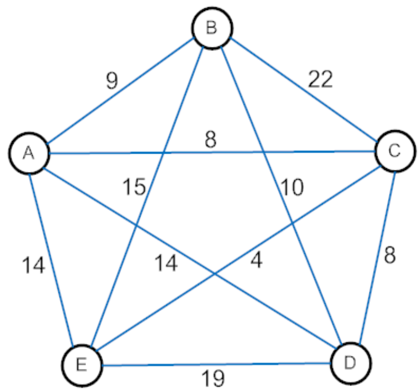
+ Thiết kế thuật toán heuristic để tìm những lời giải tốt nhưng không nhất thiết tối ưu.

+ Thiết kế thuật toán xấp xỉ để tìm những lời giải không quá lớn so với lời giải tối ưu.

+ Giải quyết các trường hợp đặc biệt.

Ví dụ 2.55

Xét đồ thị G_{34} sau đây:



Hình 2.69: Minh họa bài toán người bán hàng.

Bài toán có năm thành phố với khoảng cách giữa các thành phố được tính bằng kilômet (km). Sử dụng thuật toán người bán hàng, bắt đầu lần lượt từ mỗi đỉnh, tìm đường đi thích hợp cho người bán hàng, cửa hàng đặt tại A và cần đi qua tất cả thành phố còn lại.

Thuật toán người bán hàng
Các bước của thuật toán: **Bước 1:** Chọn một đỉnh bắt đầu V. **Bước 2:** Từ đỉnh hiện hành chọn cạnh nối có chiều dài nhỏ nhất đến các đỉnh chưa đến. Đánh dấu đã đến đỉnh vừa chọn. **Bước 3:** Nếu còn đỉnh chưa đến thì quay lại bước 2. **Bước 4:** Quay lại đỉnh V.

Hướng dẫn:

Bắt đầu với đỉnh A

Từ A, đỉnh gần nhất là C, chiều dài AC = 8

Từ C, đỉnh chưa viếng thăm gần nhất là E, CE = 4

Từ E, đỉnh chưa viếng thăm gần nhất là B, EB = 15

Từ B, đỉnh chưa viếng thăm gần nhất là D, BD = 10

Không còn đỉnh chưa viếng thăm, vì vậy quay về A, DA = 14

Tổng chi phí ACEBDA là 8 + 4 + 15 + 10 + 14 = 51.

Lặp lại bắt đầu với những đỉnh khác:

Đỉnh bắt đầu	Đường đi	Tổng chiều dài
A	ACEBDA	51
B	BACEDB	50
C	CEABDC	45
D	DCEABD	45
E	ECABDE	50
E	ECDBAE	45

Có ba đường đi có chiều dài 45 km là giống nhau. Một nhân viên bán hàng có cửa hàng tại A, đường đi tốt nhất tìm ra bởi thuật toán người bán hàng là ABDCEA = 45 km.

2.4. CÂY VÀ CÂY BAO TRÙM CỦA ĐỒ THỊ

2.4.1. Cây

Ở phần này, chúng ta sẽ tìm hiểu về một lớp đồ thị rất đặc biệt, được gọi là cây. Cây có rất nhiều ứng dụng trong thực tế, chẳng hạn xác định gia phả của một dòng họ, biểu diễn thư mục hoặc tập tin trong máy tính.

Có rất nhiều cách để xác định cây, nhưng cách đơn giản nhất, cây được xác định như định nghĩa 2.29 dưới đây:

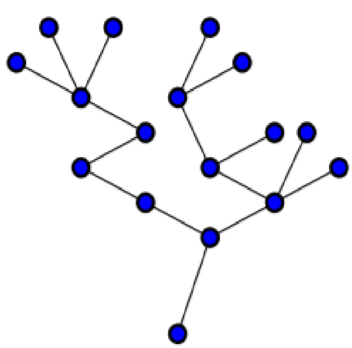
Định nghĩa 2.29

Cây là đồ thị liên thông và không chứa chu trình.

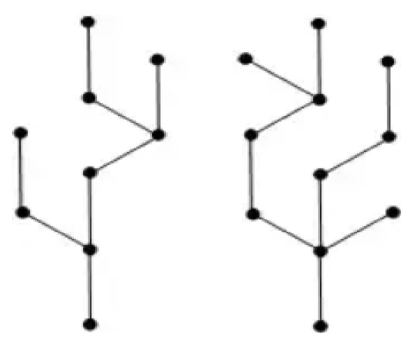
Rừng là đồ thị có nhiều thành phần liên thông, trong đó mỗi thành phần liên thông này là một cây.

Trong cây, lá có bậc bằng 1.

Ví dụ 2.56



Hình 2.70: Minh họa cây.



Hình 2.71: Minh họa rừng.

Trong hình 2.71, rừng gồm nhiều cây (nhiều thành phần liên thông, mỗi thành phần liên thông là một cây).

Định lý 2.11
Cho T là một cây, giữa hai đỉnh bất kỳ của T luôn luôn tồn tại một và chỉ một đường trong T nối chúng.
Bổ đề 2.7
Mỗi cây T hữu hạn có ít nhất hai đỉnh và có ít nhất hai lá.
Bổ đề 2.8
Xóa đi một lá trên cây có n đỉnh sẽ tạo ra một cây mới có (n -1) đỉnh.
Định lý 2.12
Với một đồ thị G có n đỉnh, các mệnh đề sau là tương đương 1. *G là cây* 2. *G liên thông và có (n – 1) cạnh* 3. *G có (n –1) cạnh và không có chu trình* 4. *Với mọi cặp u, v thuộc V(G), có duy nhất một đường dẫn từ u đến v không lặp lại bất kỳ đỉnh nào* 5. *G liên thông và mỗi cạnh của G đều là cầu* 6. *G không chứa chu trình và với mỗi cạnh mới e (tạo ra từ 2 đỉnh bất kỳ của đồ thị), G + e có chính xác một chu trình.*

Một đồ thị thông thường chứa rất nhiều cây dưới dạng đồ thị con. Một trong số các cây được quan tâm đặc biệt là cây chứa mọi đỉnh của đồ thị. Cây như vậy được gọi là cây bao trùm.

Định nghĩa 2.30
Cây T = (V, E) là cây bao trùm của đồ thị G = (V', E') nếu V = V' và E ⊆ E'

Định lý 2.13
Đồ thị G có cây bao trùm khi và chỉ khi G liên thông

Định lý 2.14
Cho cây bao trùm T của đồ thị G. Thêm vào T một cạnh của G (không thuộc T), ta được một chu trình trong T. Hủy một cạnh bất kỳ trên chu trình này khỏi T, ta nhận được một cây bao trùm mới của G.

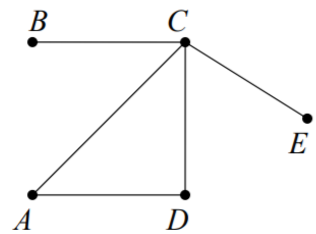
Ví dụ 2.57

Cho đồ thị G_{35} như hình 2.72 dưới đây.

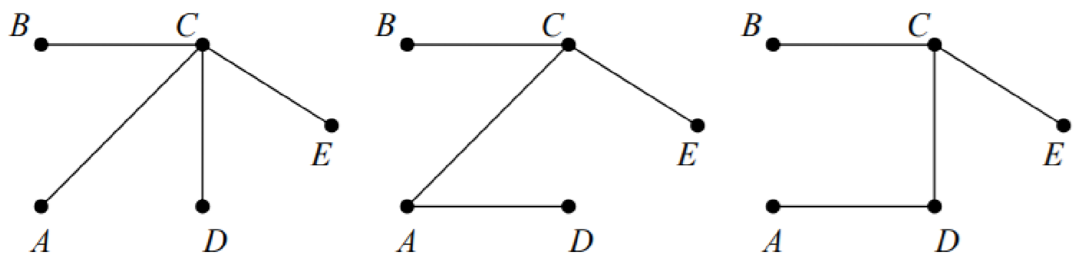
Vẽ hình dạng một số cây bao trùm của G_{35}?

Hướng dẫn:

Bằng cách giữ nguyên số đỉnh của đồ thị, lược bỏ đi 1 số cạnh để không tạo thành chu trình (chỉ giữ lại 4 cạnh, theo định nghĩa của cây có n đỉnh thì có n -1 cạnh), ta thu được cây bao trùm của đồ thị.



Hình 2.72: Minh họa cây bao trùm của đồ thị.



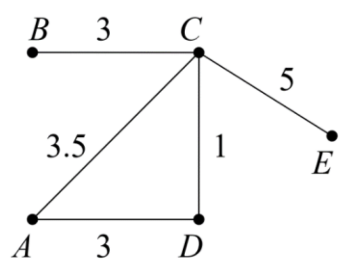
Hình 2.73: Kết quả thu được bằng cách lược bỏ các cạnh khác nhau.

2.4.2. Cây bao trùm cực tiểu

Định nghĩa 2.31
Cho đồ thị G. Giả sử mỗi cạnh của đồ thị G được gán với một giá trị, gọi là trọng số của cạnh ấy. Khi đó G được gọi là đồ thị trọng số (weighted graph)

Ví dụ 2.58

Xem xét bài toán ở khía cạnh thực tế, giả sử cần thiết kế mạng với chi phí kết nối như hình dưới đây:



Hình 2.74: Minh họa bài toán cây bao trùm cực tiểu.

Tính giá của từng cây bao trùm (cây bao trùm)

Hướng dẫn:

Cây bao trùm T_1 có giá = 3 + 3.5 + 1 + 5 = 12,5

Cây bao trùm T_2 có giá = 3 + 5 + 3.5 + 3 = 14,5

Cây bao trùm T_3 có giá = 3 + 5 + 1 + 3 = 12

Rõ ràng, cây bao trùm T_3 có giá bé nhất.

Định nghĩa 2.32

Cây bao trùm cực tiểu của một đồ thị có trọng số liên thông là cây bao trùm có tổng trọng số của các cạnh bé nhất.

Nếu G là đồ thị có trọng số và e là cạnh của G, thì w(e) biểu thị trọng số của e và w (G) biểu thị tổng trọng lượng của G.

Bài toán tìm cây bao trùm cực tiểu cho đồ thị chắc chắn có thể giải quyết được. Một giải pháp là liệt kê tất cả các cây bao trùm của đồ thị, tính tổng trọng số của từng cây và chọn một cây có tổng trọng số bé nhất (xem Ví dụ 2.58). Tuy nhiên, giải pháp này không hiệu quả về thời gian tính toán vì số lượng cây bao trùm khác nhau quá lớn. Chẳng hạn, một đồ thị đầy đủ với n đỉnh có n^{n-2} cây bao trùm. Ngay cả khi sử dụng các máy tính nhanh nhất hiện nay, việc kiểm tra tất cả các cây như vậy trong một đồ thị với khoảng 100 đỉnh sẽ cần nhiều thời gian hơn so với ước tính thời gian tồn tại của vũ trụ.

Năm 1956 và 1957, Joseph B. Kruskal và Robert C. Prim đã mô tả các thuật toán hiệu quả hơn nhiều để xây dựng các cây bao trùm cực tiểu. Ngay cả đối với các đồ thị lớn, cả hai thuật toán đều có thể được thực hiện để có thời gian tính toán tương đối ngắn.

Bài toán tìm cây bao trùm cực tiểu

Input: Cho G = (V, E) là đồ thị vô hướng, liên thông có trọng số, mỗi cạnh $e \in E$ có trọng số $w(e) \geq 0$. Giả sử T = (V_T, E_T) là cây bao trùm của đồ thị G (trong đó V_T = V).

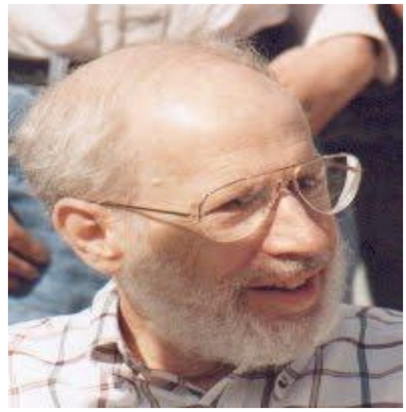
Gọi w(T) là trọng số của cây T, w(T) là tổng trọng số của tất cả các cạnh của cây bao trùm T.

$w(T) = \sum_{e \in V_T} m(e)$

Output: Cây bao trùm T có w(T) nhận giá trị nhỏ nhất.

2.4.3. Thuật toán Kruskal

OSEPH BERNARD KRUSKAL (1928 - 2010)



Joseph Kruskal sinh ra ở thành phố New York, cha ông là một người buôn bán lông thú và mẹ ông là nhà quảng cáo khá nổi tiếng của Origami trong thời kỳ đầu của truyền hình. Kruskal theo học Đại học Chicago và nhận bằng tiến sĩ ở Trường Đại học Princeton năm 1954. Ông là giảng viên toán học tại Princeton và Đại học Wisconsin và sau đó là trợ lý giáo sư tại Đại học Michigan. Năm 1959, ông trở thành thành viên của đội ngũ kỹ thuật tại Phòng thí nghiệm Bell, nơi ông làm việc cho đến khi nghỉ hưu vào cuối những năm 1990. Kruskal đã khám phá ra thuật toán của mình để tạo ra những cây bao trùm cực tiểu, khi ông còn là sinh viên năm thứ hai. Ông không chắc về bài báo hai trang rưỡi của mình về chủ đề này có xứng đáng để xuất bản, nhưng đã bị thuyết phục bởi những người khác để gửi nó. Lĩnh vực nghiên cứu sâu của ông bao gồm thống kê ngôn ngữ học và tâm lý học. Bên cạnh công trình của mình về những cây bao trùm tối thiểu, Kruskal còn được biết đến với những đóng góp cho lĩnh vực mở rộng quy mô đa chiều. Đáng chú ý là hai anh em của Joseph Kruskal, Martin và William, cũng là những nhà toán học nổi tiếng.

Trong thuật toán Kruskal, các cạnh của đồ thị được sắp xếp theo thứ tự tăng dần theo trọng số của các cạnh và được bổ sung vào cây từng bước. Ở mỗi bước, cạnh có trọng số bé sẽ được thêm vào để cây sau này trở thành cây bao trùm tối thiểu, với điều kiện là sự bổ sung này không tạo ra một chu trình. Sau khi (n – 1) cạnh đã được thêm vào (trong đó n là số đỉnh của đồ thị), các cạnh này cùng với các đỉnh của đồ thị tạo thành một cây bao trùm cực tiểu của đồ thị.

2.4.3.1. Cài đặt thuật toán Kruskal

Thuật toán tìm cây bao trùm cực tiểu Kruskal
Input: Đồ thị trọng số liên thông G có n đỉnh (n là số nguyên dương) **Output:** Cây bao trùm cực tiểu T của đồ thị G
Thuật toán: [Xây dựng một đồ thị con T của G chứa tất cả các đỉnh của G với các cạnh được thêm vào theo thứ tự tăng dần của trọng số. Ở mỗi giai đoạn, gọi m là số cạnh của T]

1. *Khởi tạo T để có tất cả các đỉnh của đồ thị và không có cạnh*
2. *Đặt E là tập các cạnh của đồ thị G, thiết lập m = 0*
3. *Trong khi (m < n -1)*

    3a. Tìm một cạnh e của E có trọng số nhỏ nhất

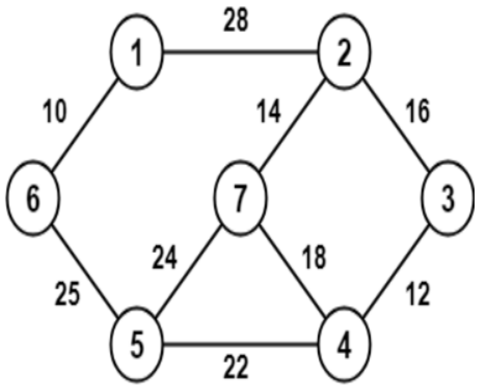
    3b. Xóa e khỏi E

    3c. Nếu việc thêm e vào tập cạnh T không tạo thành chu trình thì thêm e vào T và thiết lập m = m + 1

    Kết thúc vòng lặp.

Ví dụ 2.59

Cho đồ thị trọng số liên thông G_{36} sau đây:



Hình 2.75: Minh họa thuật toán Kruskal.

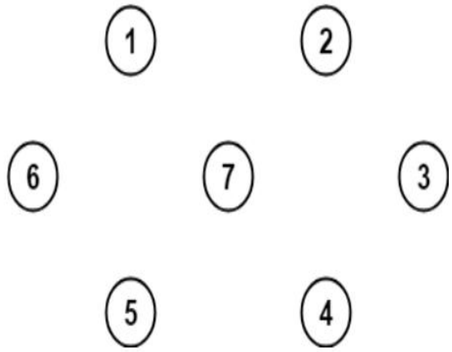
Sử dụng thuật toán Kruskal tìm cây bao trùm cực tiểu của đồ thị? Cho biết giá của cây bao trùm?

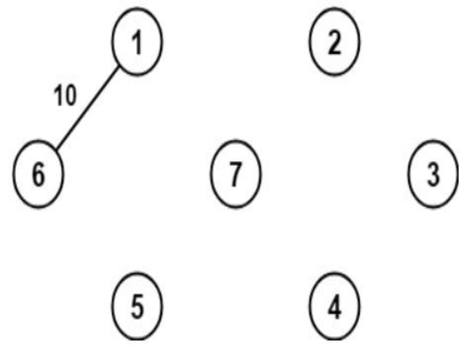
Hướng dẫn:

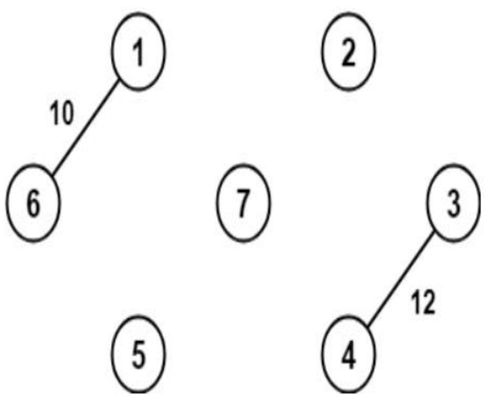
Trong thuật toán này có bước kết nạp có trọng số bé vào cây bao trùm, nên ta có thêm bước sắp xếp các cạnh của đồ thị tăng dần theo trọng số để tiện cho việc theo dõi kết nạp các cạnh vào cây bao trùm T.

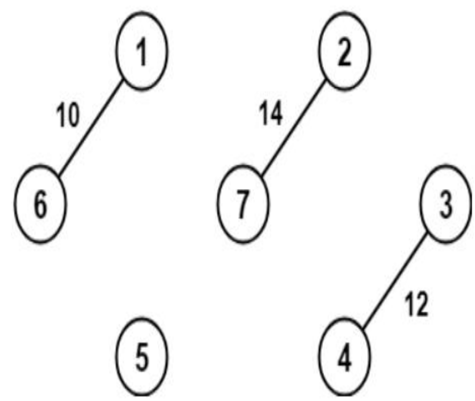
Cạnh	(1, 6)	(3, 4)	(2, 7)	(2, 3)	(4, 7)	(4, 5)	(5, 7)	(5, 6)	(1, 2)
Trọng số	10	12	14	16	18	22	24	25	28

Trình tự các bước của thuật toán như sau: *(Xem các bước từ trái sang phải, từ trên xuống dưới)*

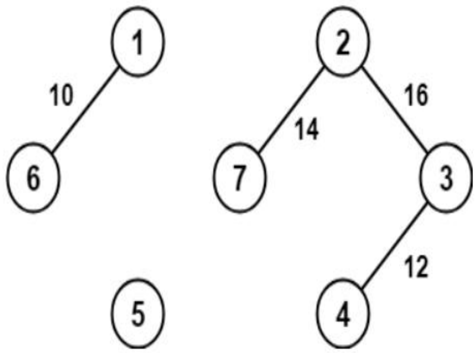
<table>
<tr>
<td>


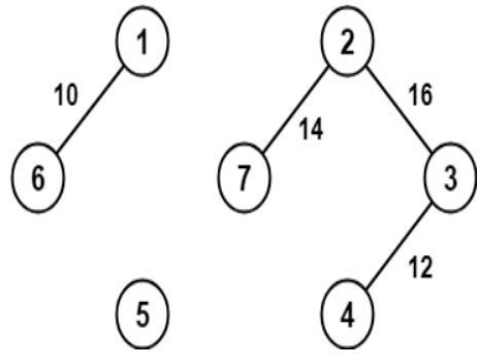
Bước 1: Khởi tạo cây bao trùm T chứa tất cả các đỉnh của đồ thị, không chứa cạnh.
Bước 2:
Thiết lập tập E là tập các cạnh của đồ thị;
Thiết lập m = 0 (m là số đỉnh của cây T).
</td>
<td>


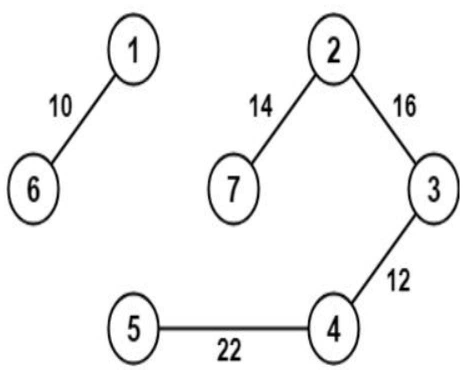
(Lặp) Bổ sung lần lượt các cạnh vào cây T đến khi T đủ n – 1 cạnh.
Đầu tiên bổ sung cạnh (1, 6) vào T;
Xóa (1, 6) khỏi tập E;
Thêm (1, 6) vào T;
Tăng m = 1.
</td>
</tr>
<tr>
<td>


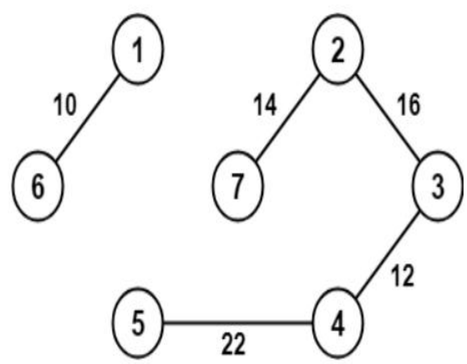
(Lặp) Bổ sung lần lượt các cạnh vào cây T đến khi T đủ n – 1 cạnh
Xem xét cạnh (3, 4):
Có trọng số bé nhất trong các cạnh còn lại của E;
Xóa cạnh (3, 4) khỏi E;
Việc thêm cạnh (3, 4) vào cây T không tạo thành chu trình;
Thực hiện:
Thêm cạnh (3, 4) vào cây T;
Tăng m = 2.
</td>
<td>


(Lặp) Bổ sung lần lượt các cạnh vào cây T đến khi T đủ n – 1 cạnh
Xem xét cạnh (2, 7):
Có trọng số bé nhất trong các cạnh còn lại của E;
Xóa cạnh (2, 7) khỏi E;
Việc thêm cạnh (2, 7) vào cây T không tạo thành chu trình;
Thực hiện:
Thêm cạnh (2, 7) vào cây T;
Tăng m = 3.
</td>
</tr>
</table>

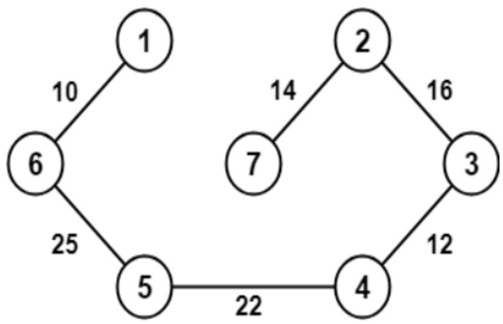
<table>
<tr>
<td>


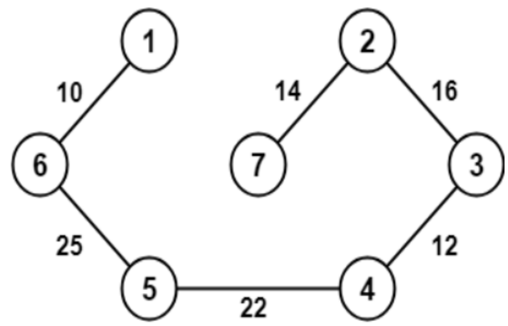
(Lặp) Bổ sung lần lượt các cạnh vào cây T đến khi T đủ n – 1 cạnh.
Xem xét cạnh (2, 3):
Có trọng số bé nhất trong các cạnh còn lại của E;
Xóa cạnh (2, 3) khỏi E;
Việc thêm cạnh (2, 3) vào cây T không tạo thành chu trình.
Thực hiện:
Thêm cạnh (2, 3) vào cây T;
Tăng m = 4.
</td>
<td>


(Lặp) Bổ sung lần lượt các cạnh vào cây T đến khi T đủ n – 1 cạnh.
Xem xét cạnh (4, 7):
Có trọng số bé nhất trong các cạnh còn lại của E;
Xóa cạnh (4, 7) khỏi E;
Việc thêm cạnh (2, 3) vào cây T tạo thành chu trình.
Thực hiện:
Xem cạnh tiếp theo trong E để bổ sung vào T, m = 4.
</td>
</tr>
<tr>
<td>


(Lặp) Bổ sung lần lượt các cạnh vào cây T đến khi T đủ n – 1 cạnh.
Xem xét cạnh (4, 5):
Có trọng số bé nhất trong các cạnh còn lại của E;
Xóa cạnh (4, 5) khỏi E;
</td>
<td>


(Lặp) Bổ sung lần lượt các cạnh vào cây T đến khi T đủ n – 1 cạnh.
Xem xét cạnh (5, 7):
Có trọng số bé nhất trong các cạnh còn lại của E;
Xóa cạnh (5, 7) khỏi E;
Việc thêm cạnh (5, 7) vào cây T
</td>
</tr>
</table>

<table>
<tr>
<td>Việc thêm cạnh (4, 5) vào cây T không tạo thành chu trình.
Thực hiện:
Thêm cạnh (4, 5) vào cây T;
Tăng m = 5.</td>
<td>tạo thành chu trình.
Thực hiện:
Xem cạnh tiếp theo trong E để bổ sung vào T, m = 5.</td>
</tr>
<tr>
<td>

(Lặp) Bổ sung lần lượt các cạnh vào cây T đến khi T đủ n – 1 cạnh.
Xem xét cạnh (5, 6):
Có trọng số bé nhất trong các cạnh còn lại của E;
Xóa cạnh (5, 6) khỏi E;
Việc thêm cạnh (5, 6) vào cây T không tạo thành chu trình.
Thực hiện:
Thêm cạnh (5, 6) vào cây T;
Tăng m = 6.</td>
<td>

Vì m = 6 = (n – 1) (n = 7 là số cạnh của đồ thị).
Do đó thuật toán dừng;
Cây bao trùm cực tiểu thu được của đồ thị như hình trên.</td>
</tr>
</table>

Giá của cây bao trùm cực tiểu = 10 + 25 + 22 + 12 + 16 + 14 = 99.

2.4.3.2. Cài đặt thuật toán Kruskal bằng ngôn ngữ C++

Input: Ma trận biểu diễn đồ thị G

Output: Cây bao trùm cực tiểu của G

Chương trình được cài đặt trên ngôn ngữ C như sau:

```
//khai báo thư viện
#include <bits/stdc++.h>
using namespace std;
// khai báo tập đỉnh của đồ thị
#define V 5
```

```
int parent[V];
// Tìm tập đỉnh i
int find(int i)
{
    while (parent[i] != i)
        i = parent[i];
    return i;
}
  // Hợp của i và j. Trả về false nếu i và j cùng trong tập hợp
void union1(int i, int j)
{
    int a = find(i);
    int b = find(j);
    parent[a] = b;
}
  // Tìm cây bao trùm cực tiểu sử dụng thuật toán Kruskal
void kruskalMST(int cost[][V])
{
    int mincost = 0; // Giá trị nhỏ nhất của cây bao trùm
   // Khởi tạo các bộ khác nhau
    for (int i = 0; i < V; i++)
        parent[i] = i;
   // Thiết lập trọng lượng tối thiểu
    int edge_count = 0;
    while (edge_count < V - 1) {
        int min = INT_MAX, a = -1, b = -1;
        for (int i = 0; i < V; i++) {
            for (int j = 0; j < V; j++) {
                if (find(i) != find(j) && cost[i][j] < min) {
                    min = cost[i][j];
                    a = i;
                    b = j;
                }
            }
        }
       union1(a, b);
```

```
        printf("Canh %d:(%d, %d) co gia:%d \n",
              edge_count++, a, b, min);
        mincost + = min;
    }
    printf("\n Gia cay khung = %d \n", mincost);
}

// Hàm chính để kiểm tra các chức năng trên
int main()
{
    /* Thiết lập đồ thị có hình dạng dưới đây:
          2    3
      (0)--(1)--(2)
       |   / \   |
      6| 8/   \5 |7
       | /     \ |
      (3)-------(4)
           9          */
    int cost[][V] = {
        { INT_MAX, 2, INT_MAX, 6, INT_MAX },
        { 2, INT_MAX, 3, 8, 5 },
        { INT_MAX, 3, INT_MAX, INT_MAX, 7 },
        { 6, 8, INT_MAX, INT_MAX, 9 },
        { INT_MAX, 5, 7, 9, INT_MAX },
    };
  // In giải pháp Kruskal
    kruskalMST(cost);
    return 0;
}
```

Kết quả khi thực thi:

Canh 0: (0, 1) co gia: 2

Canh 1: (1, 2) co gia: 3

Canh 2: (1, 4) co gia: 5

Canh 3: (0, 3) co gia: 6

Gia cay bao trum cuc tieu = 16

2.4.4. Thuật toán Prim

Robert Prim, sinh ra ở Sweetwater, Texas, đã nhận bằng kỹ sư điện tử năm 1941 và bằng tiến sĩ Toán của Đại học Princeton năm 1949. Ông là kỹ sư của Công ty General Electric từ năm 1941 đến năm 1944, là kỹ sư và nhà toán học tại Phòng thí nghiệm Hải quân Hoa Kỳ từ năm 1944 đến năm 1949 và là cộng tác viên nghiên cứu tại Đại học Princeton từ năm 1948 đến 1949. Các vị trí khác mà ông đã nắm giữ là giám đốc nghiên cứu toán học và cơ học tại Phòng thí nghiệm Bell từ năm 1958 đến năm 1961 và phó chủ tịch nghiên cứu tại Sandia Corporation.

Trong sự nghiệp của mình tại Phòng thí nghiệm Bell, Robert Prim cùng với đồng nghiệp Joseph Kruskal đã phát triển hai thuật toán khác nhau để tìm một cây bao trùm cực tiểu trong đồ thị có trọng số, một nền tảng cơ bản trong thiết kế mạng máy tính. Thuật toán tự đặt tên của ông, thuật toán Prim, ban đầu được phát hiện vào năm 1930 bởi nhà toán học Vojtěch Jarník và sau đó được Prim nghiên cứu độc lập vào năm 1957. Sau đó, Edsger Dijkstra đã phát hiện lại vào năm 1959. Đôi khi nó được gọi là thuật toán DJP hoặc thuật toán Jarník.

Thuật toán Prim hoạt động khác so với thuật toán Kruskal. Thuật toán Prim xây dựng cây bao trùm T bằng cách mở rộng ra bên ngoài từ các kết nối giữa một số đỉnh. Tại mỗi giai đoạn, một cạnh và một đỉnh được thêm vào. Cạnh được thêm vào là một trong những cạnh có trọng số bé nhất kết nối các đỉnh trong T với các đỉnh chưa thuộc T và đỉnh cuối của cạnh này chưa thuộc T.

2.4.4.1. Thuật toán Prim

Thuật toán tìm cây bao trùm tối thiểu Prim

Input: Đồ thị trọng số liên thông G có n đỉnh (n là số nguyên dương)

Output: Cây bao trùm cực tiểu T của đồ thị G.

Thuật toán:

[Xây dựng đồ thị con T của G bắt đầu với một đỉnh v bất kỳ của G và lần lượt kết nạp các cạnh nối một đỉnh của T với một đỉnh chưa được kết nối của G, mỗi lần chọn một cạnh có trọng số nhỏ nhất kề với một đỉnh của T]

1. *Chọn một đỉnh bất kỳ v của G. Khởi tạo T là đồ thị có 1 đỉnh và chưa có cạnh.*
2. *Thiết lập V_G là tập tất cả các đỉnh của đồ thị G trừ đi v: $V_G = G – \{v\}$*

3. Với mỗi lần lặp xác định từ 1 đến n – 1 (Lặp với số lần biết trước)

3.a. Tìm cạnh e thuộc G sao cho

- e kết nối một đỉnh thuộc T với một trong số các đỉnh của V_G

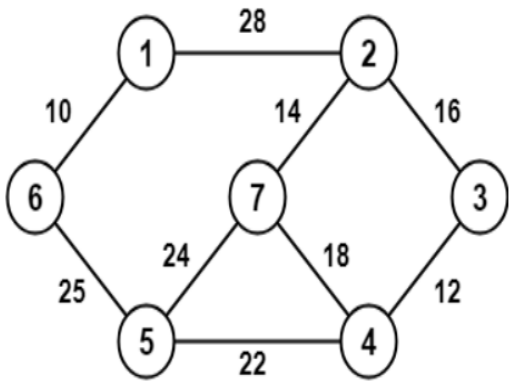
- e có trọng số nhỏ nhất trong số tất cả các cạnh kết nối T với một đỉnh của V_G. Gọi w là đỉnh cuối của e trong V_G.

3.b. Thêm e và w vào tập cạnh và tập đỉnh của T vào xóa w khỏi V_G.

Tăng biến điều khiển của vòng lặp lên một (Xét việc kết nạp cạnh và đỉnh tiếp theo vào trong T).

Ví dụ 2.60

Cho đồ thị trọng số liên thông G_{37} sau đây:



Hình 2.76: Minh họa thuật toán Prim.

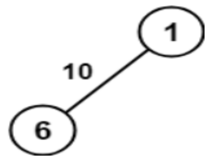
Sử dụng thuật toán Prim tìm cây bao trùm cực tiểu của đồ thị? Cho biết giá của cây bao trùm?

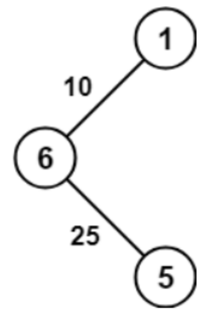
Hướng dẫn:

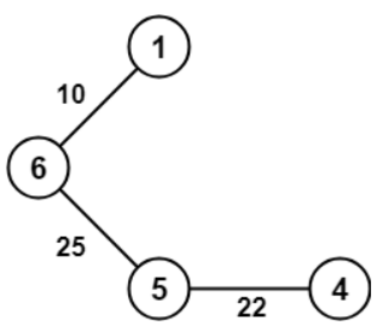
Trong thuật toán này, để tiện theo dõi thuật toán, chúng ta xác lập ma trận kề để dễ dàng xác định cạnh tiếp theo được kết nạp vào đồ thị.

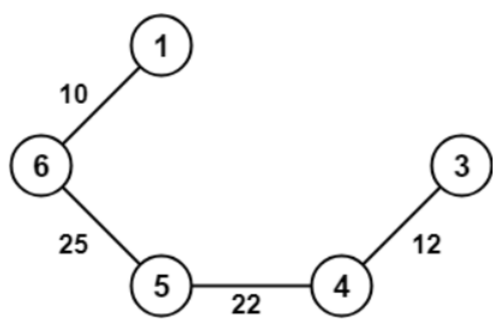
$$\begin{array}{cc}
 & \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \end{matrix} \\
\begin{matrix} 1\\ 2\\ 3\\ 4\\ 5\\ 6\\ 7 \end{matrix} & \begin{bmatrix}
0 & 28 & 0 & 0 & 0 & 10 & 0 \\
28 & 0 & 16 & 0 & 0 & 0 & 14 \\
0 & 16 & 0 & 12 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 12 & 0 & 22 & 0 & 18 \\
0 & 0 & 0 & 22 & 0 & 25 & 0 \\
10 & 0 & 0 & 0 & 25 & 0 & 0 \\
0 & 14 & 0 & 18 & 0 & 0 & 0
\end{bmatrix}
\end{array}$$

Chọn đỉnh bắt đầu là đỉnh 1, trình tự các bước của thuật toán như sau: *(Theo dõi các hình từ trái qua phải, từ trên xuống dưới).*

<table>
<tr>
<td>


Xây dựng cây bao trùm T bắt đầu với đỉnh 1: V_T ={1} và E_T = {Ø}
Thiết lập V_G = {2, 3, 4, 5, 6, 7}
Lựa chọn cạnh kết nối từ một đỉnh thuộc V_G với một đỉnh thuộc V_T có trọng số nhỏ nhất
Cạnh được chọn là cạnh (1, 6), 6 là đỉnh chưa thuộc T
Thêm cạnh (1, 6) và đỉnh 6 vào T. Xóa đỉnh 6 khỏi V_G
V_T = {1, 6}, E_T = {(1, 6)
V_G = {2, 3, 4, 5, 7}
</td>
<td>


V_T = {1, 6}, E_T = {(1, 6)}
V_G = {2, 3, 4, 5, 7}
Xác định các cạnh liên quan đến hai đỉnh 1 và 6 của T. Dựa vào ma trận kề xác định cạnh có trọng số bé là cạnh (6, 5)
Thêm cạnh (6, 5) và đỉnh 5 vào T. Xóa đỉnh 5 khỏi V_G
V_T = {1, 6, 5}, E_T = {(1, 6), (6, 5)}
V_G = {2, 3, 4, 7}
</td>
</tr>
<tr>
<td>


V_T = {1, 6, 5}, E_T = {(1, 6), (6, 5)}
V_G = {2, 3, 4, 7};
Xác định các cạnh có liên quan đến ba đỉnh 1, 6, 5. Dựa vào ma trận kề, cạnh có
</td>
<td>


V_T = {1, 6, 5, 4}, E_T = {(1, 6), (6, 5), (5, 4)}
V_G = {2, 3, 7}
Xác định các cạnh có liên quan đến bốn đỉnh 1, 6, 5, 4. Dựa vào ma trận kề, cạnh có trọng số nhỏ nhất liên quan đến bốn đỉnh 1, 6, 5, 4 là cạnh (4, 3).
Thêm cạnh (4, 3) và đỉnh 3 vào T. Xóa
</td>
</tr>
</table>

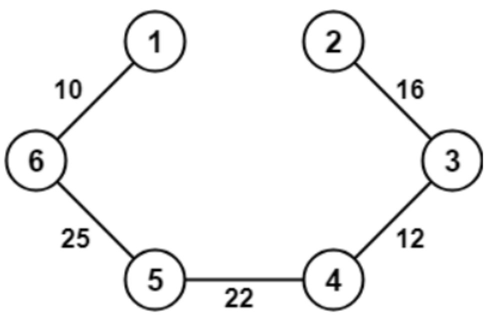
<table>
<tr>
<td>trọng số nhỏ nhất liên quan đến ba đỉnh 1, 6, 5 là cạnh (5, 4).

Thêm cạnh (5, 4) và đỉnh 4 vào T. Xóa đỉnh 4 khỏi V_G

V_T = {1, 6, 5, 4}, E_T = {(1, 6), (6, 5), (5, 4)}

V_G = {2, 3, 7}.</td>
<td>đỉnh 3 khỏi V_G

V_T = {1, 6, 5, 4, 3}, E_T = {(1, 6), (6, 5), (5, 4), (4, 3)}

V_G = {2, 7}.</td>
</tr>
<tr>
<td>

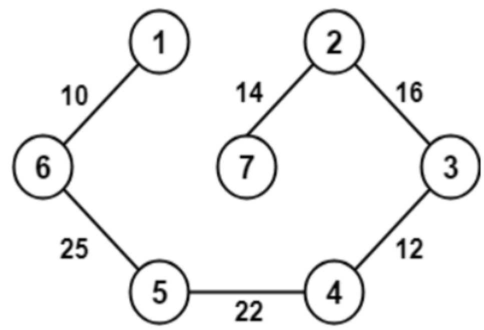
V_T = {1, 6, 5, 4, 3}, E_T = {(1, 6), (6, 5), (5, 4), (4, 3)}

V_G = {2, 7}

Xác định các cạnh có liên quan đến năm đỉnh 1, 6, 5, 4, 3. Dựa vào ma trận kề, cạnh có trọng số nhỏ nhất liên quan đến năm đỉnh 1, 6, 5, 4, 3 là cạnh (3, 2);

Thêm cạnh (3, 2) và đỉnh 2 vào T. Xóa đỉnh 2 khỏi V_G

V_T = {1, 6, 5, 4, 3, 2}, E_T = {(1, 6), (6, 5), (5, 4), (4, 3), (3, 2)}

V_G= {7}</td>
<td>

V_T = {1, 6, 5, 4, 3, 2}, E_T = {(1, 6), (6, 5), (5, 4), (4, 3), (3, 2)}

V_G = {7}

Xác định các cạnh có liên quan đến sáu đỉnh {1, 6, 5, 4, 3, 2} kết nối với đỉnh 7 thuộc V_G. Dựa vào ma trận kề, cạnh có trọng số nhỏ nhất liên quan đến sáu đỉnh 1, 6, 5, 4, 3, 2 là cạnh (2, 7).

Thêm cạnh (2, 7) và đỉnh 7 vào T. Xóa đỉnh 7 khỏi V_G.

V_T = {1, 6, 5, 4, 3, 2, 7}, E_T = {(1, 6), (6, 5), (5, 4), (4, 3), (3, 2), (2, 7)}.

V_G = {∅};

Đồ thị thu được sau cùng này là cây bao trùm nhỏ nhất của G.</td>
</tr>
</table>

Tất cả các đỉnh đều được thêm vào cây bao trùm, thuật toán dừng.

Giá của cây bao trùm T là w(T) = 10 + 25 + 22 + 12 + 16 + 14 = 99.

2.4.4.2. Cài đặt thuật toán Prim bằng ngôn ngữ C++

Input: Ma trận biểu diễn đồ thị G

Output: Cây bao trùm cực tiểu của G sử dụng thuật toán Prim

Chương trình được cài đặt trên ngôn ngữ C như sau:

```
//khai báo thư viện
#include <bits/stdc++.h>
using namespace std;
//khai báo số đỉnh của đồ thị
#define V 5
 // trả về true nếu cạnh u – v  là cạnh hợp lệ được đưa vào cây bao trùm cực tiểu (MST). Một cạnh là hợp lệ nếu một đỉnh đã thuộc cây MST và đỉnh còn lại chưa thuộc MST.
bool isValidEdge(int u, int v, vector<bool> inMST)
{
  if (u == v)
     return false;
  if (inMST[u] == false && inMST[v] == false)
      return false;
  else if (inMST[u] == true && inMST[v] == true)
      return false;
  return true;
}

void primMST(int cost[][V])
{
   vector<bool> inMST(V, false);

   // Include first vertex in MST
   inMST[0] = true;
   // Tiếp tục thêm các cạnh cho đến khi tập cạnh  có  (V – 1) cạnh
   int edge_count = 0, mincost = 0;
   while (edge_count < V - 1) {
 // Xác định trọng số tối thiểu của cạnh hợp lệ
      int min = INT_MAX, a = -1, b = -1;
      for (int i = 0; i < V; i++) {
         for (int j = 0; j < V; j++) {
            if (cost[i][j] < min) {
               if (isValidEdge(i, j, inMST)) {
                  min = cost[i][j];
```

```
                a = i;
                b = j;
            }
        }
    }
  }
  if (a != -1 && b != -1) {
      printf("Canh %d:(%d, %d) co giat: %d \n",
                edge_count++, a, b, min);
      mincost = mincost + min;
      inMST[b] = inMST[a] = true;
  }
 }
 printf("\n Gia cua cay bao trum= %d \n", mincost);
}
 // Kiểm thử các chức năng ở trên bằng bộ test chương trình.
int main()
{
 /* Thiết lập đồ thị sau đây
       2    3
   (0)--(1)--(2)
    |   / \   |
   6| 8/   \5 |7
    | /     \ |
   (3)-------(4)
        9          */
 int cost[][V] = {
   { INT_MAX, 2, INT_MAX, 6, INT_MAX },
   { 2, INT_MAX, 3, 8, 5 },
   { INT_MAX, 3, INT_MAX, INT_MAX, 7 },
   { 6, 8, INT_MAX, INT_MAX, 9 },
   { INT_MAX, 5, 7, 9, INT_MAX },
 };
   // In các giải pháp
 primMST(cost);
   return 0;
}
```

Kết quả thu được:

Canh 0: (0, 1) co gia: 2

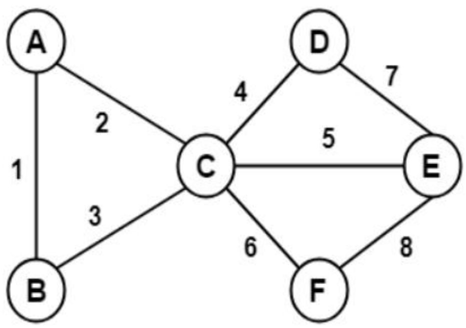
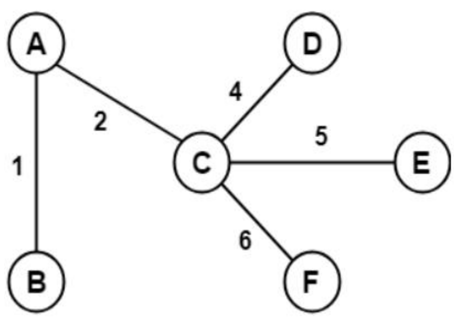
Canh 1: (1, 2) co gia: 3

Canh 2: (1, 4) co gia: 5

Canh 3: (0, 3) co gia: 6

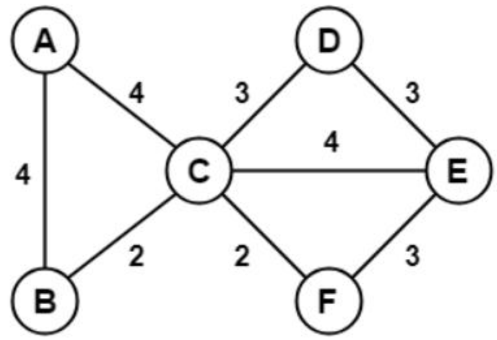
Gia cua cay bao trum = 16

2.4.5. So sánh thuật toán Kruskal và thuật toán Prim

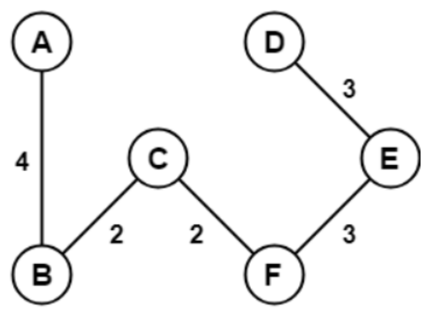
Kết quả thu được của hai thuật toán?
Tình huống 1: Khi tất cả các cạnh đều có trọng số khác nhau. **Ví dụ 2.61** Xem xét đồ thị sau đây:  Cây bao trùm cực tiểu thu được của đồ thị trên là (cả 2 thuật toán cùng cho ra cùng 1 kết quả)  Giá của cây bao trùm = 1 + 2 + 4 + 5 + 6 = 18. **Kết luận:** Khi tất cả các trọng số cạnh là khác biệt, cả hai thuật toán luôn tạo ra cùng một cây bao trùm cực tiểu có cùng chi phí. **Tình huống 2:** Nếu tất cả các trọng số của các cạnh không khác biệt.

Ví dụ 2.62

Xem xét đồ thị sau đây:

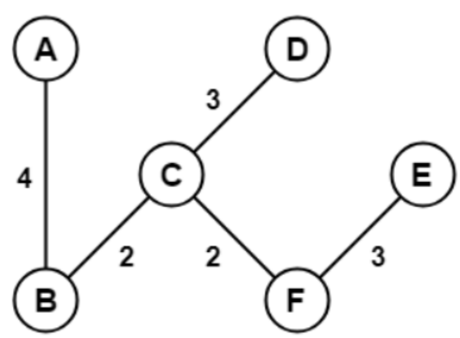


Áp dụng thuật toán Kruskal, cây bao trùm nhỏ nhất thu được là:



Giá của của cây bao trùm cực tiểu T_1 là 2 + 2 + 3 + 3 + 4 = 14

Áp dụng thuật toán Prim, cây bao trùm nhỏ nhất thu được là:



Giá của cây bao trùm cực tiểu T_2 là 2 + 2 + 3 + 3 + 4 = 14.

Kết luận: Nếu tất cả các trọng số của các cạnh không khác biệt, thì cả hai thuật toán có thể không phải lúc nào cũng tạo ra cùng một cây bao trùm cực tiểu, nhưng chi phí của các cây bao trùm cực tiểu được tạo ra sẽ luôn giống nhau.

Thuật toán được sử dụng tốt nhất khi nào?
Thuật toán Kruskal được ưa thích sử dụng đối với các đồ thị thưa, tức là các đồ thị có ít cạnh E = O(V), hoặc khi các cạnh đã được sắp xếp hoặc có thể được sắp xếp theo thời gian tuyến tính. Thuật toán Prim được ưa thích sử dụng với các đồ thị dày đặc, tức là các đồ thị có số lượng cạnh lớn E = O(V^2) vì không phải chú ý nhiều đến quá trình thêm một cạnh mà ta chủ yếu xử lý các đỉnh trong thuật toán Prim.

Sự khác biệt của hai thuật toán Kruskal và Prim

Prim	Kruskal
Trong thuật toán Prim, cây được tạo ra và phát triển theo từng bước luôn liên thông.	Trong thuật toán Kruskal, cây được tạo ra và phát triển theo từng bước có thể không liên thông.
Thuật toán Prim đưa ra giải pháp hình thành cây từ một đỉnh bất kỳ, sau đó lần lượt thêm các đỉnh *"rẻ"* tiếp theo vào cây hiện tại.	Thuật toán Kruskal đưa ra giải pháp hình thành cây bắt đầu từ một cạnh *"rẻ"* nhất, sau đó lần lượt thêm các cạnh *"rẻ"* tiếp theo vào cây/ rừng hiện tại
Thuật toán Prim thực hiện hiệu quả với đồ thị dày đặc (nhiều cạnh).	Thuật toán Kruskal thực hiện hiệu quả với đồ thị thưa (ít cạnh).

2.5. ĐƯỜNG ĐI NGẮN NHẤT TRONG ĐỒ THỊ

2.5.1. Đặt vấn đề

Bài toán tìm đường ngắn nhất là một trong những bài toán cơ bản của đồ thị. Tìm đường ngắn nhất trong đồ thị là tìm đường đi từ một đỉnh đến một đỉnh khác sao cho tổng độ dài của các cạnh trên đường đi là nhỏ nhất. Trong các ứng dụng thực tế, bài toán tìm đường đi ngắn nhất giữa hai đỉnh của một đồ thị liên thông có một ý nghĩa to lớn. Chẳng hạn, bài toán chọn một hành trình tiết kiệm nhất (theo tiêu chuẩn hoặc khoảng cách hoặc thời gian hoặc chi phí) trên một mạng giao thông đường bộ, đường thủy hoặc đường không; bài toán chọn một phương pháp tiết kiệm nhất để đưa ra một hệ thống động lực từ trạng thái xuất phát đến một trạng thái đích, bài toán lập lịch thi công các công đoạn trong một công trình thi công lớn, bài toán lựa chọn đường truyền tin với chi phí nhỏ nhất trong mạng thông tin, v.v..

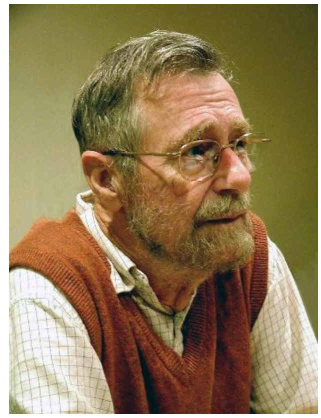
Phát biểu bài toán
Cho G = (V, E) đơn, liên thông, có trọng số dương (w(uv) > 0 với mọi u khác v). Tìm đường đi ngắn nhất từ đỉnh a đến z và tính khoảng cách d(a, z).

Có 3 thuật toán liên quan đến bài toán tìm đường đi ngắn nhất:

- Thuật toán Dijkstra
- Thuật toán Ford – Bellman
- Thuật toán Floyd.

Tuy nhiên, trong giới hạn của môn học, thuật toán Dijkstra sẽ được giới thiệu và trình bày chi tiết. *(Các thuật toán còn lại sinh viên tự tìm hiểu thêm).*

2.5.2. Thuật toán Dijkstra



Edsger Wybe Dijkstra (11/5/1930 – 06/8/2002), là nhà khoa học máy tính Hà Lan. Ông được nhận Giải thưởng Turing cho các đóng góp có tính chất nền tảng trong lĩnh vực ngôn ngữ lập trình.

Dijkstra học vật lý lý thuyết tại Đại học Leiden, nhưng ông đã nhanh chóng nhận ra rằng ông quan tâm đến lập trình hơn.

Thời kỳ đầu, ông làm việc tại Trung tâm toán học, Viện nghiên cứu quốc gia về toán học và khoa học máy tính tại Amsterdam, ông còn giữ chức vị giáo sư tại Đại học Kỹ thuật Eindhoven, Hà Lan. Đầu thập kỷ 1970, ông làm cộng tác nghiên cứu tại Burroughs Corporation, sau đó giữ vị trí Schlumberger Centennial Chair ngành Khoa học máy tính tại Đại học Texas tại Austin, Mỹ. Ông nghỉ hưu năm 2000.

Một trong số các đóng góp của ông cho ngành khoa học máy tính là thuật toán mang tên ông, thuật toán Dijkstra, tìm đường đi ngắn nhất, có nhiều ứng dụng trong thực tế.

Mặc dù các cây bao trùm được tạo bởi thuật toán Kruskal và Prim, có tổng trọng lượng ít nhất trong số tất cả các cây bao trùm của một đồ thị đã cho, nhưng các thuật toán này không cho biết khoảng cách ngắn nhất giữa hai điểm bất kỳ trên đồ thị.

Năm 1959, nhà toán học Edsgar Dijkstra, đã phát triển một thuật toán để tìm ra đường đi ngắn nhất bắt đầu từ một đỉnh đến một đỉnh khác trong một đồ thị có trọng số (trong đó tất cả các trọng số đều dương). Thuật toán này hơi giống với thuật toán Prim (Thuật toán Prim xuất phát từ một đỉnh a bất kỳ của đồ thị, sau đó lần lượt thêm các đỉnh và cạnh để xây dựng một cây bao trùm T). Tuy nhiên, nó khác với thuật toán của Prim trong cách nó chọn đỉnh tiếp theo để thêm vào, đảm bảo rằng với mỗi đỉnh v được thêm, chiều dài của con đường ngắn nhất từ a đến v đã được xác định.

Khi bắt đầu thực hiện thuật toán, mỗi đỉnh u của G được cấp nhãn L(u), cho biết ước tính tốt nhất hiện tại về độ dài của đường đi ngắn nhất từ a đến u. L(a) ban đầu được đặt bằng 0 vì đường đi ngắn nhất từ a đến a có độ dài bằng 0, nhưng vì không có thông tin trước đó về độ dài của các đường đi ngắn nhất từ a đến bất kỳ đỉnh nào khác của G, nên nhãn L(u) của mỗi đỉnh u khác với a ban đầu được đặt bằng một số, ký hiệu là ∞, lớn hơn tổng trọng số của tất cả các cạnh của G. Khi thực hiện tiến trình thuật toán, các giá trị của L(u) được thay đổi, cuối cùng trở thành độ dài thực tế của các đường dẫn ngắn nhất từ a đến u trong G.

Do T được xây dựng, phát triển ra bên ngoài đỉnh a, nên ở mỗi giai đoạn thực hiện thuật toán, các đỉnh duy nhất là ứng cử viên tham gia T là các đỉnh tiếp giáp với ít nhất một đỉnh của T. Do đó, ở mỗi giai đoạn của thuật toán Dijkstra, đồ thị G có thể được coi là chia thành ba phần: cây T đang được xây dựng, tập hợp các đỉnh *"kế cận"* liền kề với ít nhất một đỉnh của cây và tập các đỉnh còn lại của G. Mỗi đỉnh của tập *"kế cận"* là một ứng cử viên để trở thành đỉnh tiếp theo được thêm vào T. Đỉnh được chọn là đỉnh trong đó độ dài đường đi ngắn nhất từ a đến đỉnh đó là tối thiểu trong số tất cả các đỉnh của tập*"kế cận"*.

Điểm mấu chốt của thuật toán của Dijkstra là sau mỗi lần thêm một đỉnh v vào T, chỉ các đỉnh *"kế cận"* có đường đi ngắn hơn từ a có thể được tìm thấy là các đỉnh kề của v [vì độ dài của đường đi từ a đến v có độ dài tối thiểu trong số tất cả các đường dẫn từ a đến đỉnh trong tập *"kế cận"*]. Vì vậy, sau mỗi lần thêm một đỉnh v vào T, mỗi đỉnh *"kế cận"* u kề với v được kiểm tra, tính toán và so sánh giá trị hiện tại của L(u) và giá trị của L(v) + w (v, u), trong đó L(v) là độ dài của đường đi ngắn nhất tới v (trong T) và w(v, u) là trọng số của cạnh nối v và u. Nếu L(v) + w (v, u) <L(u), thì giá trị của L(u) được gán bằng L(v) + w(v, u).

Khi bắt đầu thực hiện thuật toán, cây chỉ bao gồm đỉnh a và L(a) = 0. Khi thực hiện chấm dứt, L(z) là độ dài của một con đường ngắn nhất từ a đến z.

Như với thuật toán Kruskal và thuật toán Prim, để tìm các cây bao trùm tối thiểu, có một cách đơn giản nhưng hiệu quả không đáng kể để tìm đường đi ngắn nhất từ a đến z: tính độ dài của tất cả các đường và chọn một đường ngắn nhất. Vấn đề là ngay cả đối với các đồ thị tương đối nhỏ sử dụng phương pháp này để tìm một con đường ngắn nhất có thể cần hàng tỷ năm, trong khi thuật toán Dijkstra có thể thực hiện công việc trong vài giây.

2.5.2.1 Thuật toán Dijkstra

Thuật toán Dijkstra
Input: Đồ thị G [đồ thị đơn, liên thông, các cạnh có trọng số dương], ∞ [biểu thị cho một số lớn hơn tổng trọng số của tất cả các cạnh trong đồ thị], w(u, v) [trọng số của cạnh {u, v}, đỉnh a [đỉnh bắt đầu], z [đỉnh kết thúc]
Output: L (z) [L (z), một số nguyên không âm, là độ dài của đường đi ngắn nhất từ đỉnh a đến đỉnh z.]

Thuật toán:

1. Khởi tạo T là đồ thị có đỉnh a và không có cạnh. Đặt V(T) là tập hợp các đỉnh của T và đặt E(T) là tập hợp các cạnh của T.

2. Đặt L(a) = 0, với tất cả các đỉnh trong G ngoại trừ a, thiết lập L(u) = ∞

[Số L(x) được gọi là nhãn của x]

3. Khởi tạo v bằng a và F là {a}.

[Ký hiệu v được sử dụng để biểu thị đỉnh được thêm gần đây nhất vào T.]

4. Trong khi (z ∉ V(T))

4a. F = (F - {v}) ∪{các đỉnh liền kề với v và không nằm trong V(T)}

[Tập F được gọi là tập *"kế cận"*. Mỗi khi một đỉnh được thêm vào T, nó sẽ bị xóa khỏi tập *"kế cận"* và các đỉnh liền kề với nó được thêm vào tập *"kế cận"* nếu chúng chưa thuộc tập *"kế cận"* hoặc cây T.]

4b. Với mỗi đỉnh u liền kề với v và không nằm trong V(T),

Nếu L(v) + w(v, u) < L(u) thì

L(u) = L(v) + w(v, u)

D(u) = v

[Lưu ý rằng việc thêm v vào T không ảnh hưởng đến nhãn của bất kỳ đỉnh nào trong tập "kế cận" F ngoại trừ những đỉnh liền kề với v. Ngoài ra, L(u) được thay đổi thành một giá trị nhỏ hơn và ký hiệu D(u) được sử dụng để theo dõi đỉnh nào trong T đã tạo ra giá trị nhỏ hơn.]

4c. Tìm một đỉnh x trong F với nhãn nhỏ nhất

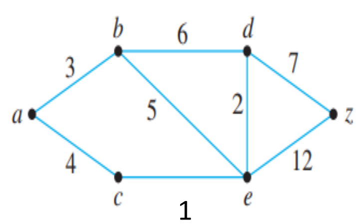
Thêm đỉnh x vào V(T) và thêm cạnh {D (x), x} vào E(T)

v: = x *[Câu lệnh này thiết lập ký hiệu cho lần lặp tiếp theo của vòng lặp.]*

Kết thúc vòng lặp

Ví dụ 2.63

Cho đồ thị sau đây:



Hình 2.77: Minh họa bài toán tìm đường đi ngắn nhất.

Tìm đường đi ngắn nhất từ a đến z.

Hướng dẫn:

Trình tự các bước thực hiện tìm đường đi ngắn nhất từ a đến z như sau:

<table>
<tr><th>Trình tự các bước của thuật toán</th><th>Hình minh họa</th></tr>
<tr><td>

Bước 1: Khởi tạo

V(T) = {a}, E(T) ={∅} và F ={a}

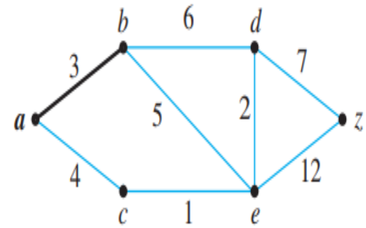
Trong quá trình lặp:

F = {b, c}

L(b) = 3, L(c) = 4.

Vì L(b) < L(c), nên b được thêm vào V(T) và cạnh (a, b) được thêm vào E(T)

</td><td>



</td></tr>
<tr><td>

Bước 2:

V(T) = {a, b}

E(T) = {(a, b)}

Trong quá trình lặp:

F = {c, d, e}

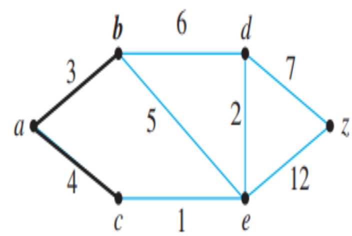
L(c) = 4

L(d) = L(b) + w(b, d) = 3 + 6 = 9

L(e) = L(b) + w(b, e) = 3 + 5 = 8.

Vì L(c) < L(d) và L(c) < L(e), nên đỉnh c được thêm vào V(T) và cạnh (a, c) được thêm vào E(T).

</td><td>



</td></tr>
<tr><td>

Bước 3:

V(T) = {a, b, c}

E(T) = {(a, b), (a, c)}

Trong quá trình lặp:

F ={d, e}

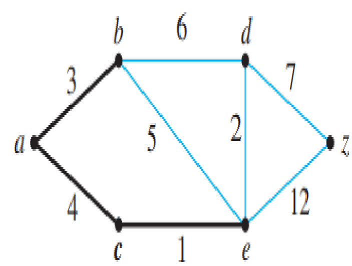
L(d) = 9

L(e) = L(c) + w(c, e) = 5

(L(e) được gán lại giá trị bằng 5, bởi vì đường đi a → c → e có độ dài đường đi bằng L(c) + w(c, e) = 5, ngắn hơn đường đi a → b → e, có độ dài bằng 8).

Vì L(e) < L(d), nên e được thêm vào V(T) và cạnh (c, e) được thêm vào E(T).

</td><td>



</td></tr>
</table>

<table>
<tr>
<td>

Bước 4:

V(T) = {a, b, c, e}

E(T) = {(a, b), (a, c), (c, e)}

Trong quá trình lặp:

F = {d, z}

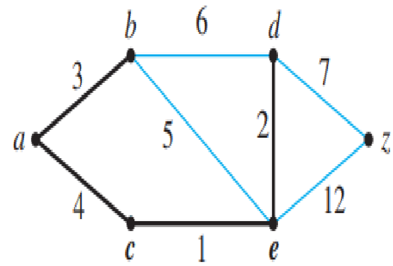
L(d) = L(e) + w(e, d) = 7

L(z) = L(e) + w(e, z) = 17

(L(d) được gán giá trị lại bằng 7, bởi vì đường đi a → c → e → d có độ dài đường đi bằng L(e) + w(e, d) = 7, ngắn hơn so với đường đi a → b → d, có độ dài đường đi bằng 9).

Vì L(d) < L(z), nên d được thêm vào V(T) và cạnh (e, d) được thêm vào E(T).

</td>
<td>



</td>
</tr>
<tr>
<td>

Bước 5:

V(T) = {a, b, c, e, d}

E(T) = {(a, b), (a, c), (c, e), (e, d)}

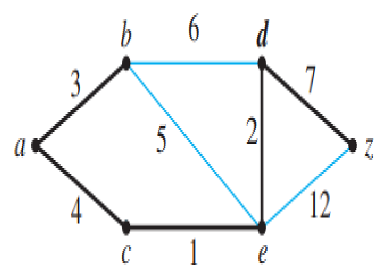
Trong quá trình lặp:

F ={z}

L(z) = 14 (L(z) được gán lại giá trị bằng 14, bởi vì đường đi a → c → e → d → z có độ dài đường đi bằng L(d) + w(d, z) 14 < L(u) =17).

Vì z là đỉnh còn lại duy nhất trong F, do đó z được thêm vào V(T) và cạnh (e, z) được thêm vào E(T)

</td>
<td>



</td>
</tr>
</table>

Thuật toán dừng vì z ∈ $V(T)$. Đường đi ngắn nhất từ a đến z có độ dài = 14.

Theo dõi các bước đi trong bảng là cách thuận tiện để hiển thị hành động của thuật toán Dijkstra:

Bước	V(T)	F	L(a)	L(b)	L(c)	L(d)	L(e)	L(z)
0	{a}	{a}	0	∞	∞	∞	∞	∞
1	{a}	{b, c}	0	3	4	∞	∞	∞
2	{a, b}	{c, d, e}	0	3	4	9	8	∞
3	{a, b, c}	{d, e}	0	3	4	9	5	∞
4	{a, b, c, e}	{d, z}	0	3	4	7	5	17
5	{a, b, c, e, d}	{z}	0	3	4	7	5	14
6	{a, b, c, e, d, z}							

Dòng thứ 5 xác định đường đi ngắn nhất từ đỉnh a đến các đỉnh còn lại của đồ thị.

Đường đi ngắn nhất từ a đến b có độ dài 3

Đường đi ngắn nhất từ a đến c có độ dài 4

Đường đi ngắn nhất từ a đến d có độ dài 7: a → c → e → d

Đường đi ngắn nhất từ a đến e có độ dài 5: a → c → e

Đường đi ngắn nhất từ a đến z có độ dài 14: a → c → e → d → z

2.5.2.2. Cài đặt thuật toán Dijkstra bằng ngôn ngữ C++

```
#include <stdio.h>
#include <limits.h>
// Thiết lập số đỉnh của đồ thị
#define V 10
// Hàm tiện ích để tìm đỉnh có giá trị khoảng cách tối thiểu, từ tập hợp các đỉnh chưa
thuộc cây đường dẫn ngắn nhất
int minDistance(int dist[], bool sptSet[])
{
  // Khởi tạo giá trị min
  int min = INT_MAX, min_index;
    for (int v = 0; v < V; v++)
   if (sptSet[v] == false && dist[v] <= min)
      min = dist[v], min_index = v;
    return min_index;
}

// Hàm để in mảng khoảng cách được xây dựng
int printSolution(int dist[], int n)
{
  printf("Dinh   Khoang cach den dich\n");
  for (int i = 0; i < V; i++)
    printf("%d - %d\n", i, dist[i]);
}
 // Hàm thực hiện thuật toán Dijkstra cho một đồ thị được biểu diễn bằng ma trận kề
void dijkstra(int graph[V][V], int src)
```

```
{
    int dist[V];
      bool sptSet[V];
      // Khởi tạo tất cả các khoảng cách là INFINITE và stpSet[] là false
    for (int i = 0; i < V; i++)
      dist[i] = INT_MAX, sptSet[i] = false;
      // Thiết lập các khoảng cách ban đầu bằng 0
    dist[src] = 0;
      // Tìm đường đi ngắn nhất đến tất cả các đỉnh
    for (int count = 0; count < V-1; count++)
    {
          int u = minDistance(dist, sptSet);

      // Đánh dấu các đỉnh đã chọn là đã xử lý
      sptSet[u] = true;
        // Cập nhật lại giá trị của các đỉnh
      for (int v = 0; v < V; v++)
          // Gán lại nhãn
       if (!sptSet[v] && graph[u][v] && dist[u] != INT_MAX
                              && dist[u]+graph[u][v] < dist[v])
          dist[v] = dist[u] + graph[u][v];
    }
 // In kết quả
    printSolution(dist, V);
}
// Kiểm thử các chức năng của chương trình
int main()
{
  /* Thiết lập ma trận kề cho đồ thị sau đây */
  int graph[V][V] = {{0, 6, 0, 0, 4, 0, 0, 15, 0, 5 },
                    {6, 0, 8, 0, 0, 0, 0, 11, 0 , 0},
                    {0, 8, 0, 7, 0, 4, 0, 0, 2, 13},
```

```
                 {0, 0, 7, 0, 10, 12, 0, 0, 0, 6},
                 {4, 0, 0, 10, 0, 10, 0, 0, 0, 0},
                 {0, 0, 4, 12, 10, 0, 2, 0, 0, 0},
                 {0, 0, 0, 0, 0, 2, 0, 3, 6,0},
                 {15, 11, 0, 0, 0, 0, 3, 0, 7, 7},
                 {0, 0, 2, 0, 0, 0, 6, 7, 0, 19},
                 {5, 0, 13, 6, 0, 0, 0, 7, 19, 0}};
 // Nhận về kết quả là đường đi ngắn nhất từ đỉnh đầu đến các đỉnh còn lại của đồ thị.
   dijkstra(graph, 0);
     return 0;
}
```

Kết quả khi thực hiện:

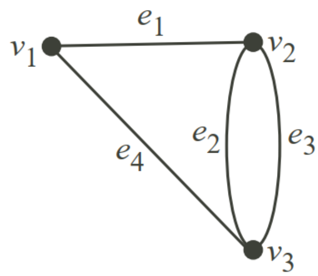
```
0 - 0
1 - 6
2 - 14
3 - 11
4 - 4
5 - 14
6 - 15
7 - 12
8 - 16
9 – 5
```

CÂU HỎI VÀ BÀI TẬP CHƯƠNG 2

A. BÀI TẬP CÓ LỜI GIẢI

Bài tập 2.1

Cho đồ thị sau đây:



Hình 2.78: Hình vẽ của Bài tập 2.1.

a. Xác định bậc các đỉnh của đồ thị?

b. Xác định ma trận kề biểu diễn đồ thị?

c. Xác định ma trận liên thuộc đỉnh cạnh biểu diễn đồ thị?

d. Xác định danh sách cạnh biểu diễn đồ thị?

Hướng dẫn:

a. Bậc các đỉnh của đồ thị:

Bậc đỉnh của đồ thị là số cạnh đi qua đỉnh.

Đỉnh	Bậc
v_1	2
v_2	3
v_3	3

b. Ma trận kề biểu diễn đồ thị

$$\begin{bmatrix} & v_1 & v_2 & v_3 \\ v_1 & 0 & 1 & 1 \\ v_2 & 1 & 0 & 2 \\ v_3 & 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

c. Ma trận liên thuộc đỉnh cạnh biểu diễn đồ thị

$$\begin{array}{ccccc} & e_1 & e_2 & e_3 & e_4 \\ v_1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ v_2 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ v_3 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{array}$$

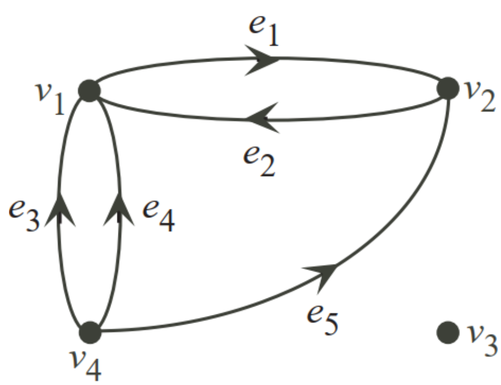
d. Danh sách cạnh biểu diễn đồ thị

Sử dụng 2 mảng Dau[] và Cuoi[] để lưu đỉnh đầu và đỉnh cuối của cạnh

Cạnh	**Dau[]**	**Cuoi[]**
e_1	v_1	v_2
e_2	v_2	v_3
e_3	v_2	v_3
e_4	v_1	v_3

Bài tập 2.2

Cho đồ thị sau đây:



Hình 2.79: Hình vẽ của Bài tập 2.2.

a. Xác định bậc các đỉnh của đồ thị?

b. Xác định ma trận kề biểu diễn đồ thị?

c. Xác định ma trận liên thuộc đỉnh cạnh biểu diễn đồ thị?

d. Xác định danh sách cạnh biểu diễn đồ thị?

Hướng dẫn:

a. Bậc các đỉnh của đồ thị

Đỉnh	**$Deg^-(v)$**	**$Deg^+(v)$**	**Deg(v)**
v_1	3	1	4
v_2	2	1	3
v_3	0	0	0
v_4	0	3	3

b. Xác định ma trận kề biểu diễn đồ thị:

$$\begin{array}{c|cccc} & v_1 & v_2 & v_3 & v_4 \\ \hline v_1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ v_2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ v_3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ v_4 & 2 & 1 & 0 & 0 \end{array}$$

c. Xác định ma trận liên thuộc đỉnh cạnh biểu diễn đồ thị:

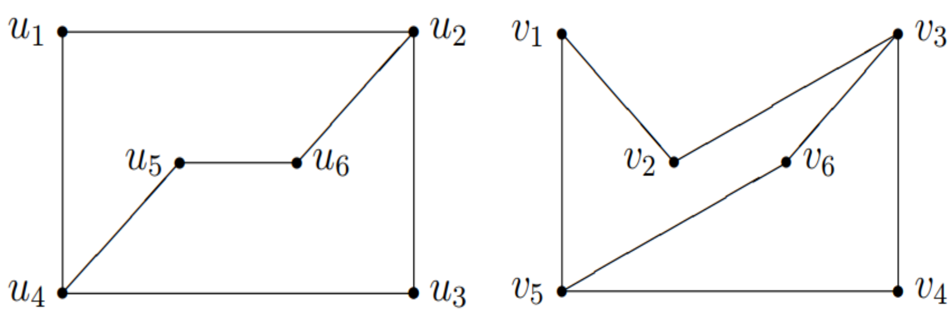
$$\begin{array}{c|ccccc} & e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & e_5 \\ \hline v_1 & 1 & -1 & -1 & -1 & 0 \\ v_2 & -1 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ v_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ v_4 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{array}$$

d. Danh sách cạnh biểu diễn đồ thị:

Cạnh	**Dau[]**	**Cuoi[]**
e_1	v_1	v_2
e_2	v_2	v_1
e_3	v_4	v_1
e_4	v_4	v_1
e_5	v_4	v_2

Bài tập 2.3

Chứng tỏ hai đồ thị sau đây đẳng cấu với nhau:



Hình 2.80: Hình của Bài tập 2.3 – Đồ thị G_{38} và G_{39}.

Hướng dẫn:

Đồ thị G_{38} có 6 đỉnh, 7 cạnh, bậc các đỉnh của đồ thị tương ứng là:

Đỉnh	**Bậc**
u_1	2
u_2	3
u_3	2
u_4	3
u_5	2
u_6	2

Đồ thị G_{39} có 6 đỉnh, 7 cạnh, bậc các đỉnh của đồ thị tương ứng là:

Đỉnh	**Bậc**
v_1	2
v_2	2
v_3	3
v_4	2
v_5	3
v_6	2

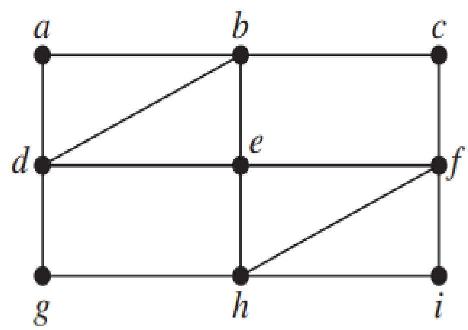
Thiết lập hàm f:

$f(u_1) = v_6$, $f(u_2) = v_3$, $f(u_3) = v_4$, $f(u_4) = v_5$, $f(u_5) = v_1$ và $f(u_6) = v_2$.

Do đó G_{38} và G_{39} đẳng cấu với nhau.

Bài tập 2.4

Kiểm tra đồ thị sau đây có chu trình hay đường đi Euler? Chỉ ra chu trình hay đường đi Euler (nếu có) của đồ thị?



Hình 2.81: Hình vẽ của Bài tập 2.4.

Hướng dẫn:

Bước 1: Xác định bậc các đỉnh của đồ thị:

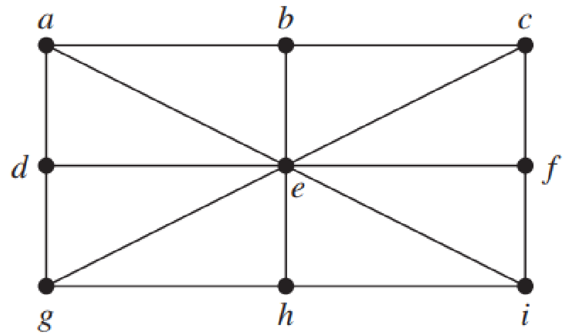
Đỉnh	**Bậc**	**Đỉnh**	**Bậc**
a	2	f	4
b	4	g	2
c	2	h	4
d	4	i	2
e	4		

Bước 2: Tất cả các đỉnh của đồ thị đều có bậc chẵn. Do đó, có thể khẳng định đồ thị trên có chu trình Euler.

Sử dụng thuật toán Floyd, xác định chu trình Euler như sau: (a, d) , (d, g), (g, h), (h, i), (i, f), (f, h), (h, e), (e, f), (f, c), (c, b), (b, e), (e, d), (d, b), (b, a).

Bài tập 2.5

Đồ thị sau đây có chu trình hay đường đi Hamilton? Chỉ ra chu trình hay đường đi Hamilton (nếu có) của đồ thị?



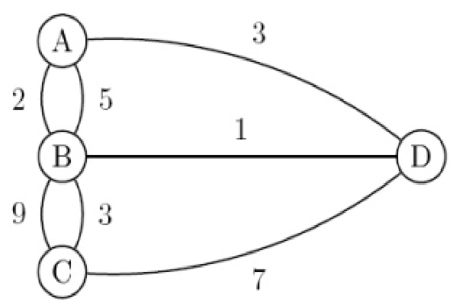
Hình 2.82: Hình vẽ của Bài tập 2.5.

Hướng dẫn:

Đồ thị trên có chu trình Hamilton. Chu trình Hamilton của đồ thị là: a → d → g → h → i → e → f → c → b → a.

Bài tập 2.6

Cho đồ thị sau đây:



Hình 2.83: Hình vẽ của Bài tập 2.6.

Xác định hành trình đi qua tất cả các cạnh của đồ thị, mỗi cạnh ít nhất một lần sao cho tổng trọng số của hành trình là bé nhất (Trường hợp có tổng trọng số như nhau, xét đến số cạnh đi qua là ít nhất).

Hướng dẫn:

Bước 1: *Xác định bậc các đỉnh của đồ thị:*

deg(A) = 3, deg(B) = 5, deg(C) = 3, deg(D) = 3

Bước 2: Có bốn đỉnh bậc lẻ trong đồ thị.

Phân hoạch các tập đỉnh này thành các phân hoạch sau đây:

P_1: (A, B) (C, D);

P_2: (A, C), (B, D);

P_3: (A, D), (B, C);

Bước 3: Tính các $d(P_i)$

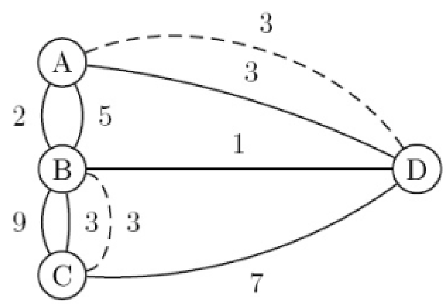
min $(d(P_1)) = 2 + 7 = 9$, cần bổ sung thêm 2 cạnh.

$\min(d(P_2)) = 2 + 3 + 1 = 6$, cần bổ sung thêm 3 cạnh.

$\min(d(P_3)) = 3 + 3 = 6$, cần bổ sung thêm 2 cạnh.

Do đó $\min(d(P_i) = 6$.

Bước 4: Xác định được 2 phân hoạch phù hợp, có giá trị $d(P_i) = 6$, xét thêm số cạnh đi qua ít nhất.



Hình 2.84: Kết quả của Bài tập 2.6.

Phân hoạch P_3 thỏa mãn

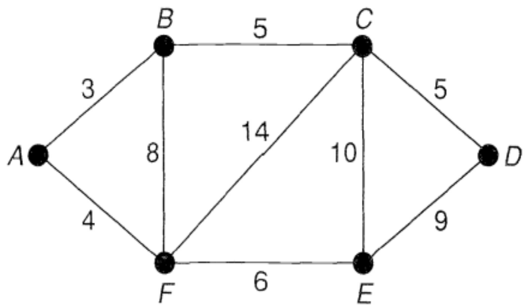
Nhân đôi các cạnh BC (trọng số 3) và AD (Hình 2. 84)

Hành trình thu được đi qua tất cả các cạnh, ít nhất 1 lần, có trọng số nhỏ nhất là (2 + 5 + 3 + 9 + 3 + 1 + 7) + (3 + 3) = 36.

Hành trình người đưa thư xuất phát từ A là (A, 2, B), (B, 9, C), (C, 3, B), (B, 1, D), (D, 7, C), (C, 3, B), (B, 5, A), (A, 3, D), (D, 3, A). (Lưu ý: Cách viết (u, w(u, v), v) để phân biệt các cạnh cùng cặp đỉnh).

Bài tập 2.7

Cho đồ thị sau đây:



Hình 2.85: Hình vẽ của Bài tập 2.7.

Xác định hành trình đi qua tất cả các cạnh của đồ thị, mỗi cạnh ít nhất một lần sao cho tổng trọng số của hành trình là bé nhất.

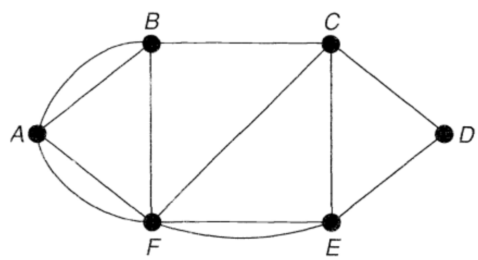
Hướng dẫn sơ bộ:

deg(A) = 2, deg(B) = 3, deg(C) = 4, deg(D) = 2, deg(E) = 3, deg(F) = 4

Có duy nhất 2 đỉnh lẻ (B, D)

Min(d(P)) = 3 + 4 + 6 = 13

Nhân đôi các cạnh (B, A), (A, F) và (F, E) như hình 2.86.



Hình 2.86: Kết quả của Bài tập 2.7.

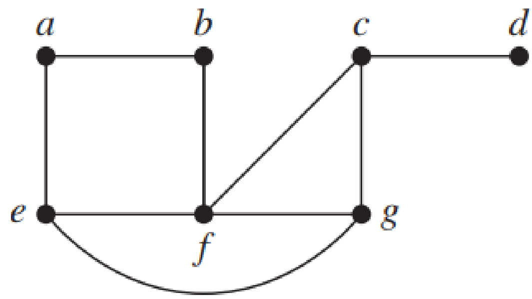
Tổng trọng số của hành trình là : (3 + 4 + 6 + 9 + 5 + 5 + 8 + 14 + 10) + (3 + 4 + 6) = 77.

Hành trình các cạnh đi qua là: (A, B), (B, C), (C, D), (D, E), (E, C), (C, F), (F, E), (E, F), (F, B), (B, A), (A, F) và (F, A).

Bài tập 2.8

Cho đồ thị như hình vẽ 2.87

Xác định các cây bao trùm của đồ thị?



Hình 2.87: Hình vẽ của Bài tập 2.8.

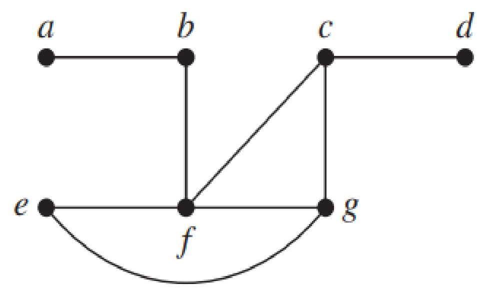
Hướng dẫn

Đồ thị có bảy đỉnh, bằng cách bỏ đi một số cạnh đảm bảo: đồ thị còn lại sáu cạnh và các cạnh còn lại không tạo thành chu trình, ta sẽ thu được cây bao trùm của đồ thị.

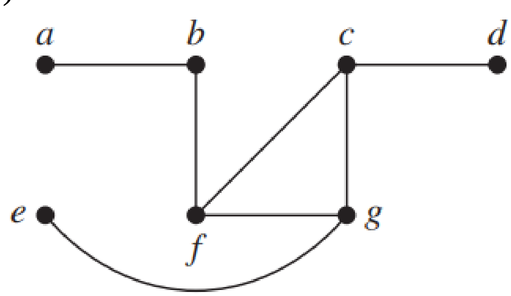
Ban đầu đồ thị có chín cạnh, do vậy phải xóa đi ba cạnh, giữ lại sáu cạnh của đồ thị ban đầu. Tùy thuộc vào nhóm các cạnh xóa mà ta thu được cây bao trùm khác nhau của đồ thị.

Trường hợp 1:

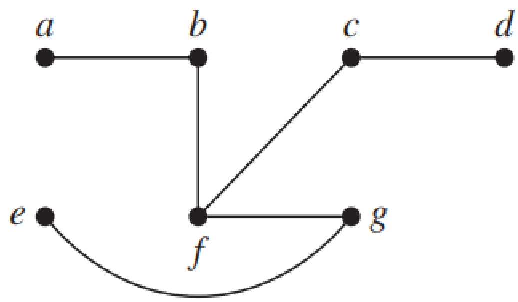
Xóa cạnh (a, e):



Xóa cạnh (e, f):



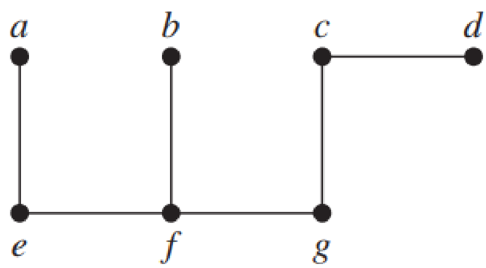
Xóa cạnh (c, g). Đồ thị thu được cuối cùng là cây bao trùm



Trường hợp 2:

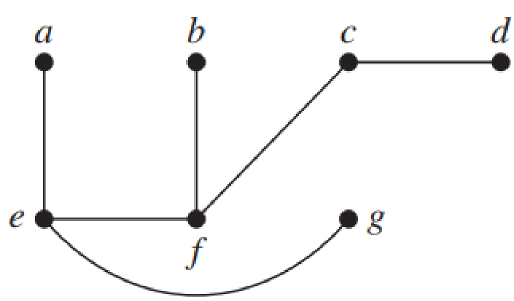
Bằng cách xóa nhóm 3 cạnh khác của đồ thị, ta thu được một số cây bao trùm sau đây:

Bỏ 3 cạnh (a, b), (e, g) và (f, c):



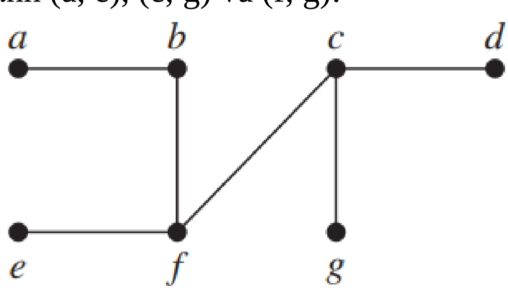
Trường hợp 3:

Bỏ 3 cạnh (a, b), (f, g) và (c, g):



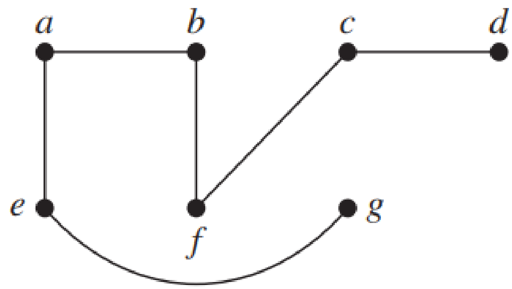
Trường hợp 4:

Bỏ 3 cạnh (a, e), (e, g) và (f, g):



Trường hợp 5:

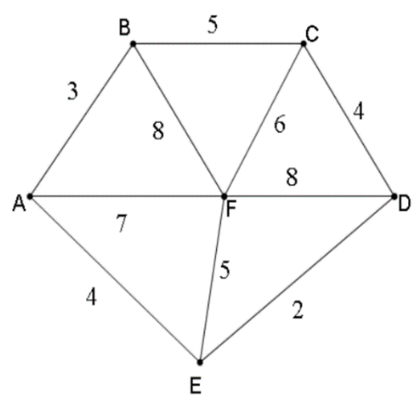
Bỏ 3 cạnh (e, f), (f, g) và (g, c):



Tùy thuộc vào việc chọn nhóm các cạnh cần xóa (ba cạnh) để từ chín cạnh giữ lại sáu cạnh, đảm bảo đồ thị thu được không chứa chu trình, ta thu được các kết quả khác nhau. Nếu đồ thị có trọng số, ta sẽ tìm cây bao trùm có trọng số nhỏ nhất bằng thuật toán Kruskal hoặc Prim như các bài tập 2.9, 2.10 và 2.11 dưới đây.

Bài tập 2.9

Cho đồ thị sau đây:



Hình 2.88: Hình vẽ của Bài tập 2.9.

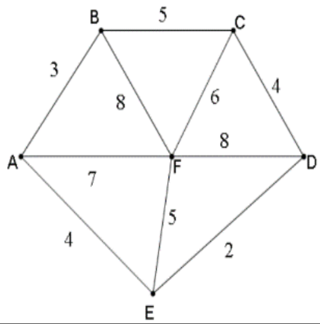
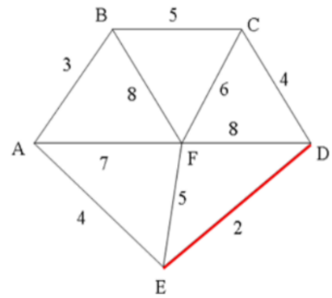
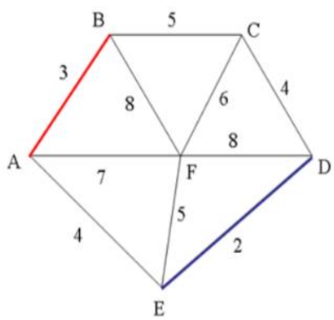
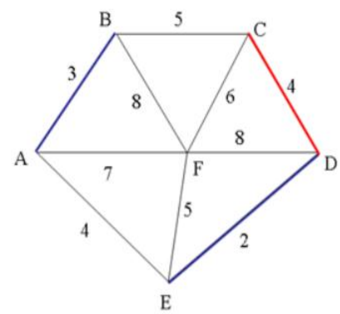
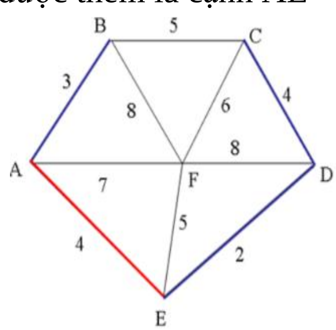
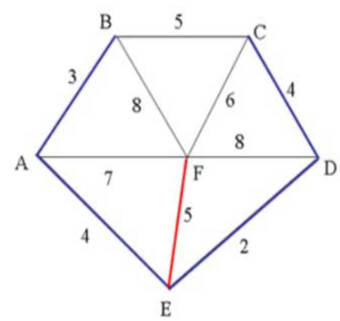
Tìm cây bao trùm cực tiểu sử dụng thuật toán Kruskal?

Hướng dẫn:

Danh sách các cạnh được sắp xếp tăng dần theo trọng số:

Cạnh	DE	AB	AE	CD	BC	EF	CF	AF	BF	DF
Trọng số	2	3	4	4	5	5	6	7	8	8

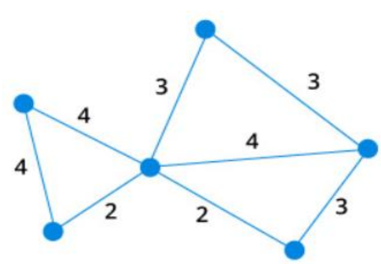
Trình tự các bước thêm các cạnh như sau: (Để tiện theo dõi, các cạnh của đồ thị sẽ được làm mờ đi, giống như tư tưởng của thuật toán ban đầu, cây T chỉ bao gồm các đỉnh, các cạnh sẽ được kết nạp lần lượt).

<table>
<tr>
<td>Ban đầu

</td>
<td>Cạnh được thêm DE

</td>
</tr>
<tr>
<td>Cạnh được thêm là AB

</td>
<td>Cạnh được thêm là CD

</td>
</tr>
<tr>
<td>Cạnh được thêm là cạnh AE

</td>
<td>Cạnh được thêm là cạnh EF

</td>
</tr>
<tr>
<td colspan="2">Đồ thị có 6 đỉnh, số cạnh cần thêm vào cây bao trùm là 5. Giá của cây bao trùm cực tiểu thu được là 2 + 3 + 4 + 4 + 5 = 18 là độ dài ngắn nhất của cây bao trùm tính được theo thuật toán Kruskal.

Các cạnh thu được từ thuật toán là (DE , AB, CD, AE, EF)</td>
</tr>
</table>

Bài tập 2.10

Cho đồ thị sau đây:

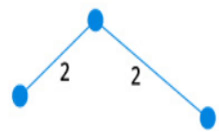
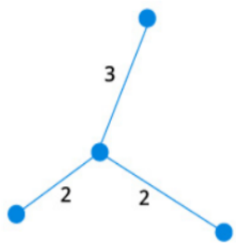
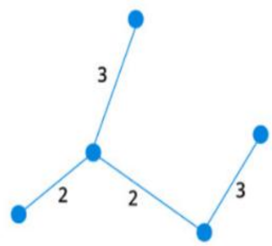
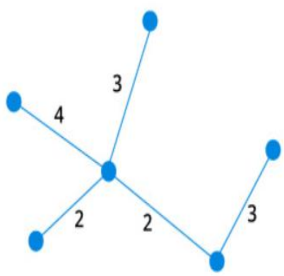


Hình 2.89: Hình vẽ của Bài tập 2.10.

Dùng thuật toán Kruskal xác định cây bao trùm tối thiểu của đồ thị?

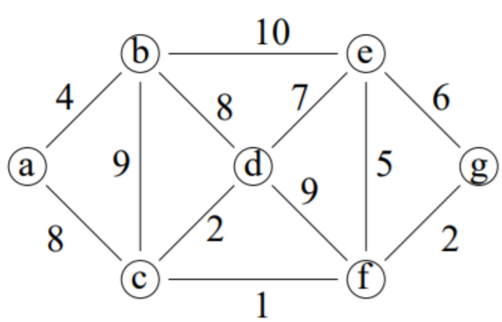
Hướng dẫn:

Sinh viên xem gợi ý dưới đây, hoàn thiện theo trình tự từng bước của thuật toán Kruskal.

	
	
	Giá của cây bao trùm cực tiểu = 2 + 2 + 3 + 3 + 4 = 14

Bài tập 2.11

Cho đồ thị sau đây:

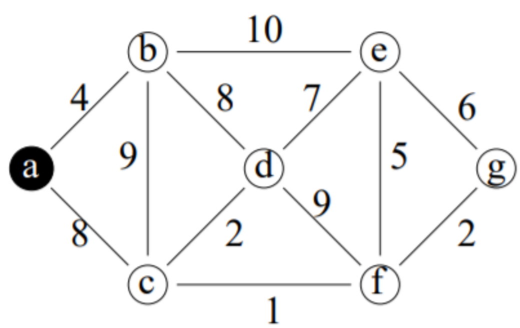
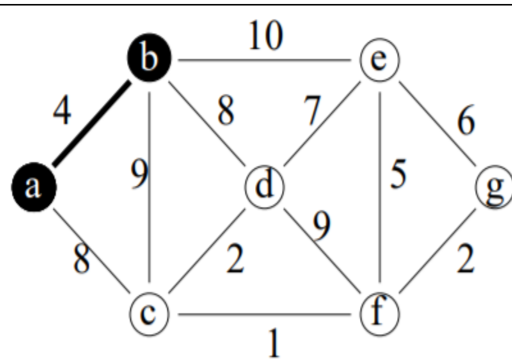
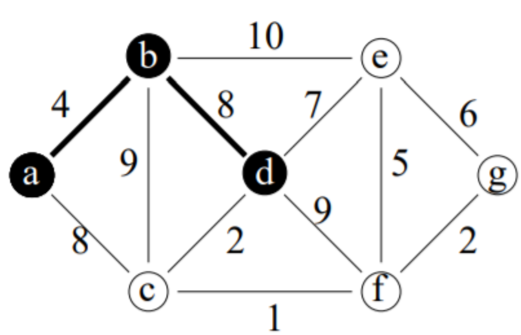
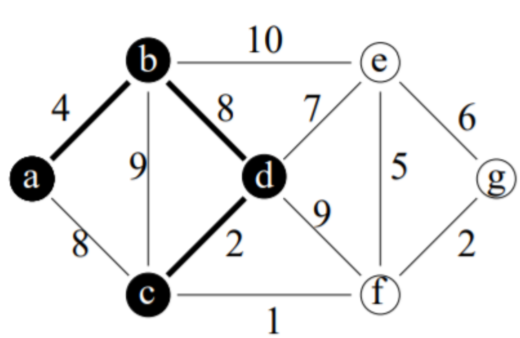


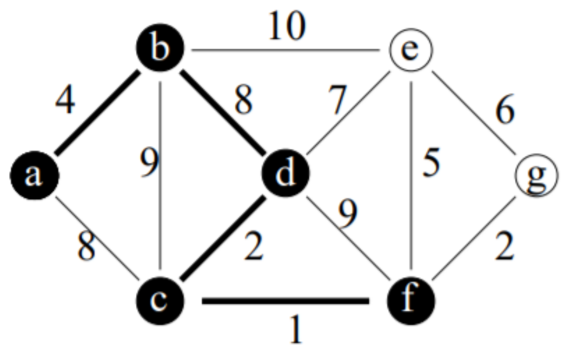
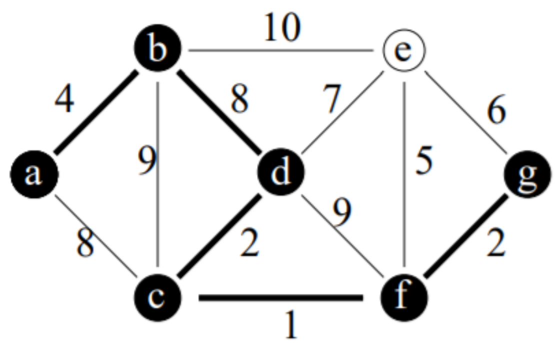
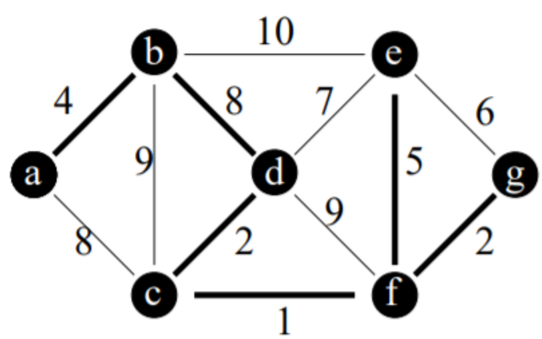
Hình 2.90: Hình vẽ của Bài tập 2.11.

Dùng thuật toán Prim xác định cây bao trùm tối thiểu của đồ thị?

Hướng dẫn:

Trình tự các bước của thuật toán Prim được thực hiện như sau:

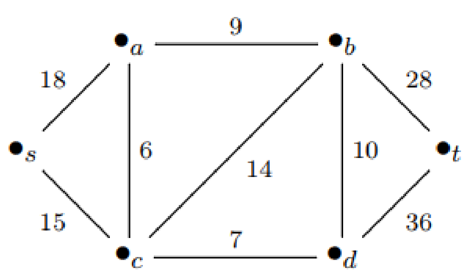
Trình tự các bước thực hiện	**Hình minh họa**
Xây dựng cây bao trùm T Chọn đỉnh bắt đầu là đỉnh a. V_T = {a}, E_T ={∅} V_G = {b, c, d, e, f, g}	
Liên quan đến đỉnh a, có 2 đỉnh b và c thuộc tập V_G, chưa thuộc T Thêm b vào V_T, thêm cạnh (a, b) vào E_T V_T = {a, b}, E_T = {(a, b)} V_G = {c, d, e, f, g}	
Các đỉnh kề liên quan đến V_T bao gồm các đỉnh c, d, e Thêm d vào V_T, thêm cạnh (b, d) vào E_T V_T = {a, b, d}, E_T = {(a, b), (b, d)} V_G = {c, e, f, g}	
Các đỉnh kề liên quan đến V_T bao gồm các đỉnh c, e, f Thêm c vào V_T, thêm cạnh (d, c) vào E_T V_T = {a, b, d, c}, E_T = {(a, b), (b, d), (d, c)} V_G = {e, f, g}	

Các đỉnh kề liên quan đến V_T bao gồm các đỉnh e, f Thêm f vào V_T, thêm cạnh (c, f) vào E_T V_T = {a, b, d, c, f}, E_T = {(a, b), (b, d), (d, c), (c, f)} V_G = {e, g}	
Các đỉnh kề liên quan đến V_T bao gồm các đỉnh e, g Thêm g vào V_T, thêm cạnh (f, g) vào E_T V_T = {a, b, d, c, f, g}, E_T = {(a, b), (b, d), (d, c), (c, f), (f, g)} V_G = {e}	
Các đỉnh kề liên quan đến V_T bao gồm các đỉnh e Thêm e vào V_T, thêm cạnh (f, e) vào E_T V_T = {a, b, d, c, f, g, e}, E_T = {(a, b), (b, d), (d, c), (c, f), (f, g), (f, e)} V_G = {Ø}	

Cây bao trùm cực tiểu thu được từ thuật toán Prim có giá = 4 + 8 + 2 + 1 + 2 + 5 = 22.

Bài tập 2.12

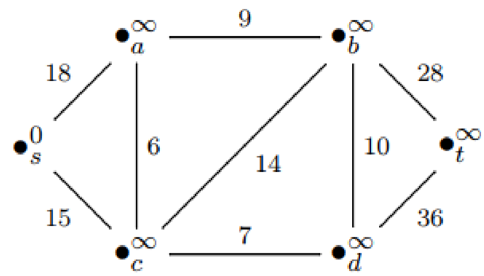
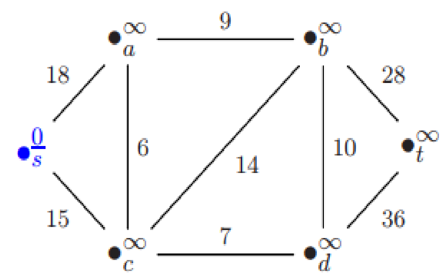
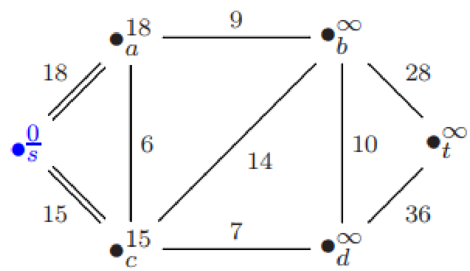
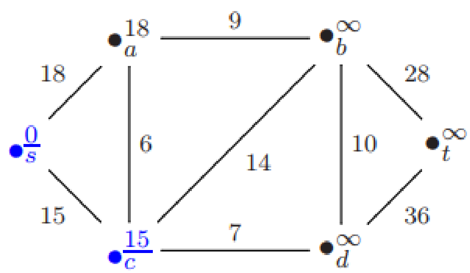
Cho đồ thị sau đây:



Hình 2.91: Hình vẽ của Bài tập 2.12.

Xác định đường đi ngắn nhất từ s đến t?

Hướng dẫn:

Trình tự các bước thực hiện	**Hình minh họa**
V = {s, a, b, c, d, t} Xuất phát từ đỉnh s Thiết lập L(s) = 0 $\forall v \in V$ thiết lập L(v) = ∞ Tập kế cận F = {a, c}	
V(T) = {s}, E(T) = {∅}	
Tính toán lại L(a) và L(c) L(a) = L(s) + w(s, a) = 0 + 18 = 18 L(c) = L(s) + w(s, c) = 0 + 15 = 15 Gán lại các nhãn của a và c từ ∞ thành 18 và 15.	
Thêm c vào V(T) V(T) = {s, c} E(T) = {(s, c)} F = {a, b, d}	

<table>
<tr>
<td>Tính toán và gán nhãn lại cho các đỉnh a, b, d.

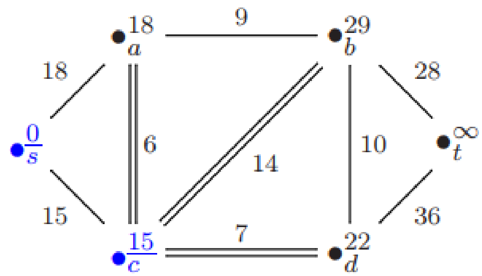
Vì L(c) + w(c, a) = 15 + 6 = 21 > 18, nên nhãn đỉnh a vẫn giữ giá trị 18.

L(a) = 18

L(b) = L(c) + w(c, b) = 15 + 14 = 29 < ∞, do đó gán lại nhãn cho đỉnh b;

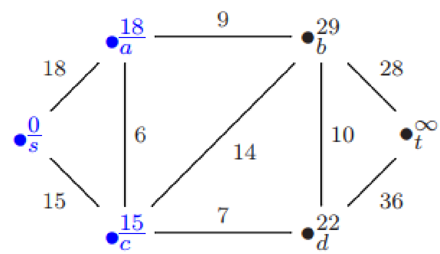
L(b) = 29

L(d) = L(c) + w(c, d) = 15 + 7 = 22 < ∞, do đó gán lại nhãn cho đỉnh d;

L(d) = 22</td>
<td>
</td>
</tr>
<tr>
<td>Trong F = {a, b, d} a có nhãn nhỏ nhất

Thêm a vào V(T)

V(T) = {s, c, a}

F ={b, d}</td>
<td>
</td>
</tr>
<tr>
<td>Xem xét và gán nhãn lại các đỉnh của F

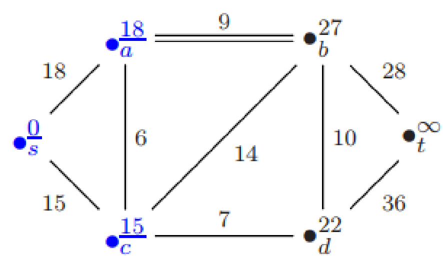
Gán nhãn cho b và d

L(b) = L(a) + w(a, b) = 18 + 9 = 27 < 29

Gán nhãn lại cho đỉnh b

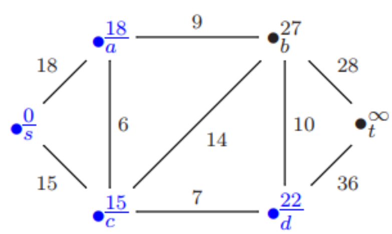
L(b) = 27

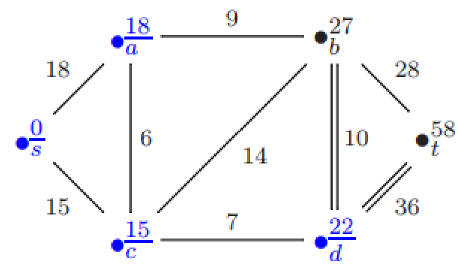
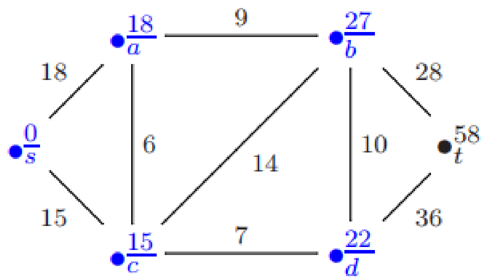
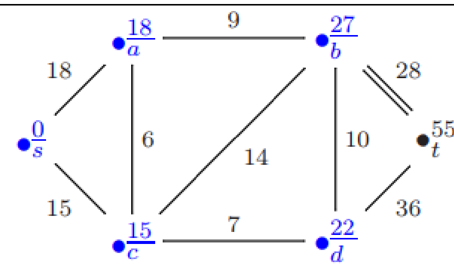
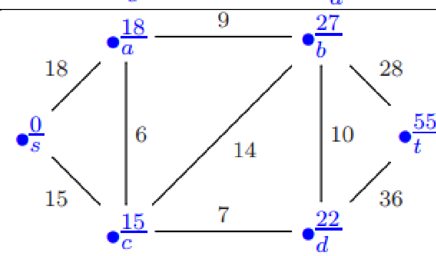
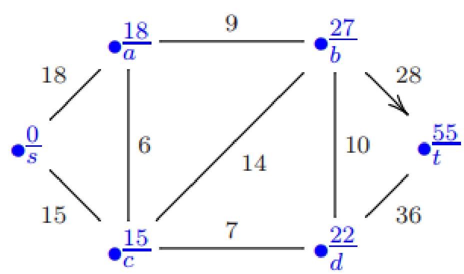
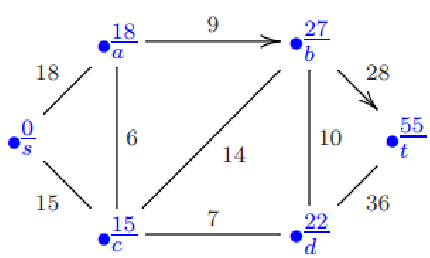
Giữ nguyên nhãn của đỉnh d;

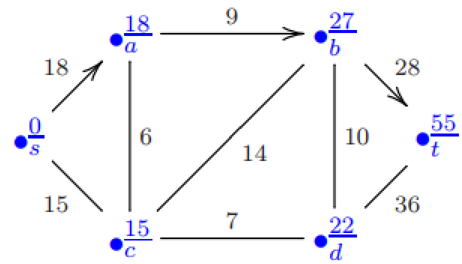
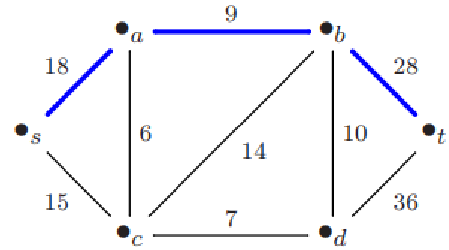
L(d) = 22</td>
<td>
</td>
</tr>
<tr>
<td>F = {b, d}

Đỉnh d có nhãn L(d) < L(b), do đó thêm d vào V(T)

V(T) = {s, c, a, d}

Tập kế cận F = {b, t}</td>
<td>
</td>
</tr>
</table>

Tính toán và gán nhãn lại cho b và t L(b) = L(d) + w(d, b) = 22 + 10 =32 > 27 Giữ nguyên nhãn của đỉnh b: L(b) = 27 L(t) = L(d) + w(d, t) = 22 + 36 = 58 < ∞ Do đó, nhãn của đỉnh t được gán lại L(t) = 58	
F = {b, t} L(b) = 27 < 58 = L(t), do đó đỉnh b được thêm vào V(T) V(T) = {s, c, a, d, b} Tập F = F –{b} = {t}	
F = {t} Gán nhãn lại cho đỉnh t L(t) = L(b) + w(b, t) = 27 + 28 = 55 < 59 Do đó, đỉnh t được gán lại nhãn L(t) = 55	
Thêm t vào V(T) V(T) = {s, c, a, d, b, t} F = {∅}	
Bây giờ bắt đầu tại t, tìm cạnh vw mà L(v) + w(vw) = L(w) và đánh dấu cạnh đó bằng hình mũi tên từ v đến w Bắt đầu từ 27 + 28 = 55 Đánh dấu mũi tên từ b đến t	
Từ 18 + 9 = 27 Đánh dấu mũi tên từ a đến b	

Từ 0 + 18 = 18 Đánh dấu mũi tên từ s đến a	
Trong trường hợp này, đường đi ngắn nhất từ s đến t là duy nhất, có tổng trọng số là 55, đi từ s qua a, đến b và đến t.	

Dựa vào cách xây dựng đường đi từ s đến t, cũng dễ dàng nhận thấy đường đi ngắn nhất từ s đến các đỉnh còn lại:

Từ s đến a có độ dài 18

Từ s đến c có độ dài 15

Từ s đến b có độ dài 27

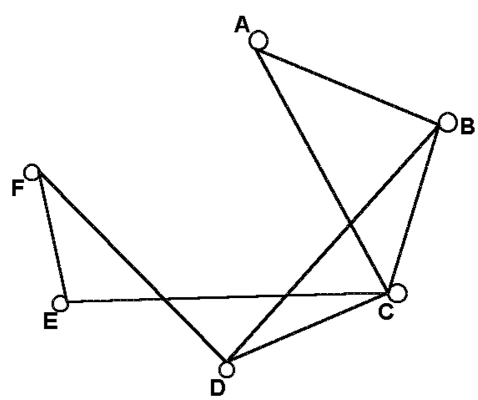
Từ s đến d có độ dài 22

Từ s đến t có độ dài 55.

B. BÀI TẬP SINH VIÊN TỰ LÀM.

Bài tập 2.13

Cho đồ thị sau đây:



Hình 2.92: Hình vẽ của Bài tập 2.13.

a. Đồ thị trên có bao nhiêu đỉnh?

b. Xác định bậc các đỉnh của đồ thị?

c. Xác định cầu và khớp của đồ thị?

d. Xác định một đường đi có độ dài 4 từ A đến F?

e. Xác định ma trận kề biểu diễn đồ thị?

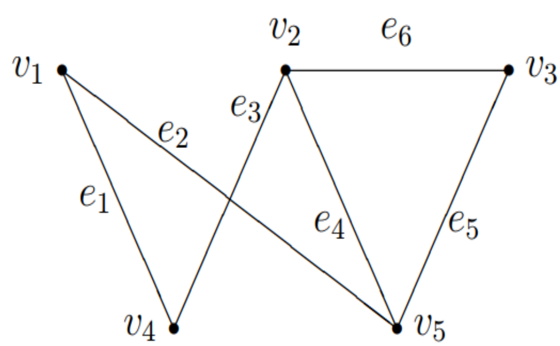
f. Xác định ma trận liên thuộc đỉnh cạnh biểu diễn đồ thị?

g. Xác định danh sách cạnh biểu diễn đồ thị?

h. Xác định danh sách kề biểu diễn đồ thị?

Bài tập 2.14

Cho đồ thị sau đây:



Hình 2.93: Hình vẽ của Bài tập 2.14.

a. Đồ thị trên có bao nhiêu đỉnh?

b. Xác định bậc các đỉnh của đồ thị?

c. Xác định cầu và khớp của đồ thị?

d. Có hay không 1 chu trình đơn giản trong đồ thị? Nếu có hãy chỉ ra chu trình đơn giản đó?

e. Xác định ma trận kề biểu diễn đồ thị?

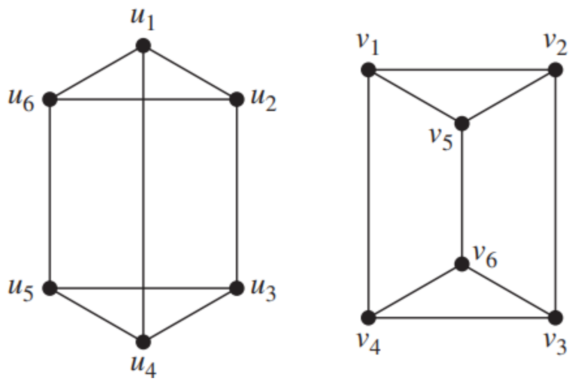
f. Xác định ma trận liên thuộc đỉnh cạnh biểu diễn đồ thị?

g. Xác định danh sách cạnh biểu diễn đồ thị?

h. Xác định danh sách kề biểu diễn đồ thị?

Bài tập 2.15

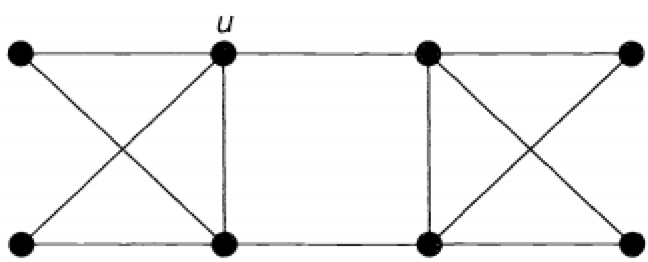
Hai đồ thị sau đây có đẳng cấu với nhau?



Hình 2.94: Hình vẽ của Bài tập 2.15.

Bài tập 2.16

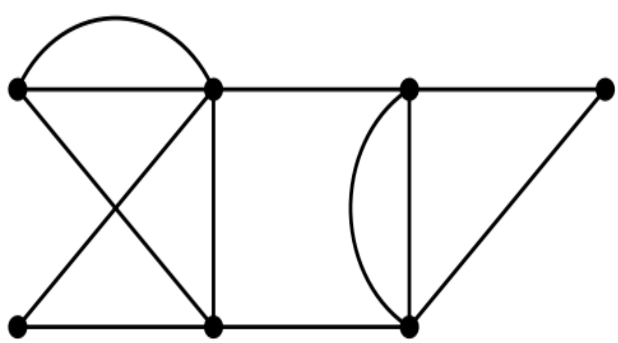
Đặt tên các đỉnh của đồ thị, chứng tỏ đồ thị có chu trình Euler. Sử dụng thuật toán Floyd tìm chu trình Euler của đồ thị sau:



Hình 2.95: Hình vẽ của Bài tập 2.16.

Bài tập 2.17

a. Đặt tên các đỉnh của đồ thị, chứng tỏ đồ thị sau đây có chu trình Euler?

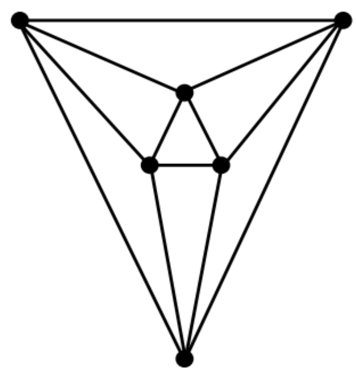


Hình 2.96: Hình vẽ của Bài tập 2.17.

b. Hãy tìm chu trình Euler trong đồ thị bằng thuật toán Floyd?

Bài tập 2.18

Đặt tên các đỉnh của đồ thị, cho biết đồ thị sau đây có chu trình, đường đi Euler, Hamilton hay không?



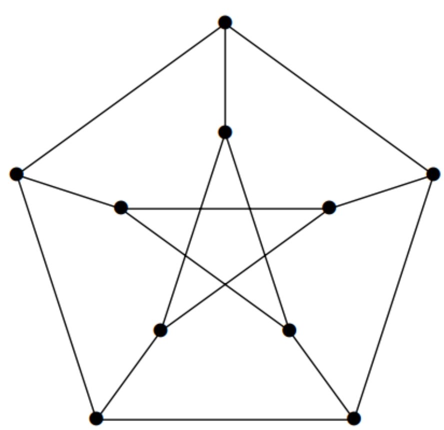
Hình 2.97: Hình vẽ của Bài tập 2.18.

Bài tập 2.19

Đồ thị dưới đây được gọi là đồ thị Petersen.

a. Đồ thị này có chứa chu trình Hamilton hay không? Tại sao?

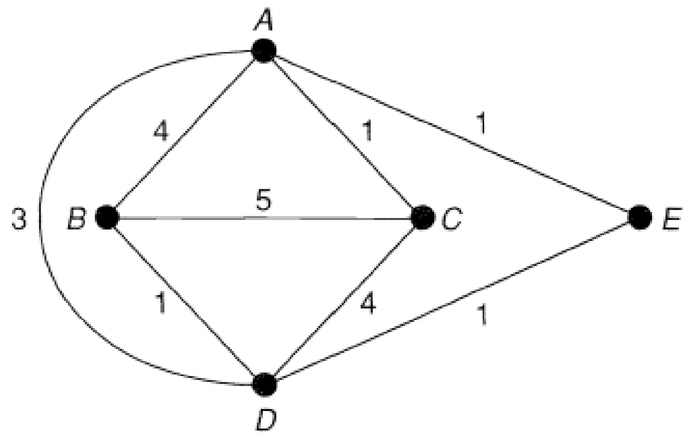
b. Có chứa đường đi Hamilton hay không? Tại sao?



Hình 2.98: Hình vẽ của Bài tập 2.19.

Bài tập 2.20

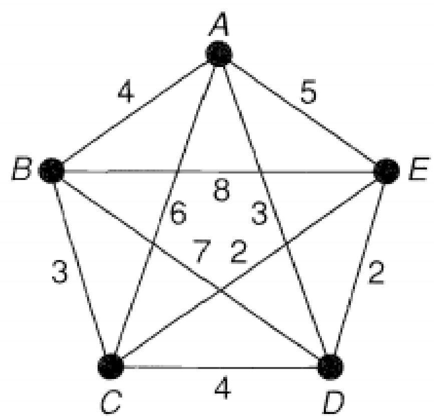
Giải bài toán người đưa thư Trung Hoa sau đây:



Hình 2.99: Hình vẽ của Bài tập 2.20.

Bài tập 2.21

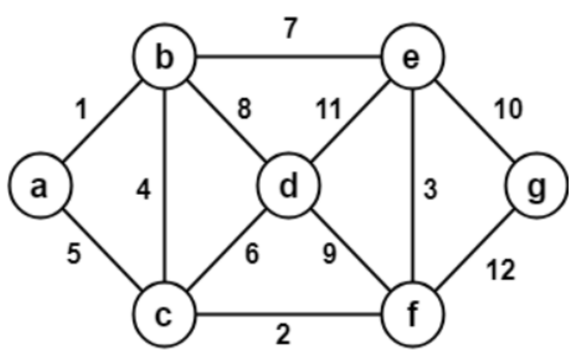
Giải bài toán người bán hàng sau đây:



Hình 2.100: Hình vẽ của Bài tập 2.21.

Bài tập 2.22

Cho đồ thị sau đây:



Hình 2.101: Hình vẽ của Bài tập 2.22.

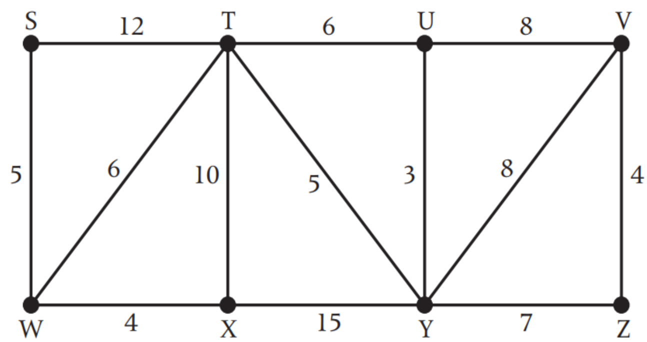
Xác định cây bao trùm của đồ thị bằng thuật toán:

a. Kruskal

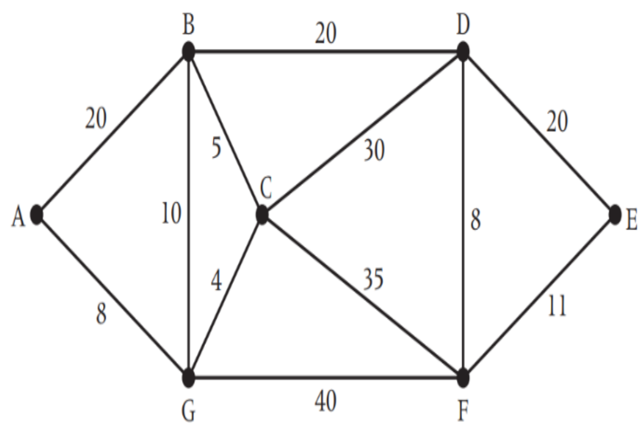
b. Prim.

Bài tập 2.23

Sử dụng thuật toán Kruskal, tìm cây bao trùm cực tiểu của các đồ thị sau đây:



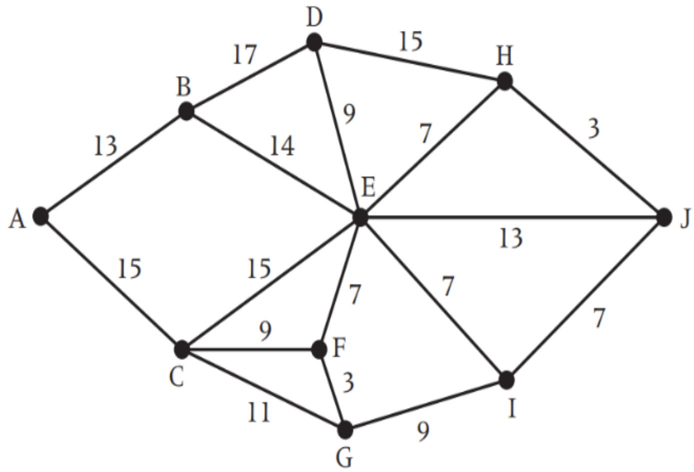
Hình 2.102: Hình vẽ 1 của Bài tập 2.23.



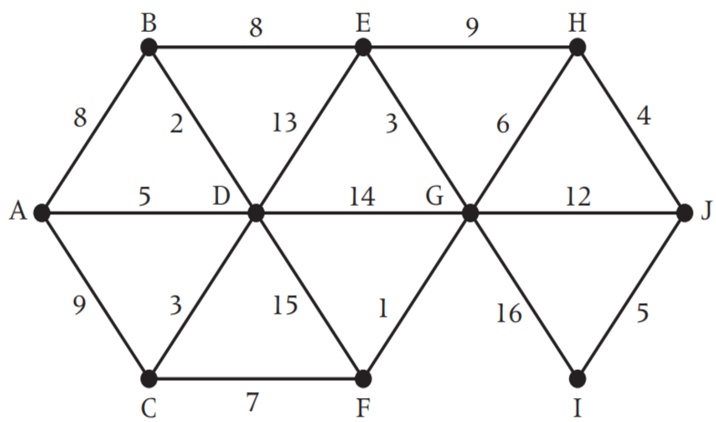
Hình 2.103: Hình vẽ 2 của Bài tập 2.23.

Bài tập 2.24.

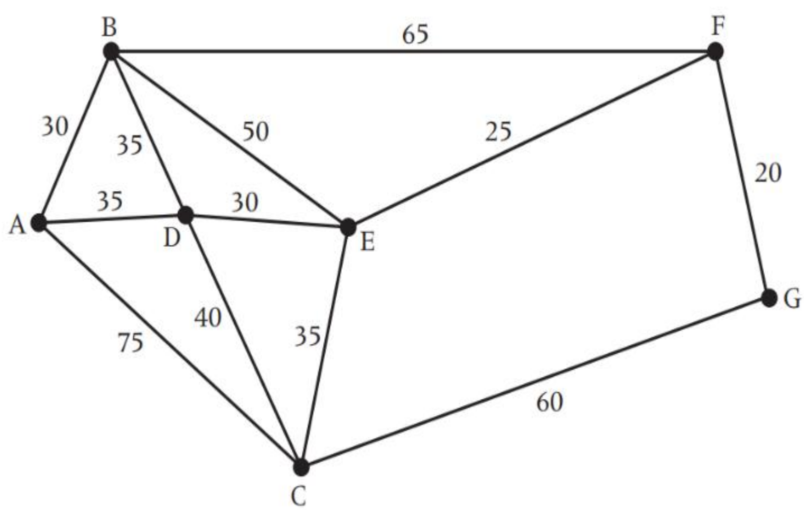
Sử dụng thuật toán Prim, tìm cây bao trùm cực tiểu của các đồ thị sau đây:



Hình 2.104: Hình vẽ 1 của Bài tập 2.24.



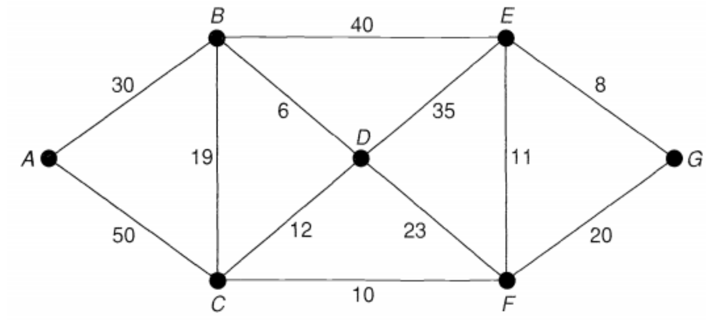
Hình 2.105: Hình vẽ 2 của Bài tập 2.24.



Hình 2.106: Hình vẽ 3 của Bài tập 2.24.

Bài tập 2.25

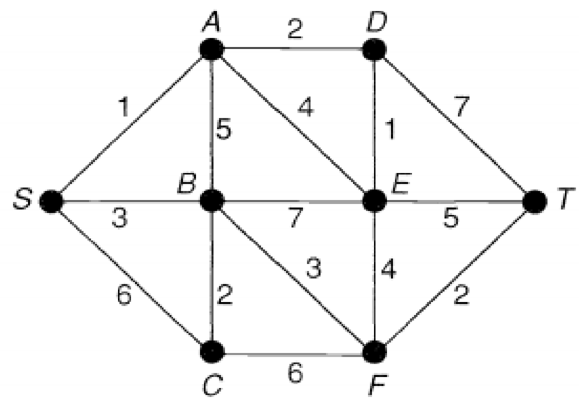
Tìm đường đi ngắn nhất từ A đến G của đồ thị sau đây:



Hình 2.107: Hình vẽ của Bài tập 2.25.

Bài tập 2.26

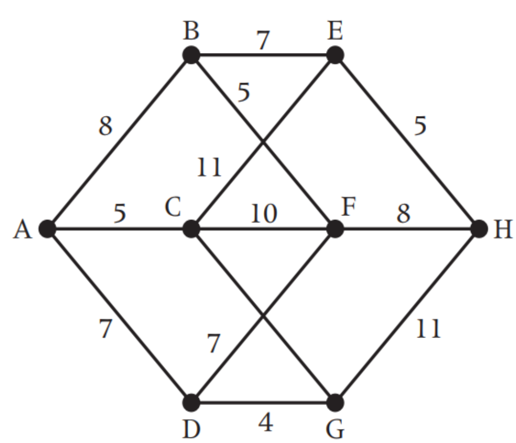
Tìm đường đi ngắn nhất từ S đến các đỉnh còn lại của đồ thị:



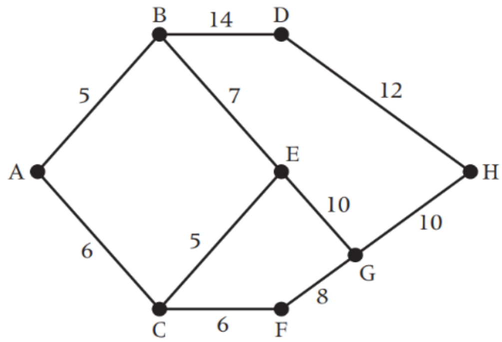
Hình 2.108: Hình vẽ của Bài tập 2.26.

Bài tập 2.27

Tìm đường đi ngắn nhất từ A đến H của các đồ thị sau đây:



Hình 2.109: Hình vẽ 1 của Bài tập 2.27.

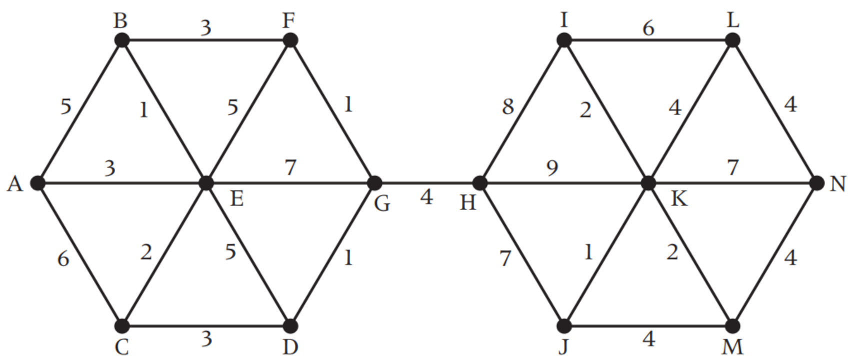


Hình 2.110: Hình vẽ 2 của Bài tập 2.27.

Bài tập 2.28

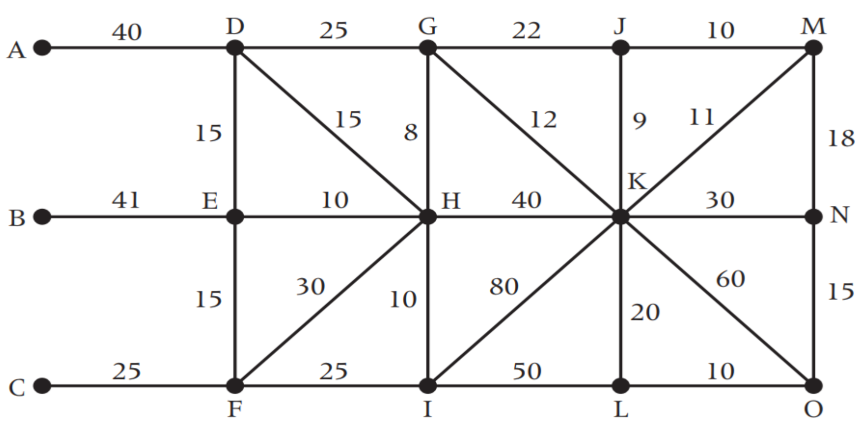
Đồ thị sau đây biểu diễn cho hai hòn đảo, mỗi hòn đảo có bảy thị trấn, có một cây cầu nối hai hòn đảo. Giá trị ghi trên mỗi cạnh, thể hiện khoảng cách trên đường bộ.

Dùng thuật toán Dijkstra, tìm đường đi ngắn nhất từ A đến N



Hình 2.111: Hình vẽ của Bài tập 2.28.

Bài tập 2.29



Hình 2.112: Hình vẽ của Bài tập 2.29.

Ba người bạn An, Bình, Cường sẽ cùng tham gia vào một cuộc thi chạy. Mỗi người sẽ xuất phát tại các vị trí khác nhau, nhưng cùng kết thúc ở N. An bắt đầu từ điểm A, Bình bắt đầu từ điểm B và Cường bắt đầu từ điểm C.

Đồ thị hình 2.112, cho thấy những tuyến đường phố mà An, Bình, Cường có thể chạy qua. Các trọng số ghi trên các tuyến đường, biểu thị thời gian, tính bằng giây, để một trong ba người chạy dọc theo tuyến phố.

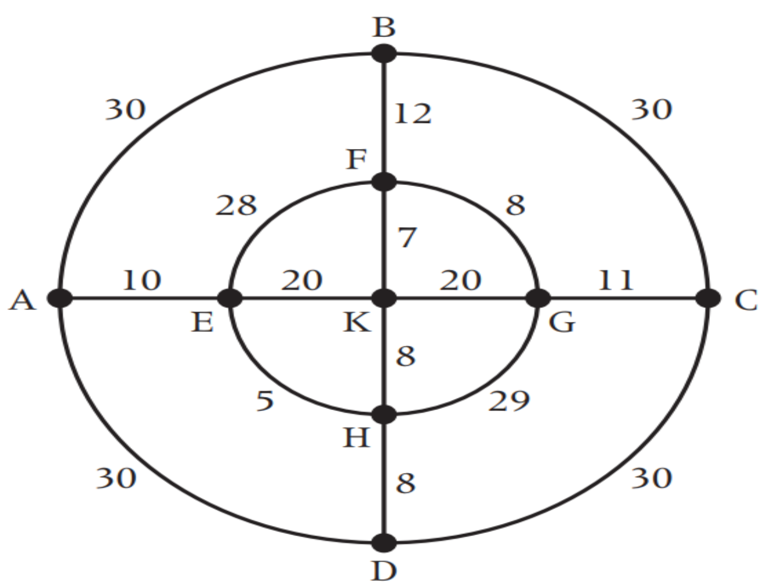
Xuất phát ngược từ N, hoặc sử dụng thuật toán Dijkstra, tìm thời gian để cả ba người An, Bình, Cường hoàn thành cuộc thi. Thể hiện tất cả các công việc tại mỗi đỉnh.

Bài tập 2.30

Đồ thị 2.113 dưới đây cho thấy những con đường xung quanh thị trấn (K) và thời gian, tính bằng phút, cần thiết để di chuyển bằng ô tô dọc theo những con đường đó.

(a) Một người lái xe muốn đi từ A đến C dọc theo những con đường này trong thời gian tối thiểu có thể. Sử dụng thuật toán Dijkstra, để tìm lộ trình mà người lái xe nên sử dụng và thời gian mà hành trình sẽ đi. Hiển thị tất cả các hoạt động của trên cung đường này một cách rõ ràng.

(b) Bốn phần của đường vành đai AB, BC, CD và DA mỗi phần yêu cầu cùng một lượng thời gian. Năm sau sẽ có những cải tiến cho đường vành đai để giảm thời gian này từ 30 phút xuống còn m phút. Điều này sẽ cho phép người lái xe giảm thời gian tối thiểu cho một hành trình từ A đến C trong 2 phút. Tìm giá trị của m và nêu lộ trình mới của người lái xe.

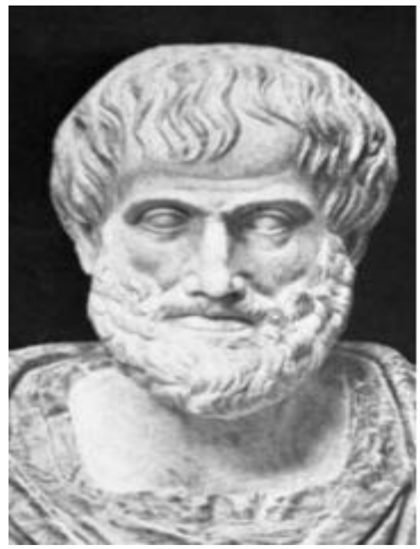


Hình 2.113: Hình vẽ của Bài tập 2.30.

CHƯƠNG 3
ĐẠI SỐ LOGIC

Nội dung Chương 3, đại số logic nhằm trang bị cho sinh viên kiến thức về mệnh đề, các phép toán của logic mệnh đề, các luật logic để biến đổi các biểu thức logic. Ngoài ra Chương 3 còn giới thiệu về các suy luận, luật suy diễn. Phần cuối của Chương 3, giới thiệu về đại số Boole, chuẩn tắc hội và chuẩn tắc tuyển.

Aristoteles (tiếng Hy Lạp cổ: Ἀριστοτέλης [aristotélɛː s], Aristotélēs; hay còn được Anh hóa là Aristotle, phiên âm trong tiếng Việt là Aritxtốt; 384 – 322 TCN) là một nhà triết học và bác học thời Hy Lạp cổ đại, học trò của Platon và thầy dạy của Alexandros Đại đế. Di bút của ông bao gồm nhiều lĩnh vực như vật lý học, siêu hình học, thi văn, kịch nghệ, âm nhạc, luận lý học, tu từ học, ngôn ngữ học, kinh tế học, chính trị học, đạo đức học, sinh học và động vật học. Ông được xem là người đặt nền móng cho môn luận lý học và được mệnh danh là *"Cha đẻ của Khoa học chính trị"*. Ông cũng thiết lập một phương cách tiếp cận với triết học bắt đầu bằng quan sát và trải nghiệm trước khi đi tới tư duy trừu tượng. Cùng với Platon và Socrates, Aristoteles là một trong ba trụ cột của văn minh Hy Lạp cổ đại.



Ý tưởng xây dựng tập hợp các quy tắc suy luận, suy diễn, là nền tảng cho việc nghiên cứu tri thức được đưa ra bởi nhà triết học Hy Lạp Aristotle (384 –322 trước Công nguyên). Vào thế kỷ XVII, nhà Triết học và Toán học người Đức Gottfried Leibniz đã đưa ra ý tưởng sử dụng các biểu tượng biểu diễn quá trình suy luận theo cách tương tự như các ký hiệu đại số, biểu diễn quá trình suy luận về các con số và mối quan hệ của chúng. Ý tưởng của nhà toán học Leibniz được thực hiện hóa vào thế kỷ XIX bởi các nhà toán học người Anh George Bool và Augustus De Morgan, người sáng lập ra các chủ đề hiện đại của logic biểu tượng. Các nghiên cứu được tiếp tục cho đến ngày nay, logic tượng trưng là một trong những kiến thức là cơ sở lý thuyết cho nhiều lĩnh vực của khoa học máy tính như thiết kế mạch, kỹ thuật số, lý thuyết cơ sở dữ liệu quan hệ, lý thuyết về automat và tính toán, trí tuệ nhân tạo, v.v..

3.1. MỆNH ĐỀ VÀ CÁC PHÉP TOÁN MỆNH ĐỀ

Nội dung của phần 3.1 chuyển hóa các phát biểu hàng ngày thành các logic mệnh đề và các logic vị từ. Giới thiệu các phép toán liên quan đến logic mệnh đề, các luật logic mệnh đề. Sử dụng các luật suy diễn để kiểm tra tính đúng đắn của một suy luận. Và cuối cùng giới thiệu và chuyển hóa các biểu thức logic về dạng chuẩn tắc hội hoặc chuyển tắc tuyển.

3.1.1. Định nghĩa

Ví dụ 3.1

Xét ví dụ với hai phát biểu sau đây, mặc dù nội dung của hai phát biểu này là khác nhau, nhưng hình thức logic của chúng là như nhau. Cả hai phát biểu đều có giá trị theo nghĩa: nếu cơ sở của chúng là đúng, thì kết luận cũng phải đúng.

Phát biểu 1: "*Nếu cú pháp chương trình bị lỗi hoặc nếu việc thực thi chương trình dẫn đến chia cho 0 thì máy tính sẽ tạo ra một thông báo lỗi".* Do đó, nếu máy tính không tạo ra thông báo lỗi, thì cú pháp chương trình là chính xác và việc thực hiện chương trình không dẫn đến tình huống chia cho 0.

Phát biểu 2: *"Nếu x là số thực thỏa mãn $x< -2$ hoặc $x >2$ thì $x^2 >4$."* Do đó, nếu $x^2 \not> 4$ thì $x \not< -2$ và $x \not> 2$.

Để minh họa hình thức logic của các phát biểu trên, chúng ta sử dụng các chữ cái của bảng chữ cái (chẳng hạn p, q, r) để biểu diễn các thành phần của câu phát biểu và biểu thức *"not p"* để biểu diễn cho câu *"không phải là p"*. Do đó, dạng biểu thức logic chung của cả hai phát biểu trên được biểu diễn như sau:

Nếu p hoặc q, thì r

Do đó, nếu không phải r, thì không phải p và không phải q.

Ví dụ 3.2

Điền vào các vị trí trống để phát biểu (b) có dạng giống phát biểu (a). Sau đó đưa ra dạng biểu thức logic chung của hai phát biểu sử dụng các ký tự thay thế cho các thành phần câu:

Phát biểu (a): *"Nếu Nam học chuyên ngành Toán hoặc Nam học chuyên ngành Khoa học máy tính, thì Nam sẽ thi toán đạt 150.*

Nam học chuyên ngành Khoc học máy tính. Do đó Nam sẽ thi toán đạt 150"

Phát biểu (b): *"Nếu môn logic dễ, hoặc ...(1)....., thì ...(2)......*

Tôi học tập chăm chỉ.

Do đó, tôi sẽ đạt điểm A của môn học"

(1) Tôi học tập chăm chỉ

(2) Tôi sẽ đạt điểm A của môn học

Hình thức chung của phát biểu A và phát biểu B:
Nếu p hoặc q, thì r. *q.* *Do đó, r.*

Định nghĩa 3.1
Mệnh đề là một khẳng định có giá trị chân lý xác định. Một mệnh đề chỉ nhận một trong hai giá trị đúng hoặc sai (không thể vừa đúng vừa sai). Ký hiệu các biến mệnh đề bằng các ký hiệu p, q, r,... Nếu p là một mệnh đề đúng, ta nói p nhận giá trị đúng, viết p = 1, hoặc p = T (True) Nếu p là một mệnh đề sai, ta nói p nhận giá trị sai, viết p = 0, hoặc p = F (False)

Ví dụ 3.3

"2 cộng 2 bằng 4" và *"2 cộng 2 bằng 5"* là hai mệnh đề, trong đó mệnh đề một đúng, còn mệnh đề hai sai.

Lưu ý:

Các câu hỏi, câu khẳng định, câu cảm thán, hoặc mệnh lệnh không phải mệnh đề vì không có giá trị xác định.

Ví dụ 3.4

Phát biểu *"Anh ta là một sinh viên"* không phải là một mệnh đề, vì trong một số trường hợp phát biểu này là đúng, nhưng trong một số trường hợp khác, phát biểu này sai.

Tương tự, *"x + y > 2"* cũng không phải là 1 mệnh đề, bởi vì trong một số giá trị của x, y, phát biểu trên là đúng, một số trường hợp khác lại cho kết quả sai. Chẳng hạn, với x = 1, y = 2, phát biểu trên đúng, với x = -1 và y = 0 thì phát biểu trên sai.

Phân loại mệnh đề
Có hai loại mệnh đề: ◆ Mệnh đề sơ cấp (nguyên thủy): là mệnh đề không thể phân tách thành nhiều mệnh đơn đơn giản hơn. ◆ Mệnh đề phức hợp: là mệnh đề được tạo từ một hoặc nhiều mệnh đề khác bằng cách sử dụng các liên kết logic như và, hoặc, khi và chỉ khi, hoặc "*không phải...*"

Ví dụ 3.5

Phát biểu p = *"15 chia hết cho 3"* là một mệnh đề sơ cấp

Phát biểu *"2 là số chẵn và 2 là số nguyên tố"* là một mệnh đề phức hợp.

3.1.2. Các phép toán logic

3.1.2.1. Phép phủ định

Định nghĩa 3.2
Nếu p là một biến mệnh đề, phủ định của p là *"không phải p"*, ký hiệu là $\neg p$ *hoặc* $\bar{p}$.   Nó có giá trị trái ngược với p: nếu p đúng thì $\neg p$ *sai*, nếu p sai thì $\neg p$ đúng

Bảng 3.1: Bảng giá trị chân lý phép phủ định

p	$\neg p$
T	F
F	T

(Ký hiệu T: True, F: False)

Ví dụ 3.6

- Nếu mệnh đề p = *"Mặt trời mọc ở đằng đông"* thì phủ định của p là $\neg p =$ *"Mặt trời không mọc ở đằng đông";*

- Nếu p = "*6 chia hết cho 3"* thì $\neg p =$ "6 *không chia hết cho* 3". Rõ ràng p đúng, $\neg p$ *sai*.

3.1.2.2. Phép hội

Định nghĩa 3.3
Cho p, q là các biến mệnh đề, phép hội của hai biến p, q được viết là *"p và q",* ký hiệu $p \wedge q$.   Phép hội chỉ cho kết quả đúng (True) khi cả p và q cùng đúng, các trường hợp còn lại đều cho kết quả sai (False)

Ví dụ 3.7

Trong ngôn ngữ thông thường, câu nói *"Trời nắng và trời nóng"* được hiểu là đúng nếu điều kiện nắng và nóng đều thỏa mãn. Nếu trời nóng, nhưng không nắng hoặc trời nắng nhưng không nóng, thì câu nói được hiểu là sai.

Bảng 3.2: Bảng giá trị chân lý của phép hội

p	q	$p \wedge q$
T	T	T
T	F	F
F	T	F
F	F	F

Ví dụ 3.8

Cho phát biểu *"6 chia hết cho 3 và 6 là một số chẵn"*;

Đặt p = *"6 chia hết cho 3",* q = *"6 là một số chẵn".* Mệnh đề $p \wedge q$ cho kết quả True, vì p, q đều nhận giá trị True.

3.1.2.3. Phép tuyển

Định nghĩa 3.4
Cho p, q là các biến mệnh đề, phép tuyển của hai biến p, q được viết là *"p hoặc q"*, ký hiệu $p \vee q$. Phép tuyển chỉ cho kết quả sai (False) khi cả p và q cùng sai, các trường hợp còn lại đều cho kết quả đúng (True).

Bảng 3.3: Bảng giá trị chân lý của phép tuyển

p	q	$p \vee q$
T	T	T
T	F	T
F	T	T
F	F	F

Ví dụ 3.9

"Số lẻ là số có tận cùng bằng 1, 3, 5, 7, 9 hoặc chia cho 2 dư 1" là một mệnh đề có giá trị T

3.1.2.4. Phép kéo theo.

Xem xét tình huống sau đây: Giả sử bạn đi phỏng vấn xin việc tại một cửa hàng và chủ cửa hàng cho bạn lời hứa: *"Nếu bạn đi làm vào sáng thứ hai, thì bạn sẽ có được công việc".*

Trong trường hợp nào bạn có lý khi nói chủ cửa hàng nói sai? hay trong trường hợp nào lời hứa trên sai? Câu trả lời là: *Bạn đi làm vào sáng thứ Hai và bạn không nhận được công việc.*

Rốt cuộc, chủ cửa hàng hứa hẹn rằng bạn sẽ nhận được công việc nếu điều kiện (đi làm vào vào sáng thứ Hai) được đáp ứng; không nói gì về những gì sẽ xảy ra nếu điều kiện không được đáp ứng. Vì vậy, nếu điều kiện không được đáp ứng, bạn không thể biết lời hứa đúng hay sai, bất kể bạn có nhận được hay không nhận được công việc.

Ví dụ trên minh chứng rằng chỉ có duy nhất một tình huống đưa đến kết quả sai khi giả thuyết là đúng và kết luận là sai. Trong tất cả các trường hợp khác, kết quả nhận được là đúng.

Định nghĩa 3.5
Cho p, q là các biến mệnh đề, các phát biểu *“Nếu p thì q”* hoặc *“p kéo theo q”*, được ký hiệu $p \to q$, trong đó p là giả thuyết (tiền đề) và q là kết luận (hệ quả). $p \to q$ sai (False) khi và chỉ khi p đúng và q sai, các trường hợp còn lại đều cho kết quả đúng (True)

Bảng 3.4: Bảng giá trị chân lý của phép kéo theo p→ q

p	q	$p \to q$
T	T	T
T	F	T
F	T	F
F	F	T

Ví dụ 3.10

Xem xét câu phát biểu sau: *“Nếu 0= 1 thì 1 =2”*.

Hướng dẫn:

Đặt p = *“0 = 1”*, q = *“1 = 2”*

Phát biểu trên có dạng *“Nếu p thì q”* và được ký hiệu $p \to q$.

p, q đều nhận giá trị sai, nhưng $p \to q$ nhận giá trị đúng.

3.1.2.5. Phép kéo theo 2 chiều

Định nghĩa 3.6
Cho p, q là các biến mệnh đề, các phát biểu *“p nếu và chỉ nếu q”* hoặc *“p khi và chỉ khi q”*, *“p là điều kiện cần và đủ của q”* được ký hiệu $p \leftrightarrow q$, được gọi là phép kéo theo hai chiều. $p \leftrightarrow q$ đúng khi và chỉ khi p, q cùng giá trị chân lý (cùng đúng hoặc cùng sai), $p \leftrightarrow q$ sai khi và chỉ khi p, q có giá trị chân lý ngược.

Bảng 3.5: Bảng giá trị chân lý của phép kéo theo hai chiều

p	q	$p \leftrightarrow q$
T	T	T
T	F	F
F	T	F
F	F	T

Ví dụ 3.11

"Số tự nhiên n chia hết cho 3 khi và chỉ khi tổng các chữ số của n chia hết cho 3"

Hướng dẫn:

Đặt p = *"Số tự nhiên n chia hết cho 3"*, q = *"tổng các chữ số của n chia hết cho 3"*

Phát biểu trên được thể hiện qua biểu thức logic $p \leftrightarrow q$.

3.1.2.6. Biểu thức logic

<table>
<tr><td colspan="2">Định nghĩa 3.7</td></tr>
<tr><td colspan="2">Biểu thức logic là một biểu thức được cấu tạo từ các mệnh đề (p, q, r,..) và các phép toán logic $\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$, $\leftrightarrow$, kết hợp các dấu mở đóng ngoặc ( ).
Bảng giá trị chân lý của một biểu thức logic ghi lại tất cả các trường hợp có thể xảy ra của biểu thức logic theo các biến mệnh đề. Nếu có n biến mệnh đề thì bảng giá trị chân lý sẽ có 2^n dòng (không kể dòng tiêu đề).</td></tr>
<tr><td colspan="2">Mức độ ưu tiên của các phép toán logic trong biểu thức logic</td></tr>
<tr><td>Mức độ ưu tiên thứ nhất</td><td>$\neg$</td></tr>
<tr><td>Mức độ ưu tiên thứ hai</td><td>$\wedge$, $\vee$, khi có mặt đồng thời trong một biểu thức, ưu tiên trong phép toán thực hiện trong dấu ngoặc đơn.</td></tr>
<tr><td>Mức độ ưu tiên thứ ba</td><td>$\rightarrow, \leftrightarrow$, khi có mặt đồng thời trong một biểu thức, ưu tiên trong phép toán thực hiện trong dấu ngoặc đơn.</td></tr>
</table>

Ví dụ 3.12

Xây dựng bảng giá trị chân lý cho biểu thức sau đây:

$A = (p \vee q) \wedge \neg(p \wedge q)$

Hướng dẫn:

Ý nghĩa của biểu thức logic A: chỉ p hoặc q (p và q không đồng thời). Biểu thức A còn được viết ở dạng khác $p \oplus q$ hoặc p XOR q.

p	q	$p \vee q$	$p \wedge q$	$\neg(p \wedge q)$	$(p \vee q) \wedge \neg(p \wedge q)$
T	T	T	T	F	F
T	F	T	F	T	T
F	T	T	F	T	T
F	F	F	F	T	F

Ví dụ 3.13

Xây dựng bảng giá trị chân lý cho biểu thức sau đây:

B = $(p \wedge q) \vee \neg r$

Hướng dẫn:

Xây dựng bảng giá trị chân lý của biểu thức

Tạo bảng với tiêu đề của các cột là p, q, r, $(p \wedge q)$, $\neg r$, $(p \wedge q) \vee \neg r$. Với 3 biến mệnh đề p, q, r thì 2^3 giá trị khi kết hợp các biến này.

p	q	r	$p \wedge q$	$\neg r$	$(p \wedge q) \vee \neg r$
T	T	T	T	F	T
T	T	F	T	T	T
T	F	T	F	F	F
T	F	F	F	T	T
F	T	T	F	F	F
F	T	F	F	T	T
F	F	T	F	F	F
F	F	F	F	T	T

Ví dụ 3.14

Xác định bảng giá trị chân lý của biểu thức logic sau đây:

$$p \vee \neg q \rightarrow \neg p$$

Hướng dẫn:

Xây dựng bảng giá trị chân lý của biểu thức

p	q	$\neg p$	$\neg q$	$p \vee \neg q$	$p \vee \neg q \rightarrow \neg p$
T	T	F	F	T	F
T	F	F	T	T	F
F	T	T	F	F	T
F	F	T	T	F	T

3.1.2.7. Tương đương logic

Định nghĩa 3.8

Hai biểu thức logic được gọi là tương đương logic nếu có cùng bảng giá trị chân lý. Sự tương đương logic của 2 biểu thức A, B được biểu thị $P \equiv Q$ hoặc $P \Leftrightarrow Q$.

Kiểm tra hai biểu thức P và Q có tương đương logic?
Bước 1: Xây dựng bảng giá trị chân lý với 1 cột là các giá trị của P và một cột thể hiện các giá trị của Q (giá trị các dòng của P và Q được xác định dựa vào giá trị của các biến mệnh đề trong biểu thức). **Bước 2:** Kiểm tra giá trị của từng dòng của biểu thức P, so sánh với giá trị dòng tương ứng của Q. Nếu giá trị của tất cả các dòng của biểu thức P giống với giá trị của các dòng của biểu thức Q, thì kết luận P và Q tương đương logic. Nếu một trong các dòng giá trị của P khác với dòng tương ứng của Q, thì P và Q không tương đương logic.

Ví dụ 3.15

Chứng minh $\neg(\neg \boldsymbol{p}) \equiv \boldsymbol{p}$

Xây dựng giá trị chân lý cho 2 biểu thức A = p và B = $\neg(\neg p)$

Hướng dẫn:

p	$\neg p$	$\neg(\neg p)$
T	F	T
F	T	F

Ví dụ 3.16

Chứng minh 2 biểu thức logic

A = $\neg(p \wedge q)$ và B = $\neg p \wedge \neg q$ không tương đương logic.

Hướng dẫn:

Xây dựng bảng giá trị chân lý của hai biểu thức A, B:

p	q	$\neg p$	$\neg q$	$p \wedge q$	$\neg(p \wedge q)$	$\neg p \wedge \neg q$
T	T	F	F	T	F	F
T	F	F	T	F	T	F
F	T	T	F	F	T	F
F	F	T	T	F	T	T

Ví dụ 3.17

Chứng minh 2 biểu thức

A = $\neg(p \wedge q)$ và B = $\neg p \vee \neg q$ tương đương logic.

Hướng dẫn:

Xây dựng bảng giá trị chân lý của 2 biểu thức A, B

p	q	$\neg p$	$\neg q$	$p \wedge q$	$\neg(p \wedge q)$	$\neg p \vee \neg q$
T	T	F	F	T	F	F
T	F	F	T	F	T	T
F	T	T	F	F	T	T
F	F	T	T	F	T	T

Do đó: $\neg(p \wedge q) \equiv \neg p \vee \neg q$.

Công thức này được gọi là công thức phủ định (De Morgan)

Tương tự, ta cũng có $\neg(p \vee q) \equiv \neg p \wedge \neg q$

Ví dụ 3.18

Chứng minh rằng hai biểu thức

A = $p \vee q \rightarrow r$ và B = $(p \rightarrow r) \wedge (q \rightarrow r)$ tương đương logic.

Hướng dẫn:

Xây dựng bảng giá trị chân lý của 2 biểu thức A, B.

p	q	r	$p \vee q$	$p \rightarrow r$	$q \rightarrow r$	$p \vee q \rightarrow r$	$(p \rightarrow r) \wedge (q \rightarrow r)$
T	T	T	T	T	T	T	T
T	T	F	T	F	F	F	F
T	F	T	T	T	T	T	T
T	F	F	T	F	T	F	F
F	T	T	T	T	T	T	T
F	T	F	T	T	F	F	F
F	F	T	F	T	T	T	T
F	F	F	F	T	T	T	T

Dựa vào bảng giá trị chân lý của hai biểu thức A và B, giá trị các dòng của A và B giống hệt nhau. Do đó, A và B tương đương logic.

Ví dụ 3.19

Chứng minh rằng hai biểu thức logic

A = $p \leftrightarrow q$ và B = $(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$ tương đương logic.

Hướng dẫn:

Xây dựng bảng giá trị chân lý của 2 biểu thức A, B.

p	q	$p \rightarrow q$	$q \rightarrow p$	$p \leftrightarrow q$	$(p \rightarrow q) \land (q \rightarrow p)$
T	T	T	T	T	T
T	F	F	T	F	F
F	T	T	F	F	F
F	F	T	T	T	T

Dựa vào bảng giá trị chân lý của hai biểu thức A và B, giá trị các dòng của A và B giống hệt nhau. Do đó, A và B tương đương logic.

3.1.2.8. Hằng đúng, hằng sai

Định nghĩa 3.9
Hằng đúng (tautology): Biểu thức logic P gọi là hằng đúng nếu bảng giá trị chân lý của P luôn bằng 1(T) trong mọi trường hợp của các biến mệnh đề trong biểu thức P. Khi đó, ta có thể viết P $\equiv 1$. **Hằng sai (contradication):** Biểu thức logic P gọi là hằng sai nếu bảng giá trị chân lý của P luôn bằng 0 (F) trong mọi trường hợp của các biến mệnh đề trong biểu thức P. Khi đó, ta có thể viết P $\equiv 0$.

Ví dụ 3.20

Chứng minh $A = p \lor \neg p$ là 1 hằng đúng và $B = p \land \neg p$ là 1 hằng sai.

Hướng dẫn:

p	$\neg p$	$p \lor \neg p$	$p \land \neg p$
T	F	T	F
F	T	T	F

Tất cả các giá trị trên các dòng của biểu thức A luôn bằng T, do đó A là một hằng đúng. Ngược lại, tất cả các giá trị trên các dòng của biểu thức B luôn bằng F, hay B là một hằng sai.

3.1.2.9. Ứng dụng của logic

Logic có nhiều ứng dụng quan trọng trong Toán học, Khoa học máy tính và nhiều lĩnh vực khác của cuộc sống. Các phát biểu trong Toán học và khoa học, ngôn ngữ tự nhiên thường không chính xác hoặc mơ hồ. Để các phát biểu này chính xác, chúng ta có thể sử dụng ngôn ngữ của logic. Chẳng hạn, logic được sử dụng trong đặc tả của phần mềm và phần cứng, bởi những thông số kỹ thuật cần phải chính xác trước khi bắt đầu phát triển. Hơn nữa, logic mệnh đề và các quy tắc của nó còn được sử dụng để thiết kế mạch, xây dựng các chương trình, xác minh tính đúng đắn của các chương trình, xây dựng các hệ thống chuyên gia.

Ứng dụng 1: *Chuyển các phát biểu bằng ngôn ngữ tự nhiên sang biểu thức logic, loại bỏ sự mơ hồ, không chính xác.*

Ví dụ 3.21

"Bạn chỉ có thể truy cập Internet từ trường, chỉ khi bạn là sinh viên khoa công nghệ thông tin hoặc bạn không phải là sinh viên năm thứ nhất".

Hướng dẫn:

p = *"Bạn có thể truy cập Internet từ trường"*

q = *"Bạn là sinh viên khoa công nghệ thông tin"*

r = *"Bạn không phải là sinh viên năm thứ nhất"*

Biểu thức logic thay thế cho phát biểu trên là:

$$p \rightarrow (q \vee \neg r)$$

Ví dụ 3.22

"Bạn không được phép đi tàu lượn siêu tốc, nếu bạn cao dưới 1.4m, trừ khi bạn trên 16 tuổi"

Hướng dẫn:

p = "Bạn có thể đi tàu lượn siêu tốc"

q = "Bạn cao dưới 1.4m"

r = "Bạn trên 16 tuổi"

Biểu thức logic thay thế cho phát biểu trên là:

$$(q \wedge \neg r) \rightarrow \neg p$$

Ứng dụng 2: *Đặc tả hệ thống*

Chuyển các phát biểu trong ngôn ngữ tự nhiên thành các biểu thức logic là công việc cần thiết trong đặc tả hệ thống phần cứng và phần mềm. Các kỹ sư phần cứng và phần mềm sử dụng các đặc tả này làm cơ sở để phát triển hệ thống.

Ví dụ 3.23

Đặc tả *"Không thể gửi trả lời tự động khi hệ thống tập tin bị tràn"*

p = "Gửi trả lời tự động"

q = "Hệ thống tập tin tràn"

Đặc tả trên được thay thế bằng biểu thức $q \rightarrow \neg p$

Các đặc tả hệ thống phải nhất quán, nghĩa là chúng không được chứa các yêu cầu bị xung đột dẫn đến các mâu thuẫn. Khi các đặc tả không nhất quán, sẽ không có cách nào để phát triển hệ thống thỏa mãn các đặc tả.

Ví dụ 3.24

Xác định các đặc tả hệ thống có phù hợp không?

"Thông báo chẩn đoán được lưu trữ trong bộ đệm hoặc được truyền lại"

"Thông báo chẩn đoán không được lưu trữ trong bộ đệm"

"Nếu thông báo chẩn đoán được lưu trong bộ đệm, thì nó được truyền lại"

Hướng dẫn:

Để kiểm tra các đặc tả trên có nhất quán hay không, chúng ta sẽ chuyển các đặc tả này thành các biểu thức logic

Đặt p = *"Thông báo chẩn đoán được lưu trong bộ đệm"*

Đặt q = *"Thông báo chẩn đoán được truyền lại"*

Các đặc tả hệ thống có thể được viết dưới dạng

$p \vee q$

$\neg p$

$p \rightarrow q$

Việc gán giá trị cho các đặc tả đều dẫn đến kết quả p sai để $\neg p$ đúng. Khi đó để $p \vee q$ đúng thì q đúng. Khi đó p sai, q đúng nên $p \rightarrow q$ đúng, nên chúng ta có thể kết luận các đặc tả này hoàn toàn phù hợp, tất cả các đặc tả đều đúng khi p sai, q đúng. Có thể sử dụng bảng giá trị chân lý được xây dựng với hai biến mệnh đề p, q cho các biểu thức trên để đi đến kết luận tương tự.

Ví dụ 3.25

Các đặc tả trên còn phù hợp không nếu thêm đặc tả sau:

"Thông báo chẩn đoán không được truyền lại"

Ở Ví dụ 3.24, các biểu thức logic nhận giá trị đúng khi p sai, q đúng.

Tuy nhiên, đặc tả mới thêm vào này là $\neg q$ nhận kết quả sai khi q đúng. Do đó, bốn đặc tả này không nhất quán với nhau.

Ứng dụng 3: *Tìm kiếm boolean*

Các kết nối logic được sử dụng rộng rãi trong tìm kiếm tập dữ liệu lớn, được cung cấp bởi hàng triệu trang Web trên thế giới. Bởi vì các tìm kiếm này sử dụng các kỹ thuật từ logic mệnh đề nên được gọi là tìm kiếm boolean.

Hiện tại, nhiều máy truy tìm hỗ trợ thêm các phép toán như là OR, AND và NOT. Khi dùng thì tên của các phép toán này bắt buộc phải viết chữ in hoa. Phép toán boole đòi hỏi điền vào đúng vị trí quy định một từ (hay một cụm từ trong ngoặc kép) giữ vai trò của toán tử. Ngoài ra, đa số máy truy tìm chỉ hoạt động tốt trong một số lượng giới hạn các phép toán boole cho một bộ từ khoá. Lời khuyên chung là không nên dùng quá 6 phép toán boole cho cùng một bộ từ khoá và không phải máy truy tìm nào cũng hỗ trợ đầy đủ các phép toán AND, OR hay NOT.

OR: Có cú pháp là (Toán tử 1) OR (Toán tử 2). Lệnh này cho phép tìm những trang Web nào có chứa một trong các toán tử của phép toán OR của bộ từ khoá. Ví dụ để tìm các bài viết về Nguyễn Trãi trong cả tiếng Việt và tiếng nước ngoài thì có thể dùng bộ từ khoá *"Nguyễn Trãi"* OR *"Nguyen Trai"*. Nhập từ khóa *"TCP/IP OR NetBEUI"*, kết quả sẽ hiển thị giao thức mạng TCP/IP hoặc NetBEUI.

Các máy truy tìm có thể dùng OR là: AltaVista, AOL Search, Excite, Google, Inktomi (HotBot, MSN), Ask Jeeves, Lycos, Northern Light, HotBot và Gigablast.

AND: Có cú pháp (Toán tử 1) AND (Toán tử 2). Phép toán AND nhằm yêu cầu máy truy tìm kiếm các trang có sự hiện diện của tất cả các toán tử. Ví dụ *"nanotechology AND health"* sẽ giúp truy tìm các trang có mặt đồng thời hai chữ health và chữ nanotechnology. Nhập từ khóa *"heart AND attack"*, công cụ tìm kiếm sẽ liệt kê các trang có xuất hiện cả hai từ nói trên. Điều này, giúp tránh được các kết quả đưa ra không phù hợp.

Một số trang truy tìm sẽ dùng AND như là mặc định (trong đó có Google). Bạn cũng có thể thay thế bằng cách dùng dấu + trong một số trường hợp nào máy truy tìm không có chức năng của đại số Bool. Các trang hỗ trợ phép toán AND là: AltaVista, AOL Search, Excite, Inktomi (HotBot, MSN), Northern Light, Yahoo và Gigablast.

NOT: Phép này hoàn toàn tương tự như cách dùng dấu -. Nghĩa là, sự truy tìm sẽ loại bỏ những trang mà nội dung có chứa toán tử đứng ngay sau phép toán NOT. Tuy nhiên trong nhiều máy truy tìm có hỗ trợ thì phép này cũng chỉ được dùng có một lần cho một bộ từ khoá.

Ví dụ để tìm tài liệu hướng dẫn về ngôn ngữ lập trình C/C++ có thể thử dùng trên Altavista "C/C++ tutor" NOT book. Nhập từ khóa *"orange NOT juice"*, kết quả sẽ hiển thị thông tin chứa từ orange nhưng không có từ juice.

Các trang có thể dùng NOT là AOL Search, Excite, Inktomi (HotBot, MSN), Northern Light và Gigablast.

***Ứng dụng 4:** Giải các câu đố logic*

Các câu đố được giải quyết bằng các luật logic được gọi là các câu đố logic. Việc giải quyết các câu đố logic là cách thực hành tốt nhất để hiểu rõ về các luật logic, đôi khi người ta còn xây dựng thành các chương trình máy tính để giải quyết các bài toán logic nổi tiếng. Rất nhiều người thích tham gia giải quyết các bài toán logic được giới thiệu trong các sách, ấn phẩm định kỳ, trên các trang web như một hoạt động giải trí.

Ví dụ 3.26

(Ví dụ này cũng được đề cập lại trong phần chứng minh bằng mâu thuẫn trong phần các luật suy diễn).

Nhà logic học Smullyan đã đặt ra một câu đố về một hòn đảo, ở đó có hai loại cư dân. Hiệp sĩ, những người luôn nói sự thật và những nô lệ của họ, những kẻ luôn nói dối. Bạn gặp hai người A, B trên hòn đảo. A, B là loại người nào nếu A nói *"B là một hiệp sĩ"*, còn B thì nói *"Chúng tôi là những người đối nghịch"*. (Không cùng kiểu cư dân).

Hướng dẫn:

Đặt p = *"A là một hiệp sĩ"*

q = *"B là một hiệp sĩ"*

Do đó $\neg p$ = *"A là một nô lệ"* , $\neg q$ = *"B là một nô lệ"*

Phát biểu *"Chúng tôi là những người đối nghịch"* tương đương với biểu thức logic $(p \wedge \neg q) \vee (\neg p \wedge q)$

Đầu tiên, xem xét khả năng A là một hiệp sĩ, mệnh đề p đúng. Nếu A là một hiệp sĩ, anh ta luôn nói thật, do đó B là một hiệp sĩ. Như vậy mệnh đề q đúng và A, B cùng kiểu cư dân (cùng là hiệp sĩ). Tuy nhiên, nếu B là hiệp sĩ, thì B luôn nói sự thật, phát biểu của B *"Chúng tôi là những người đối nghịch"* luôn nhận giá trị đúng, hay biểu thức $(p \wedge \neg q) \vee (\neg p \wedge q)$ nhận giá trị đúng. Nhưng điều này không đúng, vì $(p \wedge \neg q) \vee (\neg p \wedge q)$ nhận giá trị sai khi p đúng và q đúng.

Do đó, ta có thể kết luận A không phải hiệp sĩ, nghĩa là p sai.

Nếu là A là một nô lệ, thì A luôn nói dối, do đó phát biểu của A *"B là một hiệp sĩ"* sai, hay B không phải hiệp sĩ, B là một nô lệ.

Hơn nữa, nếu B là một nô lệ, b luôn nói dối, lời nói của B *"Chúng tôi là những người đối nghịch"* sai, hay A, B cùng kiểu người, phù hợp với kết quả A, B đều là nô lệ.

Chúng ta đi đến kết luận A, B đều là nô lệ.

3.1.3. Các luật logic

Bảng 3.6: Bảng tổng hợp các luật logic

Luật logic	
Cho các biến mệnh đề p, q, r và các hằng đúng T, hằng sai F	
1. Luật giao hoán	
$p \wedge q \equiv q \wedge p$	$p \vee q \equiv q \vee p$
2. Luật kết hợp	
$(p \wedge q) \wedge r \equiv q \wedge (p \wedge r)$	$(p \vee q) \vee r \equiv p \vee (q \vee r)$
3. Luật phân phối	
$p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$	$p \vee (q \wedge r) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r)$
4. Luật phủ định của phủ định	
$\neg(\neg p) \equiv p$	
5. Luật De Morgan	
$\neg(p \vee q) \equiv \neg p \wedge \neg q$	$\neg(p \wedge q) \equiv \neg p \vee \neg q$
6. Luật kéo theo	
$p \rightarrow q \equiv \neg p \vee q$	
7. Luật tương đương	
$p \leftrightarrow q \equiv (p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$	
8. Luật trung hòa	
$p \wedge T \equiv p$	$p \vee F \equiv p$
9. Luật thống trị	
$p \wedge F \equiv F$	$p \vee T \equiv T$
10. Luật lũy đẳng	
$p \wedge p \equiv p$	$p \vee p \equiv p$
11. Luật phần tử bù	
$p \wedge \neg p \equiv F$	$p \vee \neg p \equiv T$

Việc chứng minh các luật trên dựa vào việc lập bảng giá trị chân lý.

Ví dụ 3.27

Chứng minh luật De Morgan dựa vào việc lập bảng giá trị chân lý

$$\neg(p \vee q) \equiv \neg p \wedge \neg q$$

$$\neg(p \wedge q) \equiv \neg p \vee \neg q$$

Hướng dẫn:

Xây dựng bảng giá trị chân lý, so sánh giá trị từng dòng của vế trái và vế phải

p	q	$\neg p$	$\neg q$	$p \vee q$	$p \wedge q$	$\neg(p \vee q)$	$\neg p \wedge \neg q$	$\neg(p \wedge q)$	$\neg p \vee \neg q$
T	T	F	F	T	T	F	F	F	F
T	F	F	T	T	F	F	F	T	T
F	T	T	F	T	F	F	F	T	T
F	F	T	T	F	F	T	T	T	T

Các luật khác được chứng minh tương tự.

Ví dụ 3.28

Dựa vào các luật logic chứng minh rằng:

$\neg(\neg p \wedge q) \wedge (p \vee q) \equiv p$

Ý tưởng:

- Sử dụng các luật logic, thay thế các thành phần của biểu thức logic bên trái bằng các biểu thức logic tương đương. Sau mỗi bước thực hiện, ta thu được biểu thức logic tương đương logic với biểu thức ban đầu. Tiếp tục thực hiện, cho đến khi thu được biểu thức logic bên phải.

- Nếu gặp các phép phủ định, thường sử dụng luật phủ định của phủ định, luật De Morgan để biến đổi biểu thức. Nếu gặp phép kéo theo, hoặc phép kéo theo hai chiều thì sử dụng luật kéo theo và luật tương đương. Sử dụng các luật giao hoán, kết hợp, phân phối để thay thế biểu thức logic. Sử dụng các luật trung hòa, thống trị, lũy đẳng để thu gọn biểu thức.

Hướng dẫn:

$\neg(\neg p \wedge q) \wedge (p \vee q) \equiv (\neg(\neg p) \vee \neg q) \wedge (p \vee q)$ (Luật De Morgan)

$\equiv (p \vee \neg q) \wedge (p \vee q)$ (Luật phủ định của phủ định)

$\equiv p \vee (\neg q \wedge q)$ (Luật phân phối)

$\equiv p \vee (q \wedge \neg q)$ (Luật giao hoán với phép $\wedge$)

$\equiv p \vee F$ (Luật phần tử bù)

$\equiv p$ (Luật trung hòa)

Ví dụ 3.29

Chứng minh rằng:

$$(p \to r) \vee (q \to r) \equiv (p \wedge q) \to r$$

Hướng dẫn:

$(p \to r) \vee (q \to r) \equiv (\neg p \vee r) \vee (\neg q \vee r)$ (Luật kéo theo)

$\equiv \neg p \vee \neg q \vee r \vee r$ (Luật giao hoán, luật kết hợp)

$\equiv (\neg p \vee \neg q) \vee r$ (Luật lũy đẳng)

$\equiv \neg(p \wedge q) \vee r$ (Luật De Morgan)

$\equiv (p \wedge q) \to r$ (Luật kéo theo)

Ví dụ 3.30

Chứng minh rằng:

a. $p \vee (p \wedge q) \equiv p$ b. $p \wedge (p \vee q) \equiv p$

(Kết quả của Ví dụ 3.24 này còn được gọi với tên là luật hấp thụ)

Hướng dẫn:

a. $p \vee (p \wedge q) \equiv (p \wedge T) \vee (p \wedge q)$ (Luật trung hòa, thay thế p bởi $p \wedge T$)

$\equiv p \wedge (T \vee q)$ (Luật phân phối)

$\equiv p \wedge T$ (Luật thống trị)

$\equiv p$ (Luật trung hòa)

Do đó $p \vee (p \wedge q) \equiv p$

b. $p \wedge (p \vee q) \equiv (p \vee F) \wedge (p \vee q)$ (Luật trung hòa, thay thế p bởi $p \vee F$)

$\equiv p \vee (F \wedge q)$ (Luật phân phối)

$\equiv p \vee F$ (Luật thống trị)

$\equiv p$ (Luật trung hòa)

Do đó $p \wedge (p \vee q) \equiv p$.

Ví dụ 3.31

Chứng minh rằng:

a. $p \to q \equiv (\neg q \to \neg p)$

Hướng dẫn:

$p \to q \equiv \neg p \vee q$ (Luật kéo theo)

$\equiv q \vee \neg p$ (Luật giao hoán)

$\equiv \neg(\neg q) \vee \neg p$ (Luật phủ định của phủ định)

$\equiv (\neg q \to \neg p)$ (Luật kéo theo)

Do đó, $p \to q \equiv (\neg q \to \neg p)$

b. $(p \wedge \neg q) \to (p \oplus r) \equiv (\neg p \vee q \vee \neg r)$

Ý tưởng:

Sử dụng công thức $p \oplus r \equiv (p \vee r) \wedge \neg(p \wedge r)$

Biến đổi vế trái về vế phải.

Hướng dẫn:

$(p \wedge \neg q) \rightarrow (p \oplus r)$

$\equiv (p \wedge \neg q) \rightarrow ((p \vee r) \wedge \neg(p \wedge r))$	(Sử dụng công thức XOR)
$\equiv \neg(p \wedge \neg q) \vee ((p \vee r) \wedge \neg(p \wedge r))$	(Luật kéo theo)
$\equiv (\neg p \vee \neg\neg q) \vee ((p \vee r) \wedge \neg(p \wedge r))$	(Luật De Morgan)
$\equiv (\neg p \vee q) \vee ((p \vee r) \wedge \neg(p \wedge r))$	(Luật phủ định của phủ định)
$\equiv (q \vee \neg p) \vee ((p \vee r) \wedge \neg(p \wedge r))$	(Luật giao hoán với phép ∨)
$\equiv q \vee (\neg p \vee ((p \vee r) \wedge \neg(p \wedge r))$	(Luật kết hợp với phép ∨)
$\equiv q \vee (\neg p \vee (p \vee r)) \wedge (\neg p \vee \neg(p \wedge r))$	(Luật phân phối)
$\equiv q \vee ((\neg p \vee p) \vee r) \wedge (\neg p \vee \neg(p \wedge r))$	(Luật kết hợp)
$\equiv q \vee (T \vee r) \wedge (\neg p \vee \neg(p \wedge r))$	(Luật phần tử bù)
$\equiv q \vee (T \wedge (\neg p \vee \neg(p \wedge r))$	(Luật thống trị)
$\equiv q \vee (\neg p \vee \neg(p \wedge r))$	(Luật trung hòa)
$\equiv q \vee (\neg p \vee (\neg p \vee \neg r))$	(Luật De Morgan)
$\equiv q \vee ((\neg p \vee \neg p) \vee \neg r))$	(Luật kết hợp)
$\equiv q \vee (\neg p \vee \neg r))$	(Luật lũy đẳng)
$\equiv \neg p \vee q \vee \neg r$	(Luật kết hợp)

(Đpcm)

Ví dụ 3.32

a. Viết lại các phát biểu sau đây thành biểu thức logic

"Nếu bạn chưa đủ 18 tuổi hoặc nồng độ cồn trong máu vượt quá 80^0 thì bạn không được lái xe máy".

Hướng dẫn:

Đặt các biến mệnh đề p, q, r như sau:

p ="Bạn chưa đủ 18 tuổi"

q = "Nồng độ cồn trong máu vượt quá 80^0"

r = "Bạn không được lái xe máy"

Biểu thức logic của phát biểu trên là $(p \wedge q) \rightarrow r$

b. Chứng minh biểu thức logic sau đây

$(p \wedge (p \rightarrow q)) \rightarrow q$ là hằng đúng

Chứng minh:

Hướng dẫn:

Có thể chứng minh bằng 2 cách;

Cách 1:

$(p \wedge (p \rightarrow q)) \rightarrow q \equiv (p \wedge (\neg p \vee q)) \rightarrow q$ (Luật kéo theo)

$\equiv ((p \wedge \neg p) \vee (p \wedge q)) \rightarrow q$ (Luật phân phối)

$\equiv (F \vee (p \wedge q)) \rightarrow q$ (Luật phần tử bù)

$\equiv (p \wedge q) \rightarrow q$ (Luật trung hòa)

$\equiv \neg(p \wedge q) \vee q$ (Luật kéo theo)

$\equiv (\neg p \vee \neg q) \vee q$ (Luật De Morgan)

$\equiv \neg p \vee (\neg q \vee q)$ (Luật kết hợp)

$\equiv \neg p \vee T$ (Luật phần tử bù)

$\equiv T$ (Luật thống trị)

Do đó $(p \wedge (p \rightarrow q)) \rightarrow q$ là một hằng đúng.

Cách 2:

$(p \wedge (p \rightarrow q)) \rightarrow q \equiv (p \wedge (p \rightarrow q)) \vee q$ (Luật kéo theo)

$\equiv(\neg p \vee \neg(p \rightarrow q)) \vee q$ (Luật De Morgan)

$\equiv (\neg p \vee q) \vee \neg(p \rightarrow q)$ (Luật kết hợp)

$\equiv (p \rightarrow q) \vee \neg(p \rightarrow q)$ (Luật De Morgan)

$\equiv E \vee \neg E$ (Với E = $p \rightarrow q$)

$\equiv T$ (Luật phần tử bù)

Do đó $(p \wedge (p \rightarrow q)) \rightarrow q$ là một hằng đúng.

Ví dụ 3.33

Chứng minh rằng:

a. $p \rightarrow (p \vee q)$ là một hằng đúng.

b. $(p \wedge q) \rightarrow p$ là một hằng đúng.

Hướng dẫn:

a. $p \rightarrow (p \vee q) \equiv \neg p \vee (p \vee q)$ (Luật kéo theo)

$\equiv (\neg p \vee p) \vee q$ (Luật kết hợp)

$\equiv T \vee q$ (Luật phần tử bù)

$\equiv T$ (Luật thống trị)

Do đó, $p \rightarrow (p \vee q)$ là một hằng đúng.

b. $(p \wedge q) \rightarrow p \equiv \neg(p \wedge q) \vee p$ (Luật kéo theo)

$\equiv (\neg p \vee \neg q) \vee p$ (Luật De Morgan)

$\equiv (p \vee \neg p) \vee \neg q$ (Luật kết hợp)

$\equiv T \vee \neg q$ (Luật phần tử bù)

$\equiv T$ (Luật thống trị)

Do đó, $(p \wedge q) \rightarrow p$ là một hằng đúng.

Lưu ý:

- Đơn giản hóa biểu thức là việc làm rất hữu ích trong việc xây dựng tính logic của các chương trình và trong việc thiết kế mạch logic kỹ thuật số.

- Các luật logic có thể được sử dụng để chứng minh tính tương đương logic của hai biểu thức logic, nhưng chúng không thể sử dụng để chứng minh hai biểu thức không tương đương logic. Lúc này vẫn phải sử dụng bảng giá trị chân lý để chỉ ra sự tương đương logic của các biểu thức, mặc dù công việc này mất nhiều thời gian, trong trường hợp có nhiều biến mệnh đề.

3.1.4. Các quy tắc suy diễn

3.1.4.1. Định nghĩa

Suy luận dựa trên nền tảng của các phép toán logic mệnh đề. Từ các phán đoán, giả định đưa đến các chứng minh để chấp nhận hay bác bỏ một vấn đề nào đó. Để chứng minh một vấn đề nào đó, người ta thường phải xác định các giả thiết ban đầu và các kết luận. Quá trình đi từ giả thiết đến kết luận được gọi là quá trình chứng minh, cách thức để thực thi quá trình chứng minh được gọi là phương pháp chứng minh.

Suy luận gồm có hai thành phần là giả thiết (gọi là các tiền đề) và kết luận. Tiền đề là những tri thức đã biết, hoặc được thừa nhận, là cơ sở cho suy luận, còn kết luận là tri thức được rút ra.

Ví dụ 3.34

Cho suy luận sau đây:

"Mọi kim loại đều dẫn điện

Đồng là kim loại

Do đó, đồng dẫn điện".

Xác định giả thiết và kết luận của suy luận.

Hướng dẫn:

Trong suy luận này, có hai giả thiết: "*Mọi kim loại đều dẫn điện*" và *"Đồng là kim loại"*.

Kết luận được đưa ra là "*Đồng dẫn điện*".

Ví dụ 3.35

Xác định giả thiết (tiền đề) và kết luận của suy luận sau đây:

"Tất cả các số chẵn đều chia hết cho 2;

64 là số chẵn

Vậy 64 chia hết cho 2".

Hướng dẫn:

Giả thiết (tiền đề) của suy luận:

Tiền đề 1:*"Tất cả các số chẵn đều chia hết cho 2"*

Tiền đề 2: *"64 là số chẵn"*

Kết luận: *"64 chia hết cho 2"*.

Các phương pháp chứng minh không chỉ được áp dụng trong lĩnh vực toán học, mà còn được áp dụng nhiều trong Tin học. Chẳng hạn, kiểm tra tính đúng đắn của chương trình, xây dựng các luật suy diễn trong trong trí tuệ nhân tạo.

Định nghĩa 3.10

Trong các chứng minh toán học, xuất phát từ những khẳng định đúng p, q, r…(gọi là các tiền đề), ta áp dụng các quy tắc suy diễn để suy ra chân lý của một mệnh đề h (kết luận)

$$\begin{array}{c} p \\ q \\ r \\ \underline{\ldots} \\ \therefore h \end{array}$$

Kiểm tra tính đúng đắn của một suy luận

Bước 1: Xác định các tiền đề và kết luận của suy luận (Viết dưới dạng ký hiệu)

Bước 2: Xây dựng bảng giá trị chân lý của tất cả các tiền đề và kết luận.

Bước 3: Một dòng của bảng giá trị chân lý trong đó tất cả các tiền đề đều đúng gọi là dòng tiêu chí **(critical row)**. Nếu có 1 dòng tiêu chí trong đó kết luận sai, thì có thể suy luận đã cho có tiền đề đúng và kết luận sai, do đó suy luận không hợp lệ. Nếu kết luận tất cả các dòng tiêu chí đúng, thì suy luận đó hợp lệ.

Ví dụ 3.36

Xác định suy luận sau đây đúng hay sai, bằng cách xây dựng bảng giá trị chân lý, trong đó chứa các cột tiêu đề và cột kết luận. Khi điền các giá trị vào bảng, chỉ cần xác định giá trị của cột kết luận ở các dòng tiêu chí.

$$\begin{array}{c} p \to q \vee \neg r \\ \underline{q \to p \wedge r} \\ \therefore p \to r \end{array}$$

Hướng dẫn:

Lập bảng giá trị chân lý

p	q	r	$\neg r$	$q \vee \neg r$	$p \wedge r$	$p \to q \vee \neg r$	$q \to p \wedge r$	$\boldsymbol{p \to r}$
T	T	T	F	T	T	T	T	T
T	T	F	T	T	F	T	F	
T	F	T	F	F	T	F	T	
T	F	F	T	T	F	T	T	F
F	T	T	F	T	F	T	F	
F	T	F	T	T	F	T	F	
F	F	T	F	F	F	T	T	T
F	F	F	T	T	F	T	T	T

Khi lập bảng giá trị chân lý của các tiền đề và kết luận, ta chỉ quan tâm đến các dòng mà giá trị của các tiền đề đều đúng. Lúc đó, kiểm tra giá trị của kết luận tại các dòng đó.

Trong Ví dụ trên, dòng bốn có tiền đề đúng (T), kết luận sai. Do đó, suy luận không hợp lệ.

3.1.4.2. Các luật suy diễn

Tổng quát hóa (Generalization) - (còn được gọi là luật cộng)
$$\frac{p}{\therefore p \vee q}$$ $$\frac{q}{\therefore p \vee q}$$ **Cơ sở toán học** $$p \to (p \vee q)$$ $$q \to (p \vee q)$$

Chứng minh tính đúng đắn của quy tắc:

p	q	$p \vee q$
T	T	T
T	F	T
F	T	
F	F	

Dòng tiêu chí, tiền đề đúng, kết luận đúng. Do đó suy luận đúng.

Ví dụ 3.37

An là sinh viên ngành CNTT (Tiền đề)

∴An là sinh viên ngành CNTT hoặc An là sinh viên ngành Kinh tế (Kết luận)

Chuyên biệt hóa (Specialization) – (còn được gọi là luật rút gọn)

$$\frac{p \wedge q}{\therefore p}$$

$$\frac{p \wedge q}{\therefore q}$$

Cơ sở toán học

$$p \wedge q \rightarrow p$$

$$p \wedge q \rightarrow q$$

Chứng minh tính đúng đắn của quy tắc:

p	q	$p \wedge q$	P	q
T	T	T	T	T
T	F	F		
F	T	F		
F	F	F		

Dòng tiêu chí, tiền đề đúng, kết luận đúng. Do đó suy luận đúng.

Ví dụ 3.38

Bình thích học lập trình và Bình thích Toán học (Tiền đề)

∴ Bình thích học lập trình (Kết luận)

Tam đoạn luận
Suy luận chứa hai tiền đề (tiền đề thứ nhất gọi là tiền đề chính, tiền đề thứ hai gọi là tiền đề phụ) và một kết luận được gọi là tam đoạn luận.

Modus Ponens – Tam đoạn luận khẳng định

$$\frac{\begin{array}{c} p \rightarrow q \\ p \end{array}}{\therefore \boldsymbol{q}}$$

Cơ sở toán học:

$$((p \rightarrow q) \wedge p) \rightarrow q$$

Để chứng minh tính đúng đắn của Modus Ponens, ta lập bảng giá trị chân lý sau đây:

p	q	$p \rightarrow q$	p	q
T	T	T	T	T
T	F	F	T	
F	T	T	F	
F	F	T	F	

Dòng tiêu chí, tiêu đề và kết luận đều đúng. Do đó, suy luận đúng.

Ví dụ 3.39

Nếu tổng các chữ số của 371.487 chia hết cho 3 thì 371.487 chia hết cho 3

Tổng các chữ số của 371.487 chia hết cho 3

∴ 371.487 chia hết cho 3

Modus Tollens – Tam đoạn luận phủ định

$$\frac{\begin{array}{c} p \rightarrow q \\ \neg q \end{array}}{\therefore \neg p}$$

Cơ sở toán học của phương pháp này:

$$((p \rightarrow q) \wedge \neg q) \rightarrow \neg p$$

Chứng minh tính đúng đắn của tam đoạn luận phủ định – quy tắc Modus Tollens:

p	q	$p \rightarrow q$	$\neg q$	$\neg p$
T	T	T	F	
T	F	F	T	
F	T	T	F	
F	F	T	T	T

Dòng tiêu chí, tiêu đề và kết luận đều đúng. Do đó, suy luận đúng.

Ví dụ 3.40

Nếu 870.232 chia hết cho 6 thì 870.232 chia hết cho 3

870.232 không chia hết cho 3

∴ 870.232 không chia hết cho 6

Tam đoạn luận rời (Quy tắc loại trừ)
$$\begin{array}{c} p \vee q \\ \underline{\neg p} \\ \therefore q \end{array}$$ $$\begin{array}{c} p \vee q \\ \underline{\neg q} \\ \therefore p \end{array}$$
Cơ sở toán học $$((p \vee q) \wedge \neg q) \to p$$ $$((p \vee q) \wedge \neg p) \to q$$

Chứng minh tính đúng đắn của quy tắc:

p	q	$p \vee q$	$\neg q$	p
T	T	T	F	
T	F	T	T	T
F	T	T	F	
F	F	F	T	

Chỉ quan tâm đến dòng chứa các tiền đề nhận giá trị T, giá trị tương ứng của kết luận cũng nhận giá trị T (hình trên). Do đó suy luận hợp lý.

Ví dụ 3.41

Giả sử cho số x thỏa mãn x – 3 = 0 hoặc x + 2 = 0

Nếu biết thêm x là số không âm, tức là x+ 2 ≠0

Do đó, x -3 = 0

Viết dưới dạng biểu thức như sau:

$(x - 3 = 0) \vee (x - 2) = 0$ (Tiền đề)

$\neg((x - 2) = 0)$ (Tiền đề)

$\therefore (x - 3 = 0)$ (Kết luận)

Ví dụ 3.42

Cường thích đá bóng hoặc Cường thích xem bóng đá (Tiền đề)

Cường không thích xem bóng đá (Tiền đề)

∴ Cường thích đá bóng (Kết luận)

Tam đoạn luận giả định

$$\begin{array}{c} p \rightarrow q \\ \underline{q \rightarrow r} \\ \therefore p \rightarrow r \end{array}$$

Cơ sở toán học

$$((p \rightarrow q) \land (q \rightarrow r)) \rightarrow (p \rightarrow r)$$

Chứng minh tính đúng đắn của quy tắc:

p	q	r	$p \rightarrow q$	$q \rightarrow r$	$p \rightarrow r$
T	T	T	T	T	T
T	T	F	T	F	
T	F	T	F	T	
T	F	F	F	T	
F	T	T	T	T	T
F	T	F	T	F	
F	F	T	T	T	T
F	F	F	T	T	T

Ví dụ 3.43

Nếu 18.486 chia hết cho 18 thì chia hết cho 9.

Nếu 18.486 chia hết cho 9 thì tổng các chữ số của 18.486 chia hết cho 9.

∴ Nếu 18.486 chia hết cho 18 thì tổng các chữ số của 18.486 chia hết cho 9.

Chứng minh bằng phân chia trường hợp

$$\begin{array}{c} p \lor q \\ p \rightarrow r \\ \underline{q \rightarrow r} \\ \therefore r \end{array}$$

Cơ sở toán học

$$((p \lor q) \land (p \rightarrow r) \land (q \rightarrow r)) \rightarrow r$$

Chứng minh tính đúng đắn của quy tắc:

p	q	r	$p \vee q$	$p \to r$	$q \to r$	r
T	T	T	T	T	T	T
T	T	F	T	F	F	
T	F	T	T	T	T	T
T	F	F	T	F	T	
F	T	T	T	T	T	T
F	T	F	T	T	F	
F	F	T	F	T	T	T
F	F	F	F	T	T	T

Ví dụ 3.44

x là số dương hoặc x là số âm.

Nếu x là số dương, thì $x^2 > 0$.

Nếu x là số âm, thì $x^2 > 0$.

$\therefore x^2 > 0$.

Quy tắc mâu thuẫn

(Được dựa trên nguyên tắc: *"Nếu một giả định dẫn đến mâu thuẫn, thì giả định đó phải sai"*)

p là một mệnh đề cần kiểm tra giá trị chân lý. Nếu có thể chỉ ra rằng giả sử p là sai, dẫn đến mâu thuẫn, thì có thể kết luận p đúng.

$\neg p \to c$ với c là một mâu thuẫn.

$\therefore p$

Ví dụ 3.45

Nhà logic học **Raymond Smullyan** (Sinh năm 1919) đưa ra một bài toán như sau:

Raymond Smullyan

Trên một hòn đảo có hai loại hiệp sĩ: Hiệp sĩ luôn nói sự thật và nô lệ của họ, những kẻ luôn nói dối. Một khách du lịch đến thăm hòn đảo và tiếp xúc với hai người bản địa A, B:

A: "B là một hiệp sĩ luôn nói thật"

B: "Tôi và A không cùng kiểu"

Hỏi A, B thuộc kiểu người nào (luôn nói sự thật hay luôn nói dối).

Hướng dẫn:

Giả sử A là hiệp sĩ luôn nói thật.

Những gì A nói là đúng. (Theo định nghĩa của hiệp sĩ)

B cũng là một hiệp sĩ luôn nói thật. (Theo lời A nói)

Những gì B nói là đúng. (Theo định nghĩa của hiệp sĩ)

A và B thuộc hai kiểu người đối lập. (Theo lời B nói)

Từ đây xuất hiện mâu thuẫn, A và B cùng là hiệp sĩ luôn nói thật, khác với lời B nói (A, B không cùng kiểu hiệp sĩ).

Vậy giả sử sai, theo quy tắc mâu thuẫn.

A không phải hiệp sĩ luôn nói thật.

A là nô lệ, kẻ luôn nói dối (Bằng cách loại trừ: tất cả cư dân của hòn đảo, chỉ thuộc vào một trong 2 kiểu: hiệp sĩ luôn nói thật và nô lệ luôn nói dối, A không phải hiệp sĩ luôn nói thật, do vậy A là nô lệ luôn nói dối).

Những gì A nói không đúng (Theo định nghĩa của nô lệ)

B không phải hiệp sĩ luôn nói thật

B là nô lệ luôn nói dối

Vậy A, B cùng là những nô lệ luôn nói dối.

Bảng 3.7: Tổng hợp các quy tắc suy diễn

Tên luật	Quy tắc
Tổng quát hóa (Generalization) **(Quy tắc cộng)**	$\dfrac{p}{\therefore p \vee q}$ $\dfrac{p \wedge q}{\therefore q}$
Chuyên biệt hóa (Specialization) **(Quy tắc rút gọn)**	$\dfrac{p \wedge q}{\therefore p}$ $\dfrac{p \wedge q}{\therefore q}$
Modus Ponens **Quy tắc khẳng định**	$\begin{array}{c} p \to q \\ p \\ \hline \therefore \boldsymbol{q} \end{array}$

Modus Tollens **Quy tắc phủ định**	$\begin{array}{c} p \to q \\ \neg q \\ \hline \therefore \neg p \end{array}$
Tam đoạn luận rời **(Quy tắc loại trừ)**	$\begin{array}{c} p \vee q \\ \neg p \\ \hline \therefore q \end{array}$ $\begin{array}{c} p \vee q \\ \neg q \\ \hline \therefore p \end{array}$
Tam đoạn luận giả định	$\begin{array}{c} p \to q \\ q \to r \\ \hline \therefore p \to r \end{array}$
Quy tắc mẫu thuẫn	$\neg p \to c$ với c là một mâu thuẫn $\therefore p$

Ví dụ 3.46

Bạn đang chuẩn bị đi học vào buổi sáng và phát hiện ra rằng bạn đã để quên kính ở đâu đó.

Các phát biểu sau đây là đúng:

Nếu tôi đọc báo trong bếp, thì kính của tôi ở trên bàn bếp

Nếu kính của tôi ở bàn bếp thì tôi đã nhìn thấy vào bữa ăn sáng

Tôi đã không nhìn thấy kính của mình tại bữa ăn sáng

Tôi đã đọc báo ở phòng khách, hoặc tôi đã đọc báo ở bếp

Nếu tôi đọc báo ở phòng khách, thì kính của tôi ở trên mặt bàn phòng khách.

Vậy kính của tôi đã ở đâu?

Hướng dẫn:

Thiết lập các biến mệnh đề trong các phát biểu như sau:

p = *"Tôi đọc báo trong bếp"*

q = *"Kính của tôi ở trên bàn ăn"*

r = *"Tôi nhìn thấy kính vào bữa ăn sáng"*

t = *"Tôi đọc báo ở phòng khánh"*

s = *"Kính của tôi ở trên mặt bàn phòng khách"*

Từ giả thiết của đề bài, ta có các biểu thức sau đây:

Phát biểu	Biểu thức	
Nếu tôi đọc báo trong bếp, thì kính của tôi ở trên bàn bếp	$p \rightarrow q$	*(a)*
Nếu kính của tôi ở bàn bếp thì tôi đã nhìn thấy vào bữa ăn sáng	$q \rightarrow r$	*(b)*
Tôi đã không nhìn thấy kính của mình tại bữa ăn sáng	$\neg r$	*(c)*
Tôi đã đọc báo ở phòng khách, hoặc tôi đã đọc báo ở bếp	$p \vee t$	*(d)*
Nếu tôi đọc báo ở phòng khách, thì kính của tôi ở trên mặt bàn phòng khách.	$t \rightarrow s$	*(e)*

Sau đây là 1 chuỗi các bước bạn có thể sử dụng để đạt được câu trả lời, sử dụng các quy tắc cho phép rút ra các kết luận của từng bước:

Bước	Tiền đề và Kết luận	Quy tắc sử dụng
1	$p \rightarrow q$ $q \rightarrow r$ $\therefore p \rightarrow r$	(a) (b) *Tam đoạn luận giả định*
2	$p \rightarrow r$ $\neg r$ $\therefore \neg p$	Kết luận của bước 1 (c) Modus Tollens
3	$p \vee t$ $\neg p$ $\therefore t$	(d) Kết luận của bước 2 *Tam đoạn luận rời*
4	$t \rightarrow s$ t $\therefore s$	(e) Kết luận của bước 3 Modus Ponens

Kết luận cuối cùng: *"Kính đang ở mặt bàn phòng khách"*

Ví dụ 3.47

(Tham khảo Bài tập trang 19 của Giáo trình Toán rời rạc, GS.TS. Nguyễn Hữu Anh, NXB Lao động [1])

Cho các suy luận sau đây:

Nếu nghệ sĩ Trương Ba không trình diễn hay số vé bán ra ít hơn 50 vé thì đêm diễn sẽ bị hủy bỏ và ông bầu sẽ rất buồn

Nếu đêm diễn bị hủy bỏ thì tiền vé phải trả lại cho người xem

Nhưng tiền vé đã không trả lại cho người xem

Vậy nghệ sĩ Trương Ba đã trình diễn.

Kiểm tra tính đúng đắn của suy luận trên.

Hướng dẫn:

Thiết lập các biến mệnh đề sau đây:

p = *"Nghệ sĩ Trương Ba đã trình diễn"*

q = *"Số vé bán ra ít hơn 50 vé"*

r = *"Đêm diễn bị hủy"*

t = *"Ông bầu rất buồn"*

s = *"Tiền vé phải trả lại cho người xem"*

Cần kiểm tra các suy luận sau đây:

Phát biểu	Biểu thức	
Nếu nghệ sĩ Trương Ba không trình diễn hay số vé bán ra ít hơn 50 vé thì đêm diễn sẽ bị hủy bỏ và ông bầu sẽ rất buồn	$(\neg p \vee q) \to (r \wedge t)$	*(a)*
Nếu đêm diễn bị hủy bỏ thì tiền vé phải trả lại cho người xem	$r \to s$	*(b)*
Nhưng tiền vé đã không trả lại cho người xem	$\neg s$	*(c)*
Kết luận: Vậy nghệ sĩ Trương Ba đã trình diễn	$\therefore p$	*(d)*

Suy luận cần chứng minh là:

Bước	Tiền đề và Kết luận	Quy tắc sử dụng
1	$(\neg p \vee q) \to (r \wedge t)$ $r \wedge t \to r$ $r \to s$ $\therefore (\neg p \vee q) \to s$	Tiền đề (a) *Chuyên biệt hóa* *Tiền đề (b)* *Tam đoạn luận giả định mở rộng*
2	$(\neg p \vee q) \to s$ $\neg s$ $\therefore \neg(\neg p \vee q) \equiv p \wedge \neg q$	Kết luận của bước 1 Tiền đề (c) Modus Tollens và luật De Morgan
3	$p \wedge \neg q$ Có $p \wedge \neg q \to p$ $\therefore p$	Kết luận của bước 2 *Chuyên biệt hóa* Modus Ponens

Suy luận trên đúng.

Ví dụ 3.48

Để chỉ ra suy luận đúng, chúng ta sẽ sử dụng các luật suy diễn để từ các tiền đề đi đến kết luận cuối cùng. Trong trường hợp để chỉ ra suy luận sai, chỉ cần đưa ra một phản ví dụ cụ thể.

a. Giả sử có các tiền đề sau đây

"Trời không nắng và trời lạnh"

"Chúng ta bơi chỉ khi trời nắng"

"Nếu chúng ta không bơi thì chúng ta sẽ đi bằng ca nô"

"Nếu chúng ta đi ca nô, thì chúng ta sẽ về nhà sớm".

Sử dụng các quy tắc suy diễn, chứng minh từ các tiền đề trên sẽ dẫn tới kết luận:*"Chúng ta sẽ về nhà sớm".*

Hướng dẫn: Thiết lập các biến mệnh đề sau:

p = *"Trời nắng"*

q = *"Trời lạnh"*

r = *"Chúng ta sẽ bơi"*

t = *"Chúng ta đi bằng ca nô"*

k = *"Chúng ta về nhà sớm".*

Các tiền đề và kết luận được biểu diễn qua biểu thức logic

Phát biểu	**Biểu thức**	
"Trời không nắng và trời lạnh"	$\neg p \land q$	*(a)*
"Chúng ta bơi chỉ khi trời nắng"	$r \to p$	*(b)*
"Nếu chúng ta không bơi thì chúng ta sẽ đi bằng ca nô"	$\neg r \to t$	*(c)*
"Nếu chúng ta đi ca nô, thì chúng ta sẽ về nhà sớm"	$t \to k$	*(d)*
Kết luận: "Chúng ta về nhà sớm"	$\therefore k$	*(e)*

Trình tự các bước để từ tiền đề đi đến kết luận

Bước	**Tiền đề và Kết luận**	**Quy tắc sử dụng**
1	$\neg p \land q$ $\therefore \neg p$	Tiền đề (a) *Đơn giản hóa*
2	$r \to p$	Tiền đề (b)

	$\neg p$ $\therefore \neg r$	Kết luận của bước 1 Modus Tollens
3	$\neg r \rightarrow t$ $\neg r$ $\therefore t$	Tiền đề (c) Kết luận của bước 2 Modus Ponens
4	$t \rightarrow k$ t $\therefore k$	Tiền đề (d) Kết quả của bước 3 Modus Ponens

Kết luận: Suy luận trên đúng.

b. Suy luận sau đây đúng hay sai?

"Nếu bò sữa nhiều và sữa tốt thì sẽ được cho ăn thêm nhiều cỏ non. Bò ăn thêm nhiều cỏ non thì sẽ mập lên. Nhưng thực tế bò không mập lên".

Kết luận: *"Bò không cho nhiều sữa hoặc không cho sữa tốt".*

Hướng dẫn:

Thiết lập các biến mệnh đề sau đây:

p = *"Bò nhiều sữa"*

q = *"Bò cho sữa tốt"*

t = *"Bò được ăn thêm nhiều cỏ non"*

u = *"Bò mập lên"*

Các tiền đề và kết luận của suy luận được biểu diễn thông qua các biểu thức logic sau đây:

Phát biểu	**Biểu thức logic**	
Nếu bò sữa nhiều và sữa tốt thì sẽ được cho ăn thêm nhiều cỏ non	$(p \wedge q) \rightarrow t$	Tiền đề (a)
Bò ăn thêm nhiều cỏ non thì sẽ mập lên	$t \rightarrow u$	Tiền đề (b)
Nhưng thực tế bò không mập lên.	$\neg u$	Tiền đề (c)
Kết luận bò không cho nhiều sữa hoặc không cho sữa tốt.	$\neg p \vee \neg q$	Kết luận

Trình tự các bước để kiểm tra kết luận đúng hay sai như sau:

Bước	Tiền đề và Kết luận	Quy tắc sử dụng
1	$(p \vee q) \to t$ $t \to u$ $\therefore (p \vee q) \to u$	Tiền đề (a) Tiền đề (b) *Tam đoạn luận giả định*
2	$(p \vee q) \to u$ $\neg u$ $\therefore \neg(p \vee q)$	Kết luận của bước 1 Tiền đề (c) Modus Ponens
3	$\neg(p \vee q)$ $\therefore \neg p \vee \neg q$	Kết luận của bước 2 Luật De Morgan

Kết luận: Suy luận trên là đúng.

c. Suy luận sau đúng hay sai? Vì sao?

(Ví dụ được tham khảo từ Giáo trình Toán rời rạc của GS.TS. Nguyễn Hữu Anh, trang 25, NXB Lao động [1])

"Ông Minh đã khẳng định rằng nếu không được tăng lương thì ông sẽ nghỉ việc. Mặt khác nếu ông ta nghỉ việc và vợ ông ta bị mất việc thì phải bán xe. Biết rằng nếu vợ ông Minh hay đi làm trễ thì sẽ mất việc. Cuối cùng ông đã được tăng lương. Vậy suy ra nếu ông Minh không bán xe thì vợ ông không đi làm trễ".

Hướng dẫn:

Thiết lập các biến mệnh đề sau đây:

p = *"Ông Minh được tăng lương"*

q = *"Ông Minh nghỉ việc"*

t = *"Vợ ông Minh mất việc"*

r = *"Ông Minh bán xe"*

u = *"Vợ ông Minh hay đi làm trễ"*.

Tiền đề và kết luận của suy luận được biểu diễn thông qua các biểu thức logic sau đây:

Phát biểu	Biểu thức logic	
Ông Minh đã khẳng định rằng nếu không được tăng lương thì ông sẽ nghỉ việc	$(\neg p) \to q$	Tiền đề (a)
Mặt khác nếu ông ta nghỉ việc và vợ ông ta bị mất việc thì phải bán xe.	$q \wedge t \to r$	Tiền đề (b)

Biết rằng nếu vợ ông Minh hay đi làm trễ thì sẽ mất việc.	$u \to t$	Tiền đề (c)
Cuối cùng ông đã được tăng lương	p	Tiền đề (d)
Vậy suy ra nếu ông Minh không bán xe thì vợ ông không đi làm trễ.	$\neg r \to \neg u$	Kết luận

Ta đưa ra phản ví dụ, chứng tỏ các tiền đề đúng nhưng kết luận sai.

Kết luận sai khi $\neg r$ đúng và $\neg u$ sai. Do đó r sai và u đúng, tức là "*Ông Minh không bán xe*" và *"Vợ ông Minh hay đi làm trễ"*

Để tiền đề (c) $u \to t$ đúng khi u đúng thì t phải đúng

Để tiền đề (b) $q \wedge t \to r$ đúng khi r sai thì $q \wedge t$ phải sai. Do t đúng, nên q phải sai

Để tiền đề (a) $(\neg p) \to q$ và tiền đề (d) p đúng thì p phải đúng

Do đó ta có thể đưa ra 1 phản ví dụ (p = T, q = F, t = T, r = F, u = T) để cho các tiền đề nhận giá trị đúng, nhưng kết luận sai

Có thể kết luận suy luận trên không đúng.

Ví dụ 3.49

a. Kiểm tra suy luận sau:

$$\begin{array}{ll} p \to (q \to r) & (a) \\ p \vee s & (b) \\ t \to q & (c) \\ \neg s & (d) \\ \hline \multicolumn{2}{c}{\therefore \neg r \to \neg t} \end{array}$$

Hướng dẫn:

Sử dụng các quy tắc suy diễn, từ các tiền đề dẫn đến kết luận. Trình tự các bước suy luận như sau:

Bước	**Tiền đề và Kết luận**	**Quy tắc sử dụng**
1	$(p \vee s)$ $\neg s$ $\therefore p$	(b) Tiền đề (d) Tiền đề *Tam đoạn luận rời*
2	$p \to (q \to r)$ p $\therefore (q \to r)$	(a) Tiền đề Kết luận của bước 1 Modus Ponens

3	$t \to q$ $q \to r$ $\therefore t \to r$	(c) Tiền đề Kết luận của bước 2 Tam đoạn luận giả định

$t \to r \equiv \neg t \vee r \equiv \neg t \vee \neg\neg r \equiv \neg\neg r \vee \neg t \equiv \neg r \to \neg t$

Do đó suy luận đã cho đúng.

b. Chứng tỏ suy luận sau đây đúng

$$\begin{array}{ll} t \to u & (a) \\ r \to (s \wedge t) & (b) \\ (\neg p \vee q) \to r & (c) \\ \neg(s \vee u) & (d) \\ \hline \therefore p & \end{array}$$

Hướng dẫn:

Trình tự các bước để từ các tiền đề đi đến kết luận cuối cùng:

Bước	Tiền đề và Kết luận	Quy tắc sử dụng
1	$\neg(s \vee u)$ $\therefore \neg s \wedge \neg u$	Tiền đề (d) *Luật De Morgan*
2	$\neg s \wedge \neg u$ $\therefore \neg u$	Kết luận của bước 1 Quy tắc rút gọn
3	$t \to u$ $\neg u$ $\therefore \neg t$	Tiền đề (d) Kết luận của bước 2 Modus Tollens
4	$\neg u$ $\neg t$ $\therefore \neg u \wedge \neg t$	Kết quả của bước 2 Kết quả của bước 3 Phép toán nối liền
5	$\neg u \wedge \neg t$ $\therefore \neg(u \vee t)$	Kết quả của bước 4 Luật De Morgan
6	$r \to (s \wedge t)$ $\neg(u \vee t)$ $\therefore \neg r$	Tiền đề (b) Kết quả của bước 5 Modus Tollens
7	$(\neg p \vee q) \to r$	Tiền đề (c)

	$\neg r$ $\therefore \neg(\neg p \vee q)$	Kết quả của bước 6 Modus Tollens
8	$p \wedge \neg q$ $\therefore p$	Kết quả của bước 7 và De Morgan Quy tắc rút gọn

3.1.5. Các dạng chuẩn tắc

Định nghĩa 3.11
Dạng chuẩn tắc của một biểu thức logic là sự biểu diễn biểu thức về dạng đơn giản, chỉ bao gồm các phép toán ¬, ∧, ∨ của các biến mệnh đề.

Ví dụ 3.50

Một số ví dụ về dạng chuẩn tắc.

Hướng dẫn:

a. $E(p, q) = p \wedge q$

b. $F(p, q, r) = (p \wedge q) \vee \neg r$

c. $G(p, q, r) = p \vee \neg q \vee r$

3.1.5.1. Chuẩn tắc tuyển

Định nghĩa 3.12
Giả sử $p_1, p_1, p_3, \ldots, p_n$ là các biến mệnh đề. Một biểu thức logic $F(p_1, p_1, p_3, \ldots, p_n)$ theo các biến mệnh đề được gọi là hội cơ bản, nếu nó có dạng: $$F(p_1, p_1, p_3, \ldots, p_n) = q_1 \wedge q_2 \wedge q_3 \ldots \wedge q_n$$ Trong đó $q_i = p_i$ hoặc $q_i = \neg pi$, với mọi $i = \overline{1 \ldots n}$.

Ví dụ 3.51

Xác định các hội cơ bản theo ba biến mệnh đề p, q, r.

Hướng dẫn:

Với 3 biến mệnh đề, ta xác định được tám hội cơ bản sau đây:

$F_1(p, q, r) = (p \wedge q \wedge r)$

$F_2(p, q, r) = (p \wedge q \wedge \neg r)$

$F_3(p, q, r) = (p \wedge \neg q \wedge r)$

$F_4(p, q, r) = (p \wedge \neg q \wedge \neg r)$

$F_5(p, q, r) = (\neg p \wedge q \wedge r)$

$F_6(p, q, r) = (\neg p \wedge q \wedge \neg r)$

$F_7(p, q, r) = (\neg p \wedge \neg q \wedge r)$

$F_8(p, q, r) = (\neg p \wedge \neg q \wedge \neg r)$ là các hội cơ bản theo các biến p, q, r.

Định nghĩa 3.13

Biểu thức $E(p_1, p_1, p_3, \ldots, p_n)$ theo các biến mệnh đề $p_1, p_1, p_3, \ldots, p_n$ được gọi là chuẩn tắc tuyển, nếu E có dạng $E = E_1 \vee E_2 \vee E_3 \vee \ldots \vee E_m$, trong đó E_i là các hội cơ bản, $i = \overline{1 \ldots m}$

Ví dụ 3.52

- $E(p, q, r) = (p \wedge q \wedge \neg r) \vee (\neg p \wedge q \wedge r) \vee (p \wedge q \wedge r) \vee (\neg p \wedge q \wedge r) \vee (\neg p \wedge \neg q \wedge r)$ là một chuẩn tắc tuyển với ba biến mệnh đề p, q, r.

- $H(x, y) = (x \wedge y) \vee (\neg x \wedge y) \vee (x \wedge \neg y) \vee (\neg x \wedge \neg y)$ là một chuẩn tắc tuyển của hai biến x, y.

3.1.5.2. Chuẩn tắc hội.

Định nghĩa 3.14

Giả sử $p_1, p_1, p_3, \ldots, p_n$ là các biến mệnh đề.

Một biểu thức logic $F(p_1, p_1, p_3, \ldots, p_n)$ theo các biến mệnh đề được gọi là tuyển cơ bản, nếu nó có dạng:

$$F(p_1, p_1, p_3, \ldots, p_n) = q_1 \vee q_2 \vee q_3 \ldots \vee q_n$$

Trong đó $q_i = p_i$ hoặc $q_i = \neg pi$, với mọi $i = \overline{1 \ldots n}$.

Ví dụ 3.53

Xác định các tuyển cơ bản theo ba biến mệnh đề p, q, r.

Hướng dẫn:

Với 3 biến mệnh đề, ta xác định được tám tuyển cơ bản sau đây:

$F_1(p, q, r) = (p \vee q \vee r)$

$F_2(p, q, r) = (p \vee q \vee \neg r)$

$F_3(p, q, r) = (p \vee \neg q \vee r)$

$F_4(p, q, r) = (p \vee \neg q \vee \neg r)$

$F_5(p, q, r) = (\neg p \vee q \vee r)$

$F_6(p, q, r) = (\neg p \vee q \vee \neg r)$

$F_7(p, q, r) = (\neg p \vee \neg q \vee r)$

$F_8(p, q, r) = (\neg p \vee \neg q \vee \neg r)$ là các tuyển cơ bản theo các biến p, q, r.

Định nghĩa 3.15
Biểu thức E(p_1, p_1, p_3, …, p_n) theo các biến mệnh đề p_1, p_1, p_3, …, p_n được gọi là chuẩn tắc hội, nếu E có dạng E = $E_1 \wedge E_2 \wedge E_3 \wedge \ldots \wedge E_m$, trong đó E_i là các hội cơ bản, i = $\overline{1 \ldots m}$

Ví dụ 3.54

E(p, q, r) = $(p \vee q \vee r) \wedge (p \vee q \vee \neg r) \wedge (p \vee \neg q \vee r) \wedge (p \vee \neg q \vee \neg r) \wedge (\neg p \vee q \vee r) \wedge (\neg p \vee q \vee \neg r) \wedge (\neg p \vee \neg q \vee r) \wedge (\neg p \vee \neg q \vee \neg r)$ là chuẩn tắc hội theo 3 biến mệnh đề p, q, r.

3.1.5.3. Tìm chuẩn tắc hội hoặc chuẩn tắc tuyển của một biểu thức logic.

Tìm chuẩn tắc hội hoặc chuẩn tắc tuyển của một biểu thức logic

Input: Bảng giá trị chân lý

Output: Chuẩn tắc tuyển hoặc chuẩn tắc hội

Trình tự các bước để xác định dạng chuẩn tắc

Cho biểu thức E(p_1, p_1, p_3, …, p_n) theo các biến mệnh đề p_1, p_1, p_3, …, p_n

Bước 1: Xây dựng bảng giá trị chân lý cho biểu thức E

Bước 2: Xét các trường hợp xảy ra với bảng giá trị chân lý.

Trường hợp 2.1: Trên các dòng của bảng giá trị chân lý, số dòng T (True) ít hơn số dòng F (False) (Có thể nói E không phải hằng sai)

Bước 2.1.1. Tìm các hội của p_i và $\neg p_j$ có giá trị T theo từng dòng tương ứng với các dòng mà biểu thức E nhận giá trị T (p_i , $\neg p_j$ là giá trị của các biến mệnh đề p_1, p_1, p_3, …, p_n)

Bước 2.1.2. Lấy tuyển của các hội này ta thu được biểu thức E, chính là chuẩn tắc tuyển cần tìm.

Trường hợp 2.2: Trên các dòng của bảng giá trị chân lý, số dòng F (False) ít hơn số dòng T (True) (Có thể nói E không phải là hằng đúng)

Bước 2.2.1. Tìm các tuyển của p_i và $\neg p_j$ có giá trị F theo từng dòng tương ứng với các dòng mà biểu thức E nhận giá trị F (p_i , $\neg p_j$ là giá trị của các biến mệnh đề p_1, p_1, p_3, …, p_n)

Bước 2.2.2. Lấy hội của các tuyển này ta thu được biểu thức E, chính là chuẩn tắc hội cần tìm.

Trường hợp 2.3: Nếu số dòng T và số dòng F của biểu thức E bằng nhau, thì có thể xác định chuẩn tắc hội hoặc chuẩn tắc tuyển theo số dòng F hoặc số dòng T.

Ví dụ 3.55

Chuyển biểu thức sau sang chuẩn tắc hội hoặc chuẩn tắc tuyển.

$$(p \leftrightarrow q) \rightarrow (\neg p \wedge r)$$

Hướng dẫn:

a. Xây dựng bảng giá trị chân lý cho biểu thức E(p, q, r) = $(p \leftrightarrow q) \rightarrow (\neg p \wedge r)$

Bảng giá trị chân lý của biểu thức E có 8 dòng, trong đó có 3 dòng E nhận giá trị F và 5 dòng còn lại E nhận giá trị T. Chúng ta chỉ quan tâm đến 3 dòng E nhận giá trị F.

p	q	r	$p \leftrightarrow q$	$\neg p \wedge r$	$(p \leftrightarrow q) \rightarrow (\neg p \wedge r)$	**Tuyển cơ bản**
T	T	T	T	F	F	$\neg p \vee \neg q \vee \neg r$
T	T	F	T	F	F	$\neg p \vee \neg q \vee r$
T	F	T	F	F	T	
T	F	F	F	F	T	
F	T	T	F	T	T	
F	T	F	F	F	T	
F	F	T	T	T	T	
F	F	F	T	F	F	$p \vee q \vee r$

Tại các dòng này ta xác định các tuyển cơ bản của các biến p, q, r.

Do đó, theo thuật toán đã trình bày ở trên, biểu thức E có thể viết dưới dạng chuẩn tắc hội như sau:

E = $(\neg p \vee \neg q \vee \neg r) \wedge (\neg p \vee \neg q \vee r) \wedge (p \vee q \vee r)$

$\equiv (p \vee q \vee r) \wedge (\neg p \vee \neg q \vee r) \wedge (\neg p \vee \neg q \vee \neg r)$

Ví dụ 3.56

Tìm chuẩn tắc hội hoặc chuẩn tắc tuyển của biểu thức E(p, q) có bảng chân trị sau đây:

p	**q**	**E(p, q)**
T	T	T
T	F	F
F	T	F
F	F	T

Hướng dẫn:

p	q	E(p, q)	Hội cơ bản	Tuyển cơ bản
T	T	T	$p \land q$	
T	F	F		$\neg p \lor q$
F	T	F		$p \lor \neg q$
F	F	T	$\neg p \land \neg q$	

E(p, q) viết ở dạng chuẩn tắc tuyển:

E(p, q) = $(p \land q) \lor (\neg p \land \neg q)$

E(p, q) viết ở dạng chuẩn tắc hội:

E(p, q) = $(\neg p \lor q) \land (p \lor \neg q)$

Ví dụ 3.57

Xác định dạng chuẩn tắc của biểu thức E(p, q, r) theo 3 biến mệnh đề p, q, r, được cho bởi bảng giá trị chân lý sau đây:

p	q	r	E(p, q, r)
T	T	T	T
T	T	F	F
T	F	T	F
T	F	F	T
F	T	T	F
F	T	F	F
F	F	T	T
F	F	F	F

Hướng dẫn:

p	q	r	E(p, q, r)	Hội cơ bản
T	T	T	T	$p \land q \land r$
T	T	F	F	
T	F	T	F	
T	F	F	T	$p \land \neg q \land \neg r$
F	T	T	F	
F	T	F	F	
F	F	T	T	$\neg p \land \neg q \land r$
F	F	F	F	

Do đó, E(p, q, r) được biểu diễn ở dạng chuẩn tắc tuyển như sau:

E(p, q, r) = $(p \wedge q \wedge r) \vee (p \wedge \neg q \wedge \neg r) \vee (\neg p \wedge \neg q \wedge r)$

Lưu ý:

Ngoài cách sử dụng bảng giá trị chân lý, trong một số trường hợp có thể sử dụng phép biến đổi tương đương, sử dụng các luật logic đã biết.

- Khử phép kéo theo, phép kéo theo 2 chiều bằng luật kéo theo và tương đương

Luật kéo theo: $p \rightarrow q \equiv \neg p \vee q$

Luật tương đương: $p \leftrightarrow q \equiv (p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$

- Khử phép phủ định bằng luật De Morgan

Luật De Morgan:

$\neg(p \vee q) \equiv \neg p \wedge \neg q$ $\quad\quad$ $\neg(p \wedge q) \equiv \neg p \vee \neg q$

- Kết hợp các luật khác để làm xuất hiện các hội cơ bản hoặc các tuyển cơ bản.

Ví dụ 3.58

Sử dụng các luật logic, xác định dạng chuẩn tắc của biểu thức sau đây:

E(p, q, r) = $(p \rightarrow q) \leftrightarrow (p \rightarrow r)$

Hướng dẫn:

E(p, q, r) = $(p \rightarrow q) \leftrightarrow (p \rightarrow r)$

Khử phép tương đương:

$\equiv ((p \rightarrow q) \rightarrow (p \rightarrow r)) \wedge \ ((p \rightarrow r) \rightarrow (p \rightarrow q))$

Khử phép kéo theo trong từng vế:

$\equiv (\neg(p \rightarrow q) \vee (p \rightarrow r)) \wedge \ (\neg(p \rightarrow r) \vee (p \rightarrow q))$

Tiếp tục khử phép kéo theo trong từng vế của biểu thức:

$\equiv (\neg(\neg p \vee q) \vee (\neg p \vee r)) \wedge \ (\neg(\neg p \vee r) \vee (\neg p \vee q))$

Sử dụng luật De Morgan để khử phép phủ định:

$\equiv ((p \wedge \neg q) \vee (\neg p \vee r)) \wedge \ ((p \wedge \neg r) \vee (\neg p \vee q))$

Sử dụng luật kết hợp:

$\equiv ((p \wedge \neg q) \vee \neg p) \vee r) \wedge \ ((p \wedge \neg r) \vee \neg p) \vee q)$

Sử dụng luật phân phối biến đổi biểu thức:

$\equiv ((p \vee \neg p) \wedge (\neg q \vee \neg p)) \vee r) \wedge \ ((p \vee \neg p) \wedge (r \vee \neg p)) \vee q)$

Sử dụng luật phần tử bù, thay thế $(p \vee \neg p)$ bởi T:

$\equiv (T \wedge (\neg q \vee \neg p)) \vee r) \wedge \ (T \wedge (r \vee \neg p)) \vee q)$

Sử dụng luật trung hòa:

$\equiv ((\neg q \vee \neg p) \vee r) \wedge \ ((r \vee \neg p) \vee q)$

Sử dụng luật kết hợp:

$\equiv (\neg q \vee \neg p \vee r) \wedge \ (r \vee \neg p \vee q) \equiv (\neg p \vee \neg q \vee r) \wedge \ (\neg p \vee q \vee r)$

Vậy E(p, q, r) = $(\neg p \vee \neg q \vee r) \wedge \ (\neg p \vee q \vee r)$ là dạng chuẩn tắc hội.

3.1.6. Logic vị từ

Nội dung của phần trước, chúng ta đã thảo luận về phân tích logic của các biểu thức đơn giản và biểu thức logic phức hợp của các mệnh đề, với các phép toán $\neg, \ \wedge, \ \vee, \rightarrow, \leftrightarrow$. Quá trình phân tích như vậy làm sáng tỏ nhiều khía cạnh lý luận của con người, nhưng nó không được sử dụng để xác định tính hợp lệ trong phần lớn các tình huống hàng ngày và Toán học. Chẳng hạn, xem xét phát biểu sau:

"Tất cả mọi người đều phải chết

Socrates là người

Socrates sẽ phải chết".

Về cảm nhận, phát biểu trên là đúng, tuy nhiên tính hợp lệ của nó không thể được xác định thông qua các logic mệnh đề đã đề cập ở phần trước đây. Để xác định được tính hợp lệ của phát biểu nêu trên, chúng ta cần tách mỗi phát biểu thành nhiều thành phần giống như cách chúng ta tách câu thành chủ ngữ và vị ngữ.

Logic vị từ là mở rộng của logic mệnh đề, cho phép mô tả thế giới với các đối tượng, các thuộc tính của đối tượng và các mối quan hệ giữa các đối tượng. Logic vị từ sử dụng các biến đối tượng để chỉ các đối tượng trong một miền đối tượng nào đó. Để mô tả các thuộc tính của đối tượng, các quan hệ giữa các đối tượng, trong logic vị từ, người ta đưa vào các vị từ. Ngoài các kết nối logic như trong logic mệnh đề, logic vị từ còn sử dụng các lượng từ.

3.1.6.1. Vị từ

Định nghĩa 3.16
Vị từ là một khẳng định p(x, y,…), trong đó x, y, v.v. là các biến thuộc tập hợp A, B, v.v. cho trước sao cho: - p(x, y,…) không phải mệnh đề - Nếu thay x, y, v.v. bằng các giá trị cụ thể thì p(x, y,…) là mệnh đề.

Định nghĩa 3.17
Cho các vị từ p(x), q(x) theo biến x ∈ A. Khi đó + Phủ định của p(x), ký hiệu là $\neg p(x)$ là một vị từ mà khi thay thế x bởi một phần tử cố định a ∈ A ta thu được mệnh đề $\neg p(a)$ + Các phép hội, tuyển, kéo theo, kéo theo hai chiều của hai vị từ p(x) và q(x), ký hiệu bởi $p(x) \wedge q(x)$, $p(x) \vee q(x)$, $p(x) \rightarrow q(x)$, $p(x) \leftrightarrow q(x)$ cũng là các vị từ theo biến x, mà khi thay x bởi phần tử cố định a ∈ A ta được các mệnh đề $p(a) \wedge q(a)$, $p(a) \vee q(a)$, $p(a) \rightarrow q(a)$, $p(a) \leftrightarrow q(a)$.

Ví dụ 3.60

a. Phát biểu *"n là số chẵn"* là một vị từ. Khi gán n với các giá trị cụ thể, ta có một mệnh đề có giá trị đúng hoặc sai. Chẳng hạn với n = 2, 4, 6, v.v. mệnh đề thu được có giá trị đúng. Với n = 1, 3, 5, v.v. mệnh đề thu được có giá trị sai.

Vị từ *"n là số chẵn"* có hai phần. Thành phần thứ nhất là biến x là chủ ngữ của câu, thành phần thứ hai *"số chẵn"* là vị ngữ của câu, cho biết tính chất của chủ ngữ.

Ký hiệu p(n) = *"n là số chẵn"*.

b. p(x) = *"n là số nguyên tố"* là một vị từ theo biến n ∈ N

Với các giá trị 2, 3, 5, 7, 11, 13, v.v. ta có các mệnh đề p(2), p(3), p(5), p(7), p(11), p(13), v.v. nhận giá trị đúng;

Với các giá trị 4, 6, 8, 9, 12, 14, 15, v.v. ta có các mệnh đề p(4), p(6), p(8), p(9), p(14), p(15), v.v. nhận giá trị sai.

c. Các phát biểu có liên quan đến các biến như kiểm tra giá trị của biến "x > 5", hay "x + y = 5" thường gặp trong các chương trình. Các phát biểu này có giá trị chân lý đúng hay sai tùy thuộc vào sự thay đổi giá trị của các biến x, y. Nói cách khác, vị từ có thể được xem là hàm mệnh đề có nhiều biến hoặc không có biến nào, có thể đúng hoặc sai tùy thuộc vào giá trị của các biến và lập luận của vị từ.

3.1.6.2. Lượng từ

Chuyển các phát biểu từ ngôn ngữ tự nhiên sang các biểu thức logic là nhiệm vụ quan trọng trong toán học, lập trình logic, trí tuệ nhân tạo, công nghệ phần mềm và nhiều ngành học khác. Trong phần logic mệnh đề, chúng ta đã đề cập đến vấn đề này, tuy nhiên trong các phát biểu đó, chúng ta cố tình không đề cập đến vị ngữ và định lượng. Trong thực tế, việc chuyển các phát biểu từ ngôn ngữ tự nhiên sang các biểu thức logic sẽ phức tạp hơn nhiều khi cần định lượng. Chúng ta sẽ cùng nhau xem xét các phát biểu sử dụng một bộ định lượng duy nhất và những phát biểu phức tạp có chứa nhiều định lượng, cố gắng biểu diễn chúng thành các biểu thức logic đơn giản và hữu ích.

Định nghĩa 3.18
Cho vị từ p(x), xét trên tập hợp A.   Lượng từ "*với mọi*" của p(x) được thể hiện: "*p(x) đúng với mọi giá trị x thuộc A*", ký hiệu $\forall x \in A, p(x)$ Lượng từ "*tồn tại*" của p(x) được thể hiện *"tồn tại x thuộc A sao cho p(x) đúng"*, ký hiệu $\exists x \in A, p(x)$

Phát biểu	**Đúng**	**Sai**
$\forall x\ P(x)$	P(x) đúng với mọi giá trị x	Có một giá trị x làm cho P(x) sai
$\exists x\ P(x)$	Có một giá trị x để P(x) đúng	P(x) sai với mọi giá trị của x

Lưu ý:

- Khi tất cả các phần tử của miền giá trị có thể liệt kê dưới dạng x1, x2, x3,…, xn, v.v. thì lượng từ $\forall x\ P(x)$ có thể được biểu diễn dưới dạng sau đây:

$$P(x1) \wedge P(x2) \wedge P(x3) \wedge \dots \wedge P(xn) \dots$$

- Tương tự, lượng từ $\exists x\ P(x)$ cũng có thể biểu diễn dưới dạng sau đây:

$P(x1) \vee P(x2) \vee P(x3) \vee \dots \vee P(xn)$ ..., bởi vì phép tuyển này đúng khi một trong các P(x1), P(x2), P(x3),…, P(xn),… đúng.

Ví dụ 3.61

a. Với mọi số thực x, y ta luôn có x + y = y + x, có thể được biểu diễn:

$$\forall x, y \in R, x + y = y + x$$

b**.** Xét A ={1, 2, 3, 4} xem xét phát biểu sau:

$$\forall x \in A, x^2 \geq x$$

Chứng tỏ phát biểu trên luôn đúng.

Hướng dẫn:

Kiểm tra biểu thức $x^2 \geq x$ với tất cả các giá trị x thuộc A.

Ta thấy rằng $1^2 \geq 1$, $2^2 \geq 2$, $3^2 \geq 3$, $4^2 \geq 4$.

Do đó, phát biểu $\forall x \in A, x^2 \geq x$ đúng.

c. Đặt P(x) = "x+1 > x", xác định giá trị của lượng từ $\forall x\ P(x)$ với x ∈ R

Hướng dẫn:

Bởi vì P(x) luôn đúng với mọi giá trị của x ∈ R nên lượng từ $\forall x\ P(x)$ đúng.

d. Đưa ra một Ví dụ để phát biểu $\forall x \in R, x^2 \geq x$ sai.

Hướng dẫn:

Lấy x = $\frac{1}{3}$, x là số thực và $(\frac{1}{3})^2 = \frac{1}{9} < \frac{1}{3}$

Do đó phát biểu $\forall x \in R, x^2 \geq x$ sai

e. Xem xét phát biểu: $\exists m \in Z^+$ sao cho $m^2 = m$

Chứng tỏ phát biểu trên đúng.

Hướng dẫn:

Dễ dàng thấy với m = 1 thì $m^2 = m = 1$. Do đó "$m^2 = m$" đúng với ít nhất một giá trị nguyên m.

Do đó phát biểu $\exists m \in Z^+$ sao cho $m^2 = m$ đúng.

f. Xét tập A ={3, 4, 5} và phát biểu $\exists m \in A$ sao cho $m^2 = m$

Chứng tỏ rằng phát biểu trên sai.

Hướng dẫn:

Dễ dàng thấy $3^2 = 9 \neq 3$, $4^2 = 16 \neq 4$ và $5^2 = 25 \neq 5$

Do đó không tồn tại m thuộc A để $m^2 = m$ thỏa mãn

Hay phát biểu $\exists m \in A$ sao cho $m^2 = m$ sai.

Ví dụ 3.62

a. Thể hiện phát biểu *"Mỗi sinh viên trong lớp học này đã học toán rời rạc"* bằng vị từ và lượng từ.

Đầu tiên, chúng ta cần viết lại phát biểu để xác định rõ các lượng từ thích hợp được sử dụng. Kết quả chúng ta thu được:

"Với mỗi sinh viên của lớp học này, sinh viên đó đã học toán rời rạc"

Sử dụng biến x để phát biểu được viết *"Với mỗi sinh viên x của lớp học này, sinh viên x đã học toán rời rạc"*

Sử dụng C(x) = *"x đã học toán rời rạc"*. Nếu miền giá trị x là tất cả các sinh viên trong lớp học, chúng ta chuyển phát biểu ban đầu thành $\forall x\ C(x)$.

b. Thể hiện phát biểu *"Mỗi sinh viên trong lớp đều đăng ký học môn toán rời rạc hoặc nhập môn cơ sở dữ liệu"* bằng vị từ và lượng từ.

Tương tự với cách biểu diễn ở câu a, đặt P(x) = *"x là sinh viên trong lớp"*

Đặt Q(x) = *"x đăng ký môn toán rời rạc"*

Đặt H(x) = *"x đăng ký nhập môn cơ sở dữ liệu"*

Phát biểu trên được biểu diễn qua biểu thức lượng từ $\forall x(P(x) \vee Q(x))$

3.1.6.3. Luật De Morgan với các lượng từ

Luật De Morgan cho các lượng từ		
Phát biểu	**Phát biểu tương đương**	**Diễn giải**
$\neg\exists x\, P(x)$	$\forall x\, \neg P(x)$	$\neg\exists x\, P(x)$ đúng khi: với mọi giá trị của x, P(x) luôn sai; $\neg\exists x\, P(x)$ sai khi: có một giá trị cụ thể nào đó của x làm cho P(x) đúng.
$\neg\forall x\, P(x)$	$\exists x\, \neg P(x)$	$\neg\forall x\, P(x)$ đúng khi: có một giá trị của x làm cho P(x) sai; $\neg\forall x\, P(x)$ sai khi: P(x) đúng với mọi giá trị của x.

Ví dụ 3.63

Viết phủ định cho các phát biểu sau đây:

a. *"Có một chính trị gia trung thực"*

Hướng dẫn:

Đặt P(x) = *"x trung thực"*. Do đó phát biểu *"Có một chính trị gia trung thực"* được biểu diễn bởi lượng từ $\exists x\, P(x)$, trong đó miền giá trị là tập hợp các chính trị gia.

Phủ định của phát biểu trên theo quy tắc De Morgan áp dụng cho các lượng từ là $\neg\exists x\, P(x) \equiv \forall x\, \neg P(x)$

$\forall x\, \neg P(x)$ có thể được diễn đạt dưới dạng phát biểu như sau: *"Tất cả các chính trị gia không trung thực"* hoặc *"Không phải tất cả các chính trị gia đều trung thực"*

b. *"Tất cả người dân Mỹ đều ăn pho mai"*

Hướng dẫn:

Đặt Q(x) = *"x ăn pho mai"*. Do đó phát biểu *"Tất cả người dân Mỹ đều ăn pho mai"* được biểu diễn bởi lượng từ $\forall x\, P(x)$, trong đó miền giá trị là tập hợp những người dân của nước Mỹ.

Phủ định của lượng từ trên theo quy tắc De Morgan áp dụng cho các lượng từ là $\neg\forall x\ P(x)\ \equiv \exists x\ \neg P(x)$

$\exists x\ \neg P(x)$ có thể được diễn đạt dưới dạng phát biểu sau đây: *"Một số người dân Mỹ không ăn pho mai"*

Ví dụ 3.64

Viết phủ định của các phát biểu sau đây:

a. $\forall x\ (x^2 > x)$

b. $\exists x\ (x^2 = 2)$

Hướng dẫn:

a. Phủ định của $\forall x\ (x^2 > x)$ là $\neg\forall x\ (x^2 > x)$

Áp dụng quy tắc De Morgan

$\neg\forall x\ (x^2 > x) \equiv \exists x \neg(x^2 > x)$

$\equiv \exists x(x^2 \leq x)$

b. Phủ định của $\exists x\ (x^2 = 2)$ là $\neg\exists x\ (x^2 = 2)$

Áp dụng quy tắc De Morgan

$\neg\exists x\ (x^2 = 2) \equiv \forall x \neg\ (x^2 = 2)$

$\equiv \forall x \neg\ (x^2 \neq 2)$

Ví dụ 3.65

Chứng tỏ rằng: $\neg\forall x(P(x) \rightarrow Q(x))$ và $\exists x(P(x) \wedge \neg Q(x))$ tương đương logic

Hướng dẫn:

Áp dụng quy tắc De Morgan:

$\neg\forall x(P(x) \rightarrow Q(x))$

$\equiv \exists x \neg(P(x) \rightarrow Q(x))$

$\equiv \exists x(P(x) \wedge \neg Q(x))$

3.1.6.4. Định lý áp dụng với các lượng từ hai biến

Định lý 3.1
Nếu p(x,y) là một vị từ theo hai biến x, y thì các mệnh đề sau đây đúng: $+\ [\forall x \in A, \forall y \in B, p(x,y)] \leftrightarrow [\forall y \in B, \forall x \in A, p(x,y)]$ $+\ [\exists x \in A, \exists y \in B, p(x,y)] \leftrightarrow [\exists y \in B, \exists x \in A, p(x,y)]$ $+\ [\exists x \in A, \forall y \in B, p(x,y)] \leftrightarrow [\forall y \in B, \exists x \in A, p(x,y)]$

3.1.6.5. Quy tắc suy luận với các lượng từ

Dưới đây là liệt kê các quy tắc suy luận với các lượng từ được sử dụng để kiểm tra tính hợp lệ của các phát biểu:

Quy tắc	Ý nghĩa
Universal instantiation $\dfrac{\forall x\, p(x)}{\therefore p(c)}$	**Universal instantiation** là một quy tắc suy luận, thể hiện rằng nếu tiền đề $\forall x\, p(x)$ đúng thì kết luận được đưa ra là p(c) đúng với mọi phần tử c thuộc miền giá trị.
Universal generalization $\dfrac{P(c) \text{ với } c \text{ tùy ý}}{\therefore \forall x\, p(x)}$	**Universal generalization** được sử dụng khi chúng ta cần chỉ ra rằng $\forall x\, p(x)$ đúng bằng cách lấy ra phần tử bất kỳ c tùy ý từ miền giá trị và chỉ ra rằng p(c) đúng. Phần tử c được chọn phải là phần tử tùy ý chứ không phải là phần tử cụ thể thuộc miền.
Existential instantiation $\dfrac{\exists x\, p(x)}{\therefore p(c) \text{ với một số giá trị } c}$	**Existential instantiation** thể hiện rằng nếu tiền đề $\exists x\, p(x)$ đúng, thì chúng ta có thể chỉ ra 1 phần tử c thuộc miền giá trị để p(c) nhận giá trị đúng
Existential generalization $\dfrac{p(c) \text{ với một số giá trị } c}{\therefore \exists x\, p(x)}$	**Existential generalization** thể hiện nếu có một giá trị c thuộc miền giá trị để p(c) đúng thì có thể kết luận $\exists x\, p(x)$ đúng

Ví dụ 3.66

Chứng tỏ suy luận sau đây đúng:

"Mọi sinh viên trong lớp học toán rời rạc này đã tham gia khóa học về khoa học máy tính"

"Nam là sinh viên của lớp học toán rời rạc"

Suy ra *"Nam tham gia khóa học khoa học máy tính"*.

Hướng dẫn:

Đặt D(x) = *"Sinh viên x trong lớp học toán rời rạc";*

C(x) = *"Sinh viên x tham gia khóa học khoa học máy tính";*

Các tiền đề được suy ra từ phát biểu trên:

$\forall x\ (D(x) \rightarrow C(x))$

D(Nam)

Kết luận: C(Nam)

Trình tự các bước để từ các tiền đề đi đến kết luận

Bước	**Tiền đề và Kết luận**	**Quy tắc sử dụng**
1	$\forall x\ (D(x) \rightarrow C(x))$ $\therefore D(Nam) \rightarrow C(Nam)$	Tiền đề *Chuyên biệt hóa phổ dụng*
2	$D(Nam) \rightarrow C(Nam)$ D(Nam) $\therefore C(Nam)$	Kết luận của bước 1 Tiền đề *Modus Tollens*

Suy luận đúng, hay *"Nam tham gia khóa học khoa học máy tính"*.

Ví dụ 3.67

Chứng tỏ rằng từ các tiền đề:

"Một số sinh viên trong lớp này chưa đọc sách toán rời rạc"

"Mọi sinh viên đều vượt qua kỳ thi đầu tiên".

Đưa đến kết luận sau đây:

"Một số sinh viên đã vượt qua kỳ thi đầu tiên nhưng chưa đọc cuốn sách toán rời rạc"

Hướng dẫn:

Đặt C(x) = "x là sinh viên trong lớp học", B(x) = "x đã đọc sách toán rời rạc"

P(x) = "x vượt qua kỳ thi đầu tiên".

Các tiền đề được thể hiện như sau:

Phát biểu	**Biểu thức**
"Một số sinh viên trong lớp này chưa đọc sách toán rời rạc"	$\exists x(C(x) \land \neg B(x))$
"Mọi sinh viên đều vượt qua kỳ thi đầu tiên"	$\forall x(C(x) \rightarrow P(x))$

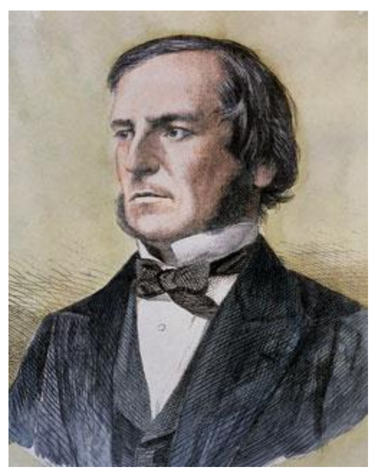
Kết luận

Phát biểu	**Biểu thức**
"Một số sinh viên đã vượt qua kỳ thi đầu tiên nhưng chưa đọc cuốn sách toán rời rạc"	$\exists x(P(x) \land \neg B(x))$

Trình tự các bước sau đây thể hiện diễn biến sử dụng các luật từ các tiền đề dẫn đến kết luận cuối cùng:

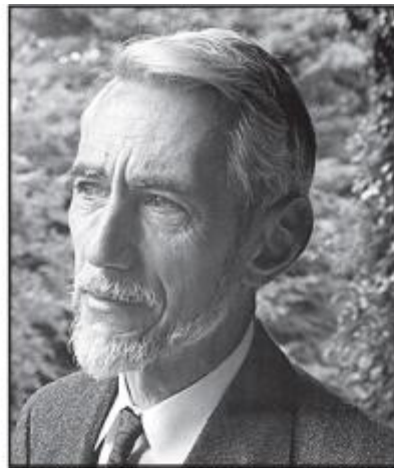
Bước	Tiền đề và Kết luận	Quy tắc sử dụng
1	$\exists x(C(x) \land \neg B(x))$ $\therefore C(a) \land \neg B(a)$	Tiền đề 1 Existential instantiation
2	$C(a) \land \neg B(a)$ $\therefore C(a)$ $\therefore \neg B(a)$	Kết luận của bước 1 Đơn giản hóa (2.1) Đơn giản hóa (2.2)
3	$\forall x(C(x) \rightarrow P(x))$ $\therefore C(a) \rightarrow P(a)$	Tiền đề 2 Universal instantiation
4	$C(a) \rightarrow P(a)$ $C(a)$ $\therefore P(a)$	Kết luận của bước 3 Kết quả của bước 2.1 Modus Ponens
5	P(a) $\neg B(a)$ $\therefore P(a) \land \neg B(a)$	Kết quả của bước 4 Kết quả của bước 2.2 Luật kết hợp
6	$P(a) \land \neg B(a)$ $\therefore \exists x(P(x) \land \neg B(x))$	Kết quả của bước 5 Existential generalization

3.2. ĐẠI SỐ BOOLE



George Boole sinh ngày 02/11/1815 ở London. Ông là con trai một nhà bán tạp hóa nhỏ. Vì nhà nghèo nên từ năm 16 tuổi, ông đã phải bươn chải kiếm sống, phụ giúp gia đình bằng nghề dạy học. Năm 20 tuổi, ông mở một trường tư ở quê nhà. Vừa tận tụy dạy học, vừa ra sức tự học, ông đã tích lũy thêm một kiến thức toán học đồ sộ cho riêng mình. Với tài năng vốn có và lòng đam mê, bất chấp hoàn cảnh khó khăn, ông đã cho ra đời hàng loạt công trình nghiên cứu nổi tiếng và rất quan trọng cho ngành toán học thế giới: *"Giải tích toán học của logic"*, *"Các định luật của tư duy"*. Nhờ đó, ông được bổ nhiệm làm Giáo sư toán của trường Nữ hoàng ở Iceland từ năm 1849 cho đến khi mất. Ông mất vào ngày 08/12/1864, thọ 49 tuổi.

Năm 1938, Claude Shannon, làm việc tại viện Công nghệ Massachusetts chứng tỏ rằng có thể dùng các quy tắc cơ bản của lôgic do George Boole đưa ra vào năm 1854 trong cuốn *"Các quy luật của tư duy"* phục vụ cho việc thiết kế các mạch điện. Các quy tắc này đã tạo nên cơ sở của đại số Boole. Sự hoạt động của một mạch điện được xác định bởi một hàm Boole chỉ rõ giá trị của đầu ra đối với mỗi tập đầu vào. Bước đầu tiên trong việc xây dựng một mạch điện là biểu diễn hàm Boole của nó bằng một biểu thức được lập bằng cách dùng các phép toán cơ bản của đại số Boole. Biểu thức mà ta sẽ nhận được có thể chứa nhiều phép toán hơn mức cần thiết để biểu diễn hàm đó.



Claude Shannon **(1916 - 2001)** sinh ra ở Petoskey và lớn lên ở Gaylord, Michigan. Cha ông là một doanh nhân và một thẩm phán, còn mẹ ông là một giáo viên ngôn ngữ và một hiệu trưởng trường trung học. Shannon theo học Đại học Michigan, tốt nghiệp năm 1936. Luận văn thạc sĩ Shannon viết vào năm 1936, nghiên cứu các khía cạnh logic của phân tích vi sai. Luận văn thạc sĩ này trình bày ứng dụng đầu tiên của đại số Boolean để thiết kế các mạch chuyển mạch; đó là luận án thạc sĩ nổi tiếng nhất của thế kỷ XX. Ông đã nhận bằng tiến sĩ từ M.I.T vào năm 1940. Shannon gia nhập Phòng thí nghiệm Bell năm 1940, nơi ông nghiên cứu cách thức truyền dữ liệu một cách hiệu quả. Ông là một trong những người đầu tiên sử dụng bit để thể hiện thông tin. Tại phòng thí nghiệm Bell, ông đã làm việc để xác định lưu lượng mà các đường dây điện thoại có thể truyền. Shannon làm nhiều điều cơ bản đóng góp cho lý thuyết thông tin. Đầu những năm 1950, ông là một trong những người sáng lập nghiên cứu về trí tuệ nhân tạo. Ông tham gia giảng dạy ở M.I.T và ông tiếp tục nghiên cứu về lý thuyết thông tin. Shannon nghỉ hưu khi ông 50 tuổi.

3.2.1. Định nghĩa đại số Boole

Định nghĩa 3.19

Một đại số Boole là tập hợp A cùng với các phép toán + (cộng), . (nhân), ¯ (phủ định), thỏa mãn các tính chất sau đây:

a. Tính giao hoán: với $\forall x, y \in A$

$$x + y = y + x$$

$$x \,.\, y = y \,.\, x$$

b. Tính kết hợp: với $\forall x, y, z \in A$

$$x + (y + z) = (x + y) + z$$

$$x\,.\,(y.z) = (x.y).z$$

c. Tính phân phối: với $\forall x, y, z \in A$:

$$x\,.\,(y + z) = (x.y) + (x.z)$$

$$x + (y.z) = (x + y)\,.\,(x + z)$$

d. Phần tử trung hòa: Tồn tại hai phần tử trung hòa 0, 1 $\in A$ đối với hai phép toán $.$ và $+$ sao cho với mọi x $\in A$ ta có: $x + 0 = x$ và $x.1 = x$

e. Phần tử bù: với $\forall x \in A$, tồn tại $\overline{x} \in A$ sao cho:

$$x + \overline{x} = 1$$

$$x.\overline{x} = 0$$

Ví dụ 3.68

a. Đại số logic là một đại số Boole, trong đó A là tập hợp của các mệnh đề, các phép toán ∨, ∧, ¬ tương ứng với các phép toán **.**, +, ¯ và các hằng đúng, hằng sai tương ứng với 2 phần tử trung hòa 1, 0.

b. Cho tập A ={0, 1} và các phép toán **.**, +, ¯ xác định trên A, thỏa mãn:

1 . 1 = 1, 1 . 0 = 0, 0 . 1 = 0, 0 . 0 = 0

1 + 1 = 1, 1 + 0 = 1, 0 + 1 = 1, 0 + 0 = 0

$\overline{1} = 0$ và $\overline{0} = 1$

Khi đó, A là đại số Boole, 0, 1 là các bit.

3.2.2. Các phép toán cơ bản của đại số Boole

3.2.2.1. Tính chất của đại số Boole

Tính chất của đại số Boole

Luật nuốt:

a . 0 = 0 a + 1 = 1

Luật lũy đẳng:

a . a = a a + a = a

Luật De Morgan:

$\overline{a + b} = \overline{a}\,.\,\overline{b}$ $\overline{a.b} = \overline{a} + \overline{b}$

Luật phủ định của phủ định:

$\overline{\overline{a}} = a$

Luật hấp thụ:

a. (a + b) =a   a + (a.b) = a

3.2.2.2. Biểu thức Boole và hàm Boole

Định nghĩa 3.20

Xét tập B ={0, 1}. B^n = {(x_1, x_2, x_3, …, x_n)| $x_i \in B$ với $1 \leq x_i \leq n$} là tập n – bộ của 0 và 1.

Biến x được gọi là biến Boole nếu nó chỉ nhận các giá trị từ B.

Hàm từ B^n vào B được gọi là hàm Boole bậc n

Có hai cách xác định hàm Boole:

+ Thể hiện thông qua bảng giá trị chân lý

+ Thể hiện ở dạng công thức.

Ví dụ 3.69

Xét hàm F(x, y) = $x\overline{y}$ với x, y $\in (0, 1)$ là hàm Boole bậc 2 với F(1, 1) = 0, F(1, 0) = 1, F(0, 1) = 0 và F(0, 0) = 0

Xác định bảng giá trị chân lý cho hàm F(x, y)

Hướng dẫn:

Hàm F(x, y) được thể hiện thông qua bảng giá trị chân lý sau đây:

x	y	F(x, y)
1	1	0
1	0	1
0	1	0
0	0	0

Lưu ý:

Nếu E_1 và E_2 là các biểu thức Boole thì $\overline{E_1}$, (E_1E_2), (E_1 + E_2) cũng là các biểu thức Boole.

Định nghĩa các phép toán trên hàm Boole

Hai hàm Boole f(x_1, x_2, x_3, …, x_n) và g(x_1, x_2, x_3, …, x_n) được gọi là bằng nhau nếu cùng có cùng bảng giá trị chân lý.

Ký hiệu $f(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n) = g(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n)$

Phép phủ định của hàm $f(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n)$, ký hiệu là $\overline{f(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n)}$, được xác định giá trị như sau:

$f(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n)$	$\overline{f(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n)}$,
1	0
0	1

Phép hội của hai hàm $f(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n)$ và $g(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n)$ là hàm Boole, ký hiệu $f \wedge g((x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n)$ và được xác định giá trị:

$$f \wedge g((x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n) = f(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n) \wedge g(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n)$$

Phép tuyển của hai hàm $f(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n)$ và $g(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n)$ là hàm Boole, ký hiệu $f \vee g((x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n)$ và được xác định giá trị:

$$f \vee g((x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n) = f(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n) \vee g(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n)$$

Ví dụ 3.70

Xác định giá trị của hàm Boole sau đây:

$F(x, y, z) = xy + \overline{z}$

Hướng dẫn:

Xây dựng bảng giá trị chân lý của hàm F(x, y, z) theo 3 biến Boole x, y, z:

x	y	z	xy	$\overline{z}$	$F(x, y, z) = xy + \overline{z}$
1	1	1	1	0	1
1	1	0	1	1	1
1	0	1	0	0	0
1	0	0	0	1	1
0	1	1	0	0	0
0	1	0	0	1	1
0	0	1	0	0	0
0	0	0	0	1	1

3.2.2.3. Xác định dạng chuẩn tắc của biểu thức Boole

Ví dụ 3.71

Xác định biểu thức Boole của biểu thức F(x, y, z) và G(x, y, z) được thể hiện trong bảng giá trị chân lý sau đây:

x	y	z	F(x, y, z)	G(x, y, z)
1	1	1	0	0
1	1	0	0	1
1	0	1	1	0
1	0	0	0	0
0	1	1	0	0
0	1	0	0	1
0	0	1	0	0
0	0	0	0	0

Hướng dẫn:

(Xem lại thuật toán xác định chuẩn tắc hội và chuẩn tắc tuyển ở phần 3.1.5.3. Tìm chuẩn tắc hội hoặc chuẩn tắc tuyển của một biểu thức logic).

F(x, y, z) = 1 với bộ giá trị x = 1, y = 0 và z = 1 và F(x, y, z) = 0 trong các trường hợp còn lại.

x	y	z	F(x, y, z)	Minterm
1	1	1	0	
1	1	0	0	
1	0	1	1	$x\overline{y}z$
1	0	0	0	
0	1	1	0	
0	1	0	0	
0	0	1	0	
0	0	0	0	

Do đó F(x, y, z) = $x\overline{y}z$

G(x, y, z) = 1 với bộ giá trị (x = 1, y =1, z = 0) hoặc (x =0, y = 1, z =0)

G(x, y, z) = 0 trong các trường hợp còn lại của (x, y, z)

x	y	z	G(x, y, z)	Minterm
1	1	1	0	
1	1	0	1	$x\overline{y}z$
1	0	1	0	
1	0	0	0	
0	1	1	0	
0	1	0	1	$\overline{x}y\overline{z}$
0	0	1	0	
0	0	0	0	

Do đó, G(x, y, z) = x$\overline{y}z$ + $\overline{x}$y$\overline{z}$

Định nghĩa 3.21
Literal là một biến Boole hoặc phủ định của biến Boole này. *Minterm* của các biến Boole x_1, x_2, x_3, …, x_n là một Boole tích $y_1y_2y_3…y_n$, trong đó y_j là các *Literal* ($y_i = x_i$ hoặc $y_i = \overline{x_i}$.)

Ví dụ 3.72

Xác định dạng chuẩn tắc của biểu thức Boole sau đây:

F(x, y, z) = (x + y) $\overline{z}$

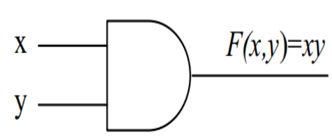
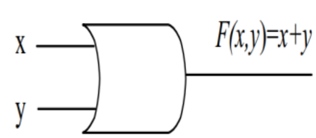
Hướng dẫn

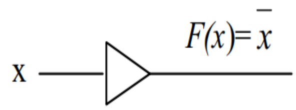
Lập bảng giá trị chân lý của biểu thức F(x, y, z). Từ đó biểu diễn F(x, y, z) về dạng chuẩn tắc.

x	**y**	**z**	**x + y**	$\overline{z}$	F(x, y, z) = (x + y) $\overline{z}$	**Minterm**
1	1	1	1	0	0	
1	1	0	1	1	1	xy$\overline{z}$
1	0	1	1	0	0	
1	0	0	1	1	1	x$\overline{y}$ $\overline{z}$
0	1	1	1	0	0	
0	1	0	1	1	1	$\overline{x}$y$\overline{z}$
0	0	1	0	0	0	
0	0	0	0	1	0	

Do đó, F(x, y, z) = xy$\overline{z}$ + x$\overline{y}$ $\overline{z}$ + $\overline{x}$y$\overline{z}$

3.2.2.4. Mạch logic

CÁC CỔNG LOGIC	
Cổng AND: Cổng AND thực hiện hàm hội. Đầu ra *F(x,y)* là hội (tích) của các đầu vào. $F(x,y) = xy = \begin{cases} 1\ khi\ x = y = 1 \\ 0\ x \neq 1 \wedge y \neq 1 \end{cases}$	
Cổng OR: Cổng OR thực hiện hàm tuyển (tổng). Đầu ra *F(x,y)* là tuyển (tổng) của các đầu vào	

$\mathrm{F}(x, y) = x + y = \begin{cases} 1\ x = 1\ \vee\ y = 1 \\ 0\ khi\ x = y = 0 \end{cases}$	
Cổng NOT: Cổng NOT thực hiện hàm phủ định. Cổng chỉ có một đầu vào. Đầu ra *F(x)* là phủ định của đầu vào *x*. $\mathrm{F}(x,) = \overline{x} = \begin{cases} 1\ khi\ x = 0 \\ 0\ khi\ x = 1 \end{cases}$	

Ví dụ 3.73

Xây dựng mạch với đầu ra như sau:

a. (x + y) $\overline{x}$

b. $\overline{x}\ \overline{(y + \overline{z}\,)}$

c. (x + y + z) ($\overline{x}\,\overline{y}\,\overline{z}$)

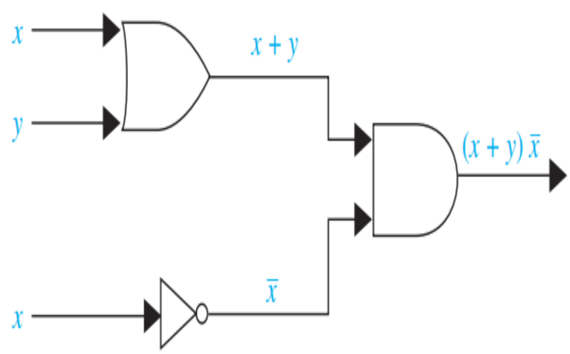
Hướng dẫn:

a. Với đầu ra là (x + y) x̄, ta sẽ sử dụng mạch AND với 2 dữ liệu đầu vào (x+ y) và x̄

Để có đầu vào (x+ y) ta phải sử dụng mạch OR với 2 dữ liệu vào là x, y

Để có đầu vào x̄ ta phải sử dụng mạch NOT

Mạch được xây dựng như sau:



Hình 3.1: Mạch được thiết kế của Ví dụ 3.73a

b. $\overline{x}\ \overline{(y + \overline{z}\,)}$

Với đầu ra là $\overline{x}\ \overline{(y + \overline{z}\,)}$, ta

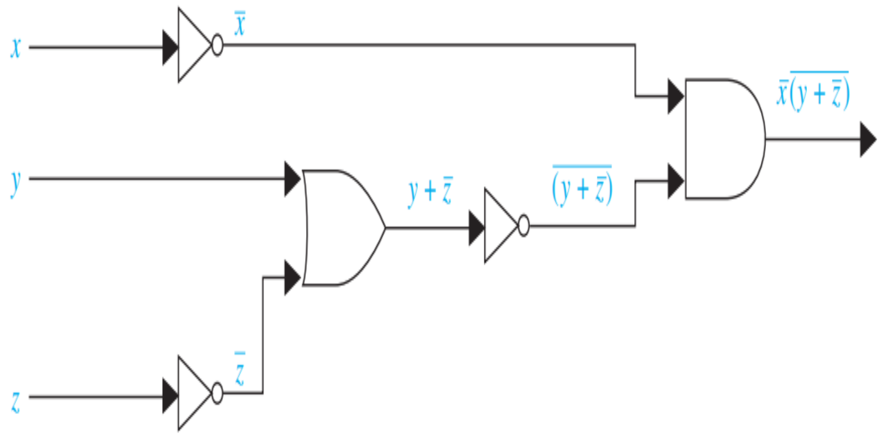
sẽ sử dụng mạch AND với 2 dữ liệu đầu vào là là $\overline{x}$ và $\overline{(y + \overline{z}\,)}$

Để có dữ liệu đầu ra là $\overline{x}$ ta sử dụng mạch NOT

Để có dữ liệu đầu ra là $\overline{(y + \overline{z}\,)}$, ta phải sử dụng 1 mạch NOT, trong đó đó đầu vào của nó là $y + \overline{z}$

Để có đầu ra là $y + \overline{z}$, ta phải sử dụng 1 mạch OR, với 2 dữ liệu đầu vào là y và $\overline{z}$

Mạch được xây dựng như sau:



Hình 3.2: Mạch được thiết kế của Ví dụ 3.73b

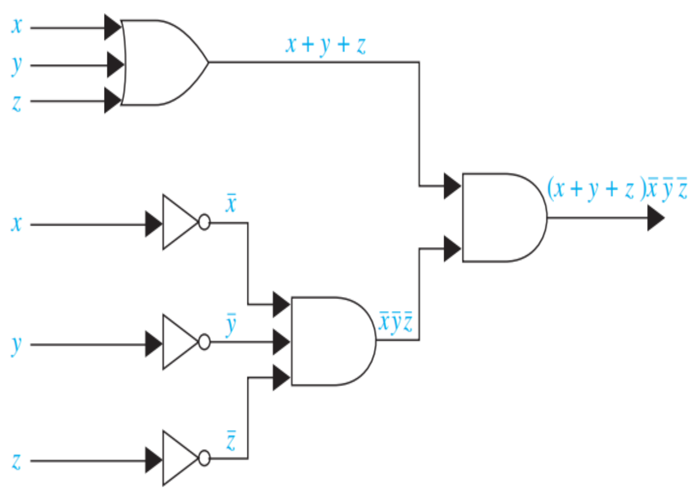
c. (x + y + z) ($\overline{x}\ \overline{y}\ \overline{z}$)

Với đầu ra là (x + y + z) ($\overline{x}\ \overline{y}\ \overline{z}$), ta sử dụng mạch AND với hai dữ liệu đầu vào là (x + y + z) và ($\overline{x}\ \overline{y}\ \overline{z}$)

Để có dữ liệu đầu ra là (x + y + z) ta phải sử dụng mạch OR, với 3 dữ liệu đầu vào là x, y, z.

Để có dữ liệu đầu ra là ($\overline{x}\ \overline{y}\ \overline{z}$) ta phải sử dụng 3 mạch NOT, tương ứng với 3 dữ liệu đầu vào là x, y, z

Mạch được xây dựng như sau:



Hình 3.3: Mạch được thiết kế của Ví dụ 3.73c

Ví dụ 3.74

Xây dựng mạch với đầu ra là hàm F(x, y) được thể hiện qua bảng giá trị chân lý sau đây:

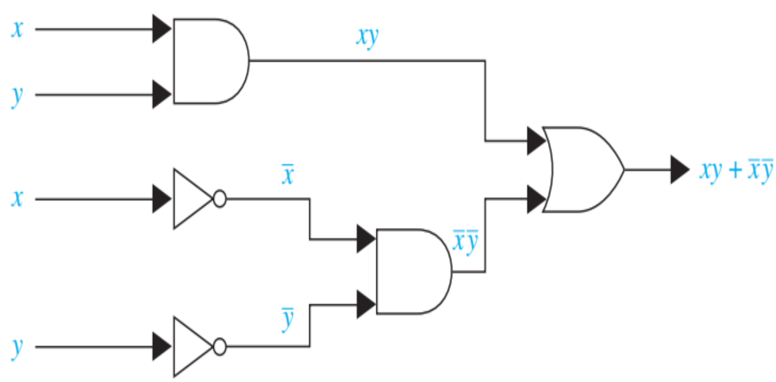
x	y	F(x, y)
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	1

Hướng dẫn:

x	**y**	**F(x, y)**	**Minterm**
1	1	1	xy
1	0	0	
0	1	0	
0	0	1	$\overline{x}\,\overline{y}$

Dễ dàng thấy F(x, y) = xy + $\overline{x}\,\overline{y}$

Do đó, mạch được thiết kế như sau:



Hình 3.4: Mạch được thiết kế của Ví dụ 3.74

Ví dụ 3.75

Xây dựng mạch với đầu ra là hàm F(x, y) được thể hiện qua bảng giá trị chân lý sau đây:

x	**y**	**z**	F(x, y, z)
1	1	1	1
1	1	0	0
1	0	1	0

1	0	0	1
0	1	1	0
0	1	0	1
0	0	1	1
0	0	0	0

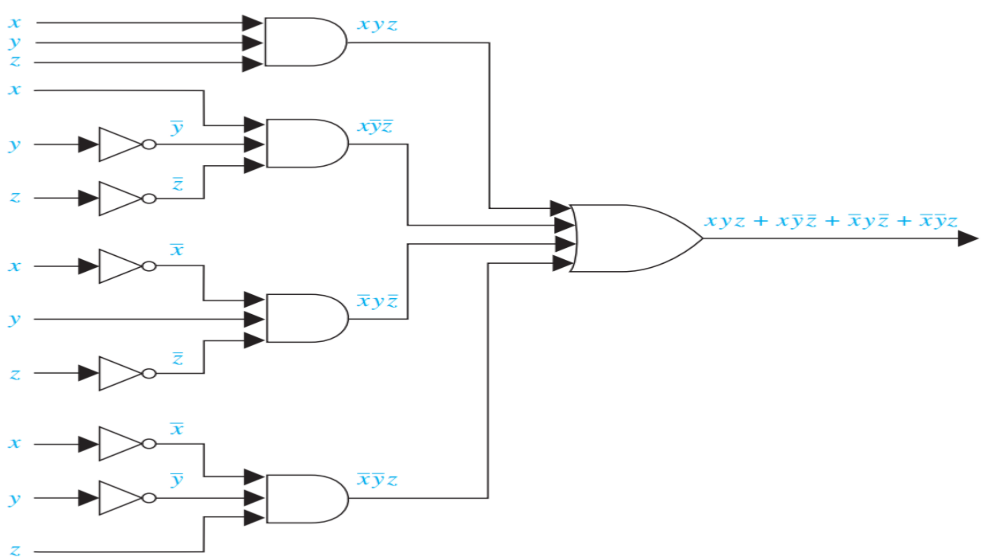
Hướng dẫn:

Bước 1: Biểu diễn hàm F(x, y, z)

x	**y**	**z**	**F(x, y, z)**	**Minterm**
1	1	1	1	xyz
1	1	0	0	
1	0	1	0	
1	0	0	1	$x\overline{y}\,\overline{z}$
0	1	1	0	
0	1	0	1	$\overline{x}y\overline{z}$
0	0	1	1	$\overline{x}\,\overline{y}\,z$
0	0	0	0	

F(x, y, z) = $xyz + x\overline{y}\,\overline{z} + \overline{x}y\overline{z} + \overline{x}\,\overline{y}\,z$

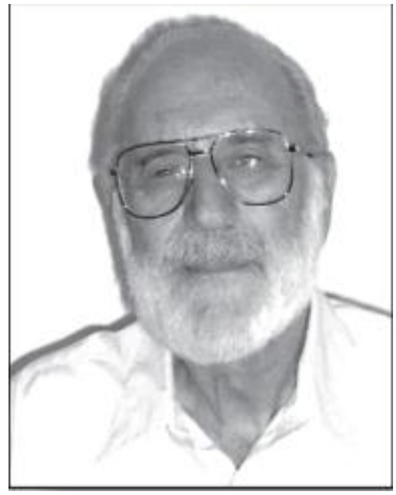
Bước 2: Thiết kế mạch với đầu ra là hàm F(x, y, z) như sau:



Hình 3.5: Mạch được thiết kế của Ví dụ 3.75

3.3.2. Cực tiểu hóa hàm logic

MAURICE KARNAUGH (1924**)**



Maurice Karnaugh, sinh ra và lớn lên ở thành phố New York, ông đã nhận bằng cử nhân từ trường Đại học thành phố New York và nhận bằng thạc sỹ, tiến sĩ từ Đại học Yale. Từ năm 1952 đến năm 1966, ông là nhân viên kỹ thuật tại Phòng thí nghiệm Bell. Từ năm 1966 đến 1970 ông là giám đốc nghiên cứu và phát triển của AT & T. Năm 1970, ông gia nhập IBM và là thành viên của đội ngũ nghiên cứu. Karnaugh đã có những đóng góp cơ bản cho việc ứng dụng các kỹ thuật số trong cả điện toán và viễn thông.

Trong thiết bị máy tính người ta thiết kế gồm nhiều khâu, mỗi khâu được đặc trưng bằng một phương trình logic. Trong đó mức độ phức tạp của sơ đồ phụ thuộc vào phương trình logic biểu diễn chúng. Việc đạt được độ ổn định cao hay không là tùy thuộc vào phương trình biểu diễn chúng đã ở dạng tối thiểu hóa hay chưa. Để thực hiện được điều đó khi thiết kế mạch số người ta thường đặt ra vấn đề tối thiểu hóa hàm logic. Điều đó có nghĩa là phương trình logic biểu diễn sao cho thực sự gọn nhất (số lượng phép tính và số lượng các số được biểu diễn là ít nhất).

Tuy nhiên trong thực tế không phải lúc nào cũng đạt được lời giải cho bài toán tối ưu hóa.

Các bước tiến hành tối thiểu hóa:

- Dùng các phép tối thiểu hóa để tối thiểu hóa các hàm số logic

- Rút ra những thừa số chung nhằm mục đích tối thiểu hóa thêm một bước nữa các phương trình logic.

3.3.2.1. Phương pháp tối thiểu hóa bằng biểu thức đại số:

Đây là phương pháp tối thiểu hóa hàm logic dựa trên các tiên đề các định lý đã biết của đại số Boole, phương pháp này được thực hiện khi các biến số logic không nhiều và ta thực hiện biến đổi trực tiếp biểu thức giải tích của hàm.

Ví dụ 3.76

Rút gọn hàm sau:

F(x, y) = $\bar{x}.y + x.\bar{y} + x.y$

= $(\bar{x} + x).y + x.\bar{y}$

= y + $x.\bar{y}$

= x + y.

Ví dụ 3.77

Rút gọn hàm sau:

F(x, y, z) = $\bar{x}.y.z + x.\bar{y}.\bar{z} + x.\bar{y}.z + x.y.\bar{z} + x.y.z$

= $\bar{x}.y.z + x.\bar{y}.\bar{z} + x.\bar{y}.z + x.y(\bar{z} + z)$

= $\bar{x}.y.z + x.\bar{y}.(\bar{z} + z) + x.y(\bar{z} + z)$

= $\bar{x}.y.z + (x.\bar{y} + x.y).(\bar{z} + z)$

= $\bar{x}.y.z + (x.\bar{y} + x.y)$

= $\bar{x}.y.z + x.(y + \bar{y}) = \bar{x}.y.z + x$

3.3.2.2. Tối thiểu hoá bằng bảng Karnaugh:

Trong phạm vi của giáo trình, chỉ xét f là một hàm Bool theo n biến x_1 ,x_2 ,…, x_n với n = 3 hoặc 4.

Trường hợp 1: n =3

f là hàm Bool theo 3 biến x, y, z. Khi đó bảng chân trị của f gồm tám hàng. Thay cho bảng chân trị của f ta vẽ một bảng chữ nhật gồm tám ô, tương ứng với tám hàng của bảng chân trị, được đánh dấu như sau:

	x	x	$\bar{x}$	$\bar{x}$
z	101	111	011	001
$\bar{z}$	100	110	010	000
	$\bar{y}$	y	y	$\bar{y}$

Quy ước về cách viết: Khi một ô nằm trong dãy được đánh dấu bởi x thì tại đó x =1, bởi $\bar{x}$ thì tại đó x = 0, tương tự cho y, z.

Các ô tại đó f bằng 1 sẽ được đánh dấu (tô đậm hoặc gạch chéo). Tập các ô được đánh dấu được gọi là **biểu đồ Karnaugh** của f, ký hiệu là kar(f).

Trường hợp 2: n = 4

f là hàm Bool theo 4 biến x, y, z, t. Khi đó bảng chân trị của f gồm 16 hàng. Thay cho bảng chân trị của f ta vẽ một bảng chữ nhật gồm 16 ô, tương ứng với 16 hàng của bảng chân trị, được đánh dấu như sau:

	x	x	$\bar{x}$	$\bar{x}$	
z	1010	1110	0110	0010	$\bar{t}$
z	1011	1111	0111	0011	t
$\bar{z}$	1001	1101	0101	0001	t
$\bar{z}$	1000	1100	0100	0000	$\bar{t}$
	$\bar{y}$	y	y	$\bar{y}$	

Quy ước về cách viết: Khi một ô nằm trong dãy được đánh dấu bởi x thì tại đó x =1, bởi $\bar{x}$ thì tại đó x =0, tương tự cho y, z, t.

Các ô tại đó f bằng 1 sẽ được đánh dấu (tô đậm hoặc gạch chéo). Tập các ô được đánh dấu được gọi là **biểu đồ Karnaugh** của f, ký hiệu là kar(f).

Trong cả hai trường hợp, hai ô được gọi là *kề nhau* (theo nghĩa rộng), nếu chúng là hai ô liền nhau hoặc chúng là ô đầu, ô cuối của cùng một hàng (cột) nào đó. Nhận xét rằng, do cách đánh dấu như trên, hai ô kề nhau chỉ lệch nhau ở một biến duy nhất.

Định lý 3.2

Cho f, g là các hàm Bool theo n biến $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Khi đó:

- kar(fg) = kar(f) ∩ kar(g)
- kar($f \vee g$) = kar(f) ∪ kar(g)
- kar(f) gồm đúng một ô khi và chỉ khi f là một từ tối thiểu

Định nghĩa 3.22

Tế bào là hình chữ nhật (theo nghĩa rộng) gồm 2^{n-k} ô

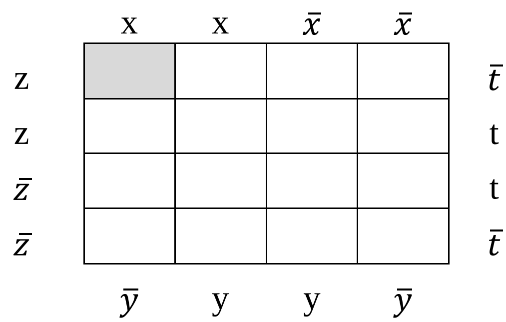
Cho hàm Bool f. Ta nói T là một tế bào lớn của kar(f) nếu T thoả hai tính chất sau:

- T là một tế bào và T ⊆ kar(f).
- Không tồn tại tế bào T' nào thỏa T' ≠ T và T ⊆ T' ⊆ kar(f)

Nếu T là một tế bào thì T là biểu đồ Karnaugh của một đơn thức duy nhất m, cách xác định m như sau: lần lượt chiếu T lên các cạnh, nếu toàn bộ hình chiếu nằm trọn trong một từ đơn nào thì từ đơn đó mới xuất hiện trong m.

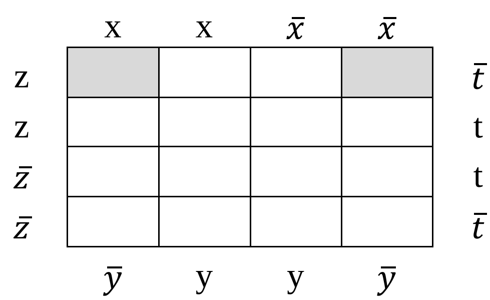
Ví dụ 3.78

a. Biểu đồ Karnaugh của đơn thức $x\bar{y}z\bar{t}$



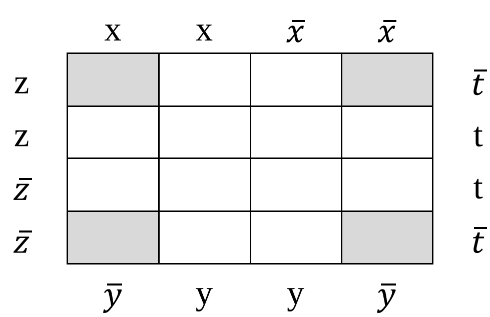
Hình 3.6: Biểu đồ Karnaugh của Ví dụ 3.78a

b. Biểu đồ Karnaugh của đơn thức $\bar{y}z\bar{t}$



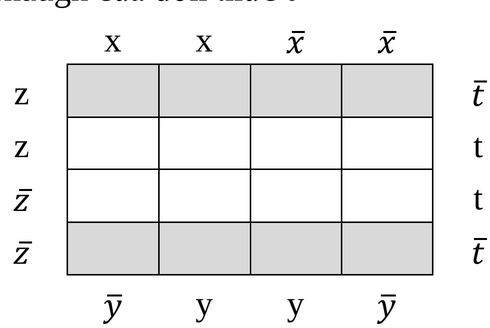
Hình 3.7: Biểu đồ Karnaugh của Ví dụ 3.78b

c. Biểu đồ Karnaugh của đơn thức $\bar{y}\bar{t}$



Hình 3.8: Biểu đồ Karnaugh của Ví dụ 3.78c

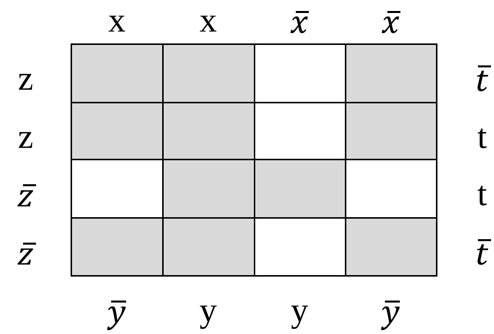
d. Hình 3.9: Biểu đồ Karnaugh của đơn thức $\bar{t}$



Hình 3.9: Biểu đồ Karnaugh của Ví dụ 3.78d

Ví dụ 3.79

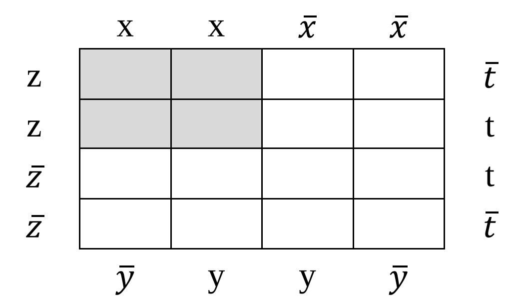
Xét hàm Boole theo 4 biến x, y, z, t có biểu đồ Karnaugh như sau:



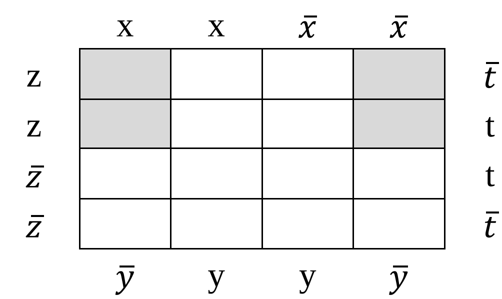
Hình 3.10: Biểu đồ Karnaugh của Ví dụ 3.79

Xác định các tế bào lớn của hàm kar(f)?

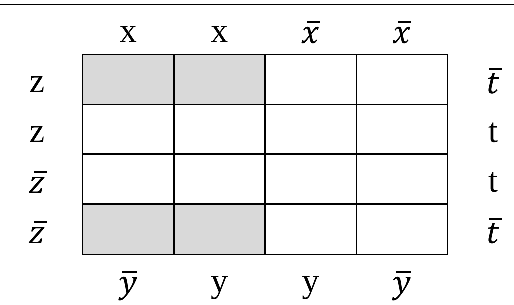
Hướng dẫn: kar(f) có 6 tế bào lớn sau đây:



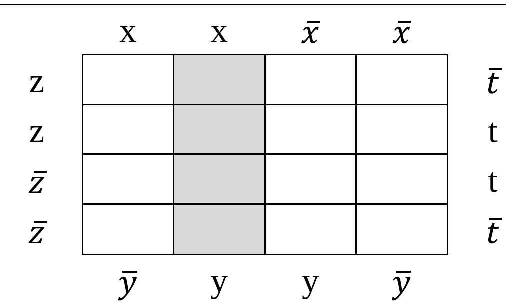
xz



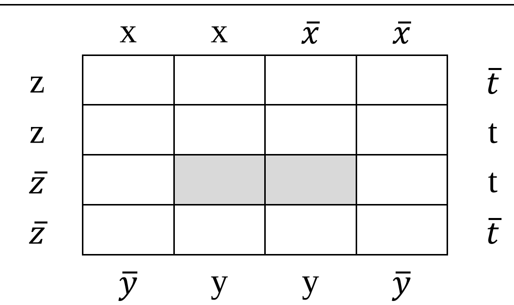
$\bar{y}$z



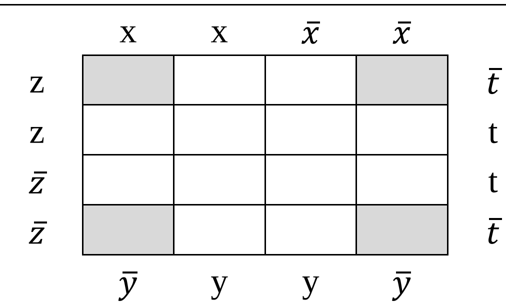
$x\,\bar{t}$



xy



y$\bar{z}$t



$\bar{y}\bar{t}$

Thuật toán Karnaugh

Bước 1: Vẽ biểu đồ Karnaugh của f.

Bước 2: Xác định tất cả các tế bào lớn của kar(f).

Bước 3: Xác định các tế bào lớn m nhất thiết phải chọn.

Ta nhất thiết phải chọn tế bào lớn T khi tồn tại một ô của kar(f) mà ô này chỉ nằm trong tế bào lớn T và không nằm trong bất kỳ tế bào lớn nào khác.

Bước 4: Xác định các phủ tối thiểu gồm các tế bào lớn.

Nếu các tế bào lớn chọn được ở bước 3 đã phủ được kar(f) thì ta có duy nhất một phủ tối thiểu gồm các tế bào lớn của kar(f).

Nếu các tế bào lớn chọn được ở bước 3 chưa phủ được kar(f) thì:

+ Xét một ô chưa bị phủ, sẽ có ít nhất hai tế bào lớn chứa ô này, ta chọn một trong các tế bào lớn này. Cứ tiếp tục như thế ta sẽ tìm được tất cả các phủ gồm các tế bào lớn của kar(f).

+ Loại bỏ các phủ không tối thiểu, ta tìm được tất cả các phủ tối thiểu gồm các tế bào lớn của kar(f).

Bước 5: Xác định các công thức đa thức tối thiểu của f.

Từ các phủ tối thiểu gồm các tế bào lớn của kar(f) tìm được ở bước 4 ta xác định được các công thức đa thức tương ứng của f

Loại bỏ các công thức đa thức mà có một công thức đa thức nào đó thực sự đơn giản hơn chúng.

Các công thức đa thức còn lại chính là các công thức đa thức tối thiểu của f.

Ví dụ 3.80

Tìm các công thức tối thiểu đa thức của hàm Boole sau đây:

$$f(x,y,z,t) = xyzt \vee x\bar{y} \vee x\bar{z} \vee yz \vee xy(\bar{z} \vee \bar{t})$$

Hướng dẫn:

$$f(x,y,z,t) = xyzt \vee x\bar{y} \vee x\bar{z} \vee yz \vee xy\bar{z} \vee xy\bar{t}$$

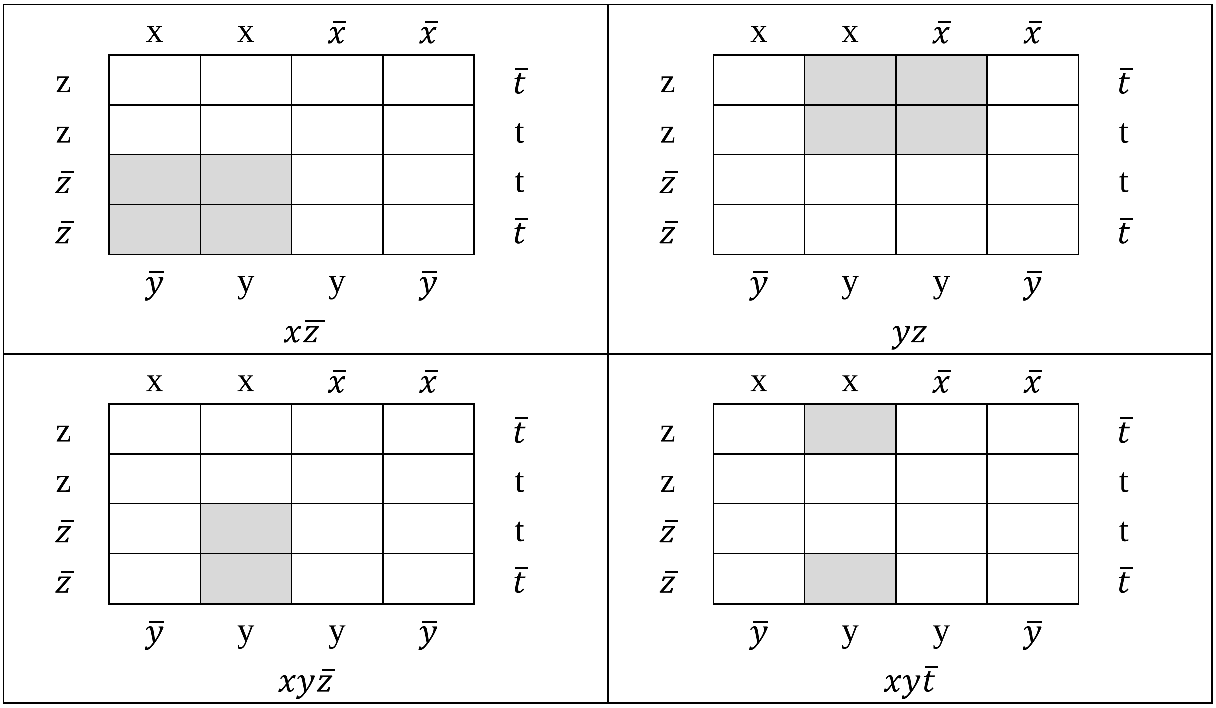
Xác định các đơn thức

	x	x	$\bar{x}$	$\bar{x}$	
z					$\bar{t}$
z					t
$\bar{z}$					t
$\bar{z}$					$\bar{t}$
	$\bar{y}$	y	y	$\bar{y}$	

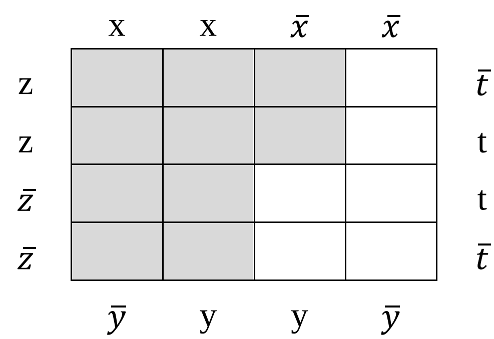
xyzt

	x	x	$\bar{x}$	$\bar{x}$	
z					$\bar{t}$
z					t
$\bar{z}$					t
$\bar{z}$					$\bar{t}$
	$\bar{y}$	y	y	$\bar{y}$	

$x\bar{y}$

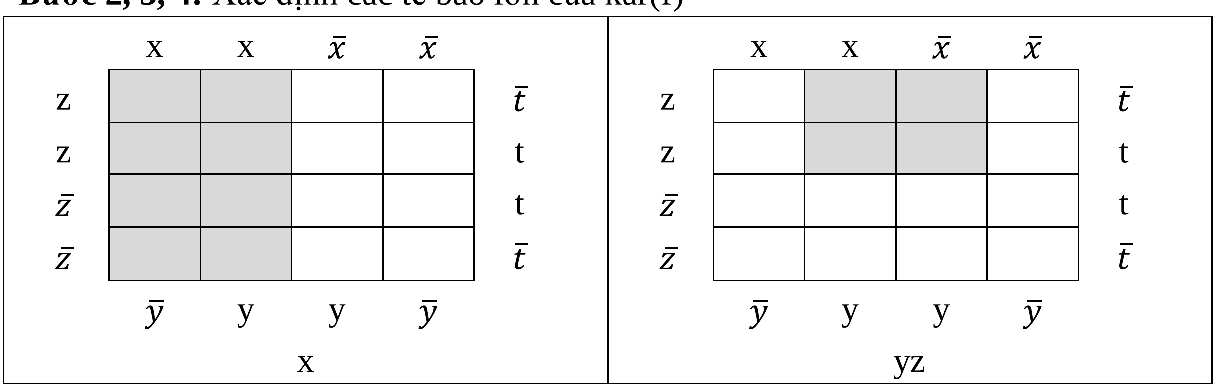


Bước 1: Vẽ biểu đồ Karnaugh



Hình 3.11: Biểu đồ Karnaugh của Ví dụ 3.80

Bước 2, 3, 4: Xác định các tế bào lớn của kar(f)



Bước 5: Ta được duy nhất một phủ tối thiểu gồm các tế bào lớn của kar(f): $x \vee yz$

CÂU HỎI VÀ BÀI TẬP CHƯƠNG 3

A. BÀI TẬP CÓ LỜI GIẢI

Bài tập 3.1

Điền vào các vị trí trống của phát biểu (b) để có cùng dạng logic với các phát biểu (a)

Câu 3.1.1

(a) Nếu tất cả các số nguyên là số hữu tỷ, thì số 1 là số hữu tỷ

Tất cả số nguyên là số hữu tỷ

Do đó, số 1 là số hữu tỷ.

(b) Nếu tất cả các biểu thức đại số đều được biểu diễn bằng các ký hiệu tiền tố, thì ....

....

Do đó, (a+2b) (a^2 – b) có thể được viết bằng các ký hiệu tiền tố.

Hướng dẫn:

Nếu tất cả các biểu thức đại số đều được biểu diễn bằng các ký hiệu tiền tố, thì *(a+2b) (a^2 – b) có thể được viết bằng các ký hiệu tiền tố.*

Tất cả các biểu thức đại số đều được biểu diễn bằng các ký hiệu tiền tố

Do đó, (a+2b) (a^2 – b) có thể được viết bằng các ký hiệu tiền tố.

Câu 3.1.2

(a) Nếu tất cả các chương trình máy tính đều chứa lỗi, thì chương trình này cũng chứa lỗi.

Chương trình này không chứa lỗi

Do đó, không phải tất cả các chương trình máy tính đều chứa lỗi

(b) Nếu..., thì ....

2 không phải là số lẻ.

Do đó, không phải tất cả các số nguyên tố đều là số lẻ.

Hướng dẫn:

Nếu *tất cả các số nguyên tố là số lẻ*, thì *2 là số lẻ*

2 không phải là số lẻ.

Do đó, không phải tất cả các số nguyên tố đều là số lẻ.

Bài tập 3.2

Thay thế các phát biểu sau đây bằng các mệnh đề logic, sử dụng các phép toán logic ¬, ∧, ∨

Câu 3.2.1

Đặt p = *"Cổ phiếu đang tăng giá"*, q = *"Lãi suất vẫn ổn định"*

a. "Cổ phiếu đang tăng giá, nhưng lãi suất vẫn ổn định"

Hướng dẫn:

$p\wedge q$

b. "Không phải cổ phiếu đang tăng giá, cũng không phải lãi suất đang ổn định"

Hướng dẫn:

$\neg p \wedge \neg q$

Bài tập 3.3

Xây dựng bảng giá trị chân lý cho các biểu thức logic sau đây:

a. $\neg(p \wedge q) \vee (p \vee q)$

Hướng dẫn:

Bảng giá trị chân lý của biểu thức logic được thể hiện như sau:

p	Q	$p \wedge q$	$p \vee q$	$\neg(p \wedge q)$	$\neg(p \wedge q) \vee (p \vee q)$
T	T	T	T	F	T
T	F	F	T	T	T
F	T	F	T	T	T
F	F	F	F	T	T

Kết quả của bảng giá trị chân lý chứng tỏ $\neg(p \wedge q) \vee (p \vee q)$ là một hằng đúng.

Cũng có thể chứng minh bằng các luật logic như sau (xem phần các luật logic)

$\neg(p \wedge q) \vee (p \vee q) \equiv(\neg p \vee \neg q) \vee (p \vee q)$ (Luật De Morgan)

$\equiv(p \vee \neg p) \vee (q \vee \neg q)$ (Luật kết hợp)

$\equiv T \vee T$ (Luật phần tử bù)

$\equiv T$ (Luật lũy đẳng)

b. $p \wedge (\neg q \vee r)$

Hướng dẫn:

Xây dựng bảng giá trị chân lý cho biểu thức logic với 3 biến mệnh đề p, q, r như sau:

p	Q	r	$\neg q$	$\neg q \vee r$	$p \wedge (\neg q \vee r)$
T	T	T	F	T	T
T	T	F	F	F	F
T	F	T	T	T	T
T	F	F	T	T	T
F	T	T	F	T	F
F	T	F	F	F	F
F	F	T	T	T	F
F	F	F	T	T	F

Bài tập 3.4

Kiểm tra tính tương đương logic của các biểu thức sau đây? (Câu trả lời là có hoặc không bằng cách xây dựng bảng giá trị chân lý).

a. $\neg(p \wedge q)$ và $(\neg p \wedge \neg q)$

Hướng dẫn:

Xây dựng bảng giá trị chân lý cho 2 biểu thức như sau:

p	q	$\neg p$	$\neg q$	$p \wedge q$	$\neg(p \wedge q)$	$\neg p \wedge \neg q$
T	T	F	F	T	T	F
T	F	F	T	F	T	F
F	T	T	F	F	T	F
F	F	T	T	F	F	T

Rõ ràng, hai biểu thức này không tương đương logic

b. $p \wedge (q \vee r)$ và $(p \wedge q) \vee (p \wedge r)$

Hướng dẫn:

Xây dựng bảng giá trị chân lý cho biểu thức với 3 biến mệnh đề p, q, r:

p	q	r	$q \vee r$	$p \wedge q$	$p \wedge r$	$p \wedge (q \vee r)$	$(p \wedge q) \vee (p \wedge r)$
T	T	T	T	T	T	T	T
T	T	F	T	T	F	T	T

T	F	T	T	F	T	T	T
T	F	F	F	F	F	F	F
F	T	T	T	F	F	F	F
F	T	F	T	F	F	F	F
F	F	T	T	F	F	F	F
F	F	F	F	F	F	F	F

Tất cả các dòng của hai biểu thức có giá trị giống nhau. Do đó khẳng định hai biểu thức $p \wedge (q \vee r)$ và $(p \wedge q) \vee (p \wedge r)$ tương đương logic.

c. $(p \vee q) \vee (p \wedge r)$ và $(p \vee q) \wedge r$

Hướng dẫn:

Xây dựng bảng giá trị chân lý cho biểu thức với ba biến mệnh đề p, q, r:

p	q	r	$p \vee q$	$p \wedge r$	$(p \vee q) \vee (p \wedge r)$	$(p \vee q) \wedge r$
T	T	T	T	T	T	T
T	T	F	T	F	T	F
T	F	T	T	T	T	T
T	F	F	T	F	T	F
F	T	T	T	F	T	T
F	T	F	T	F	T	F
F	F	T	F	F	F	F
F	F	F	F	F	F	F

Giá trị các dòng của hai biểu thức không giống nhau hoàn toàn, do đó hai biểu thức không tương đương logic.

Bài tập 3.5

Sử dụng luật De Morgan, viết phủ định cho các phát biểu sau đây:

a. Nam là một giáo sư Toán học và chị gái Nam là một giáo sư Khoa học máy tính.

Hướng dẫn:

p= *"Nam là giáo sư Toán học"*
q= *"Chị gái Nam là giáo sư Khoa học máy tính"*
Biểu thức logic của phát biểu trên là $p \wedge q$

$$\neg(p \wedge q) = \neg p \vee \neg q$$

Do đó phủ định của phát biểu trên được viết lại như sau: *"Nam không phải là giáo sư Toán học hoặc chị gái Nam không phải là giáo sư Khoa học máy tính"*

b. Đồng đô la đang ở mức cao nhất mọi thời đại hoặc thị trường chứng khoán đang ở mức thấp nhất.

Hướng dẫn:

Đặt p = *"Đồng đô la đang ở mức cao nhất mọi thời đại";*

q = *"Thị trường chứng khoán đang ở mức thấp nhất";*

Biểu thức logic của phát biểu trên là $p \vee q$

$$\neg(p \vee q) = \neg p \wedge \neg q$$

Do đó phủ định của phát biểu trên được viết như sau: "*Không phải đồng đô la đang ở mức cao nhất mọi thời đại và cũng không phải thị trường chứng khoán đang ở mức thấp nhất*".

Bài tập 3.6

Sử dụng bảng giá trị chân lý, xác định các biểu thức logic sau đây là hằng đúng hay hằng sai:

a. $(p \wedge q) \vee \big(\neg p \vee (p \wedge \neg q)\big)$

Hướng dẫn:

Xây dựng bảng giá trị chân lý cho biểu thức:

P	q	$\neg p$	$\neg q$	$p \wedge q$	$p \wedge \neg q$	$\big(\neg p \vee (p \wedge \neg q)\big)$	$(p \wedge q) \vee \big(\neg p \vee (p \wedge \neg q)\big)$
T	T	F	F	T	F	F	T
T	F	F	T	F	T	T	T
F	T	T	F	F	F	T	T
F	F	T	T	F	F	T	T

Do đó, $(p \wedge q) \vee \big(\neg p \vee (p \wedge \neg q)\big)$ là một hằng đúng.

b. $A = ((\neg p \wedge q) \wedge (q \wedge r)) \wedge \neg q$

Hướng dẫn:

Xây dựng bảng giá trị chân lý cho biểu thức với ba biến mệnh đề p, q, r, bảng gồm có tám dòng:

p	Q	r	$\neg p$	$\neg q$	$\neg p \wedge q$	$q \wedge r$	$(\neg p \wedge q) \wedge (q \wedge r)$	Biểu thức A
T	T	T	F	F	F	T	F	F

T	T	F	F	F	F	F	F	F
T	F	T	F	T	F	F	F	F
T	F	F	F	T	F	F	F	F
F	T	T	T	F	T	T	T	F
F	T	F	T	F	T	F	F	F
F	F	T	T	T	F	F	F	F
F	F	F	T	T	F	F	F	F

Giá trị các dòng của biểu thức A bằng F với mọi cặp giá trị của các biến mệnh đề p, q, r. Do đó, A là hằng sai.

Bài tập 3.7

Định nghĩa phép loại trừ ⊕ như sau:

$$p \oplus q \equiv (p \vee q) \wedge \neg(p \wedge q)$$

Bảng giá trị chân lý của phép loại trừ được thể hiện:

P	Q	$p \oplus q$
T	T	F
T	F	T
F	T	T
F	F	F

Cho biết $(p \ \oplus q\ ) \oplus r \equiv p \oplus (q \oplus r)$? Lập luận và cho biết câu trả lời của bạn.

Hướng dẫn:

Lập bảng giá trị chân lý với ba biến mệnh đề p, q, r.

P	q	r	$p \oplus q$	$q \oplus r$	$(p \oplus q) \oplus r$	$p \oplus (q \oplus r)$
T	T	T	F	F	T	T
T	T	F	F	T	F	F
T	F	T	T	T	F	F
T	F	F	T	F	T	T
F	T	T	T	F	F	F
F	T	F	T	T	T	T
F	F	T	F	T	T	T
F	F	F	F	F	F	F

Khẳng định: $(p \oplus q) \oplus r \equiv p \oplus (q \oplus r)$

Bài tập 3.8

Chứng minh rằng các biểu thức sau đây tương đương logic:

$A = p \rightarrow q \vee r, B = p \wedge \neg q \rightarrow r$ và $C = p \wedge \neg r \rightarrow q$

Hướng dẫn:

Có hai cách để chứng minh các biểu thức trên tương đương logic, cách thứ nhất, sử dụng bảng giá trị chân lý, cách thứ hai, sử dụng luật logic

Cách 1: Lập bảng giá trị chân lý, bảng gồm tám dòng với ba biến mệnh đề p, q, r

p	q	r	$\neg q$	$\neg r$	$p \rightarrow q$	$p \wedge \neg q$	$p \wedge \neg r$	$p \rightarrow q \vee r$	$p \wedge \neg q \rightarrow r$	$p \wedge \neg r \rightarrow q$
T	T	T	F	F	T	F	F	T	T	T
T	T	F	F	T	T	F	T	T	T	T
T	F	T	T	F	F	T	F	T	T	T
T	F	F	T	T	F	T	T	F	F	F
F	T	T	F	F	T	F	F	T	T	T
F	T	F	F	T	T	F	F	T	T	T
F	F	T	T	F	T	F	F	T	T	T
F	F	F	T	T	T	F	F	T	T	T

Giá trị các dòng trong bảng giá trị chân lý của 3 biểu thức giống hệt nhau, do đó khẳng định 3 biểu thức trên tương đương logic.

Cách 2: Sử dụng luật logic

$A = p \rightarrow q \vee r$

$\equiv \neg p \vee q \vee r$ (Luật kéo theo)

$B = (p \wedge \neg q) \rightarrow r$

$\equiv \neg(p \wedge \neg q) \vee r$ (Luật kéo theo)

$\equiv (\neg p \vee \neg(\neg q)) \vee r$ (Luật De Morgan)

$\equiv (\neg p \vee q) \vee r$ (Luật phủ định của phủ định)

$\equiv \neg p \vee q \vee r$

$C = (p \wedge \neg r) \rightarrow q$

$\equiv \neg(p \wedge \neg r) \vee q$ (Luật kéo theo)

$\equiv (\neg p \vee \neg\neg r) \vee q$ (Luật De Morgan)

$\equiv (\neg p \vee r) \vee q$ (Luật phủ định của phủ định)

$\equiv \neg p \vee q \vee r$ (Luật kết hợp)

A, B, C tương đương logic với biểu thức $\neg p \vee q \vee r$, do đó A, B, C tương đương logic với nhau.

Bài tập 3.9

Xác định hai biểu thức logic sau đây có tương đương logic?

a. $p \to (q \to r)$ và $(p \to q) \to r$

Hướng dẫn:

Xây dựng bảng giá trị chân lý cho ba biến mệnh đề p, q, r như sau:

p	q	R	$p \to q$	$q \to r$	$p \to (q \to r)$	$(p \to q) \to r$
T	T	T	T	T	T	T
T	T	F	T	F	F	F
T	F	T	F	T	T	F
T	F	F	F	T	T	T
F	T	T	T	T	T	T
F	T	F	T	F	T	F
F	F	T	T	T	T	T
F	F	F	T	T	T	F

Kết luận: 2 biểu thức $p \to (q \to r)$ và $(p \to q) \to r$ không tương đương logic

Bài tập 3.10

Sử dụng $p \to q \equiv \neg p \vee q$ và $p \leftrightarrow q \equiv (\neg p \vee q) \wedge (\neg q \vee p)$ viết lại biểu thức logic mà không sử dụng phép $\to$, $\leftrightarrow$

$p \vee \neg q \to r \vee q$

Hướng dẫn:

$p \vee \neg q \to r \vee q \equiv \neg(p \vee \neg q) \vee (r \vee q)$ (Luật kéo theo)

$\equiv (\neg p \wedge \neg(\neg q)) \vee (r \vee q)$ (Luật De Morgan)

$\equiv (\neg p \wedge q) \vee (r \vee q)$

Bài tập 3.11

Sử dụng các luật logic chứng minh biểu thức sau đây là hằng đúng

$((p \wedge q) \leftrightarrow p) \rightarrow (p \rightarrow q)$

Hướng dẫn:

$((p \wedge q) \leftrightarrow p) \rightarrow (p \rightarrow q)$

$\equiv (((p \wedge q) \rightarrow p) \wedge (p \rightarrow (p \wedge q)) \rightarrow (p \rightarrow q)$ (Luật tương đương)

$\equiv (\neg(p \wedge q) \vee p) \wedge \big(\neg p \vee (p \wedge q)\big) \rightarrow (p \rightarrow q)$ (Luật kéo theo)

$\equiv \big((\neg p \vee \neg q) \vee p\big) \wedge \big(\neg p \vee (p \wedge q)\big) \rightarrow (p \rightarrow q)$ (Luật De Morgan)

$\equiv \big((\neg p \vee p) \vee \neg q\big) \wedge \big(\neg p \vee (p \wedge q)\big) \rightarrow (p \rightarrow q)$ (Luật kết hợp)

$\equiv (T \vee \neg q) \wedge \big(\neg p \vee (p \wedge q)\big) \rightarrow (p \rightarrow q)$ (Luật phần tử bù)

$\equiv (T) \wedge \big(\neg p \vee (p \wedge q)\big) \rightarrow (p \rightarrow q)$ (Luật thống trị)

$\equiv \big(\neg p \vee (p \wedge q)\big) \rightarrow (p \rightarrow q)$ (Luật trung hòa)

$\equiv \big((\neg p \vee p) \wedge (\neg p \vee q)\big) \rightarrow (p \rightarrow q)$ (Luật phân phối)

$\equiv \big(T \wedge (\neg p \vee q)\big) \rightarrow (p \rightarrow q)$ (Luật phần tử bù)

$\equiv \big((\neg p \vee q)\big) \rightarrow (p \rightarrow q)$ (Luật trung hòa)

$\equiv (p \rightarrow q) \rightarrow (p \rightarrow q)$ (Luật kéo theo)

Đặt $E = (p \rightarrow q)$

$\equiv E \rightarrow E$

$\equiv \neg E \vee E$ (Luật kéo theo)

$\equiv T$

Bài tập 3.12

Chứng minh rằng:

$$\neg(\neg p \vee (p \wedge q)) \equiv p \wedge \neg q$$

Hướng dẫn:

Biến đổi vế trái để được biểu thức vế phải

$\neg(\neg p \vee (p \wedge q)) \equiv \neg(\neg p) \wedge \neg(p \wedge q)$ (Luật De Morgan)

$\equiv p \wedge (\neg p \vee \neg q)$ (Luật De Morgan)

$\equiv (p \wedge \neg p) \vee (p \wedge \neg q)$ (Luật kết hợp)

$\equiv F \vee (p \wedge \neg q)$ (Luật phần tử bù)

$\equiv (p \wedge \neg q)$ (Luật trung hòa)

Bài tập 3.13

Chỉ ra các bước suy diễn của suy luận dưới đây?

Tiền đề	
$\mathbf{A} \rightarrow \mathbf{B} \wedge (\mathbf{C} \vee \mathbf{D})$	**(a)**
A	**(b)**
$\neg C$	**(c)**
Kết luận:	
D	

Hướng dẫn:

Sử dụng các quy tắc suy diễn để chứng minh

Bước	**Tiền đề và Kết luận**	**Quy tắc sử dụng**
1	$\mathbf{A} \rightarrow \mathbf{B} \wedge (\mathbf{C} \vee \mathbf{D})$ **A** $\therefore \mathbf{B} \wedge (\mathbf{C} \vee \mathbf{D})$	(a) Tiền đề *(b)* Tiền đề *Quy tắc khẳng định*
2	$\mathbf{B} \wedge (\mathbf{C} \vee \mathbf{D})$ $\therefore \mathbf{C} \vee \mathbf{D}$	Kết luận của bước 1 *Quy tắc rút gọn*
3	$\mathbf{C} \vee \mathbf{D}$ $\neg C$ D	Kết luận của bước 2 *(e)* Tiền đề Tam đoạn luận rời

Bài tập 3.14

Hãy chỉ ra phương pháp suy luận, cho biết các suy luận đó có hợp lý hay không? Giải thích bằng cách quy tắc suy diễn

Chủ nhật tuần vừa rồi cô ấy không về nhà

Nếu cô ấy về nhà thì kiểu gì cô ấy cũng ra bờ ao

Nếu ra bờ ao kiểu gì cô ấy cũng ra gốc cây đó

Nếu ra gốc cây thì cô ấy đã nhìn thấy cái lược và mang nó đi

Thế mà cái lược vẫn còn đó.

Hướng dẫn:

Thiết lập các biến mệnh đề sau đây:

p = "Cô ấy về nhà"

q = "Cô ấy ra bờ ao"

r = "Cô ấy ra gốc cây"

t = "Cô ấy nhìn thấy cái lược"

s = "Cô ấy mang cái lược đi"

Phát biểu	**Biểu thức**	
Nếu cô ấy về nhà thì kiểu gì cô ấy cũng ra bờ ao	$p \rightarrow q$	*(a)*
Nếu ra bờ ao kiểu gì cô ấy cũng ra gốc cây đó	$q \rightarrow r$	*(b)*
Nếu ra gốc cây thì cô ấy đã nhìn thấy cái lược và mang nó đi	$r \rightarrow t$ $t \rightarrow s$	*(c)* *(d)*
Thế mà cái lược vẫn còn đó.	$\neg s$	*(e)*
Kết luận: *Chủ nhật tuần vừa rồi cô ấy không về nhà*	$\neg p$	

Các bước của suy luận:

Bước	**Tiền đề và Kết luận**	**Quy tắc sử dụng**
1	$p \rightarrow q$ $q \rightarrow r$ $\therefore p \rightarrow r$	(a) Tiền đề *(b)* Tiền đề *Tam đoạn luận giả định*
2	$p \rightarrow r$ $r \rightarrow t$ $t \rightarrow s$ $\therefore p \rightarrow s$	Kết luận của bước 1 (c) (d) *Tam đoạn luận giả định mở rộng*
3	$p \rightarrow s$ $\neg s$ $\therefore \neg p$	Kết luận của bước 2 *(e)* Tiền đề Modus Tollens

Suy luận trên hoàn toàn hợp lý.

Bài tập 3.15

Viết lại phát biểu sau đây bằng các phát biểu tương đương, nhưng không sử dụng các ký hiệu ∃ hoặc ∀

$\forall x \in R, x^2 \geq 0$

Hướng dẫn:

Tất cả các số thực đều có bình phương là một số không âm

Hoặc Mỗi số thực đều có bình phương là một số không âm

Hoặc Số thực bất kỳ đều có bình phương là một số không âm

Hoặc Bình phương của một số thực là một số không âm.

Bài tập 3.16

Viết lại các phát biểu có dạng sau: ∀x ∈ R, nếu P(x) thì Q(x), không sử dụng các lượng từ và các biến:

∀x ∈ R, nếu x > 2 thì $x^2 > 4$

Hướng dẫn:

Nếu một số thực lớn hơn 2 thì bình phương của nó lớn hơn 4

Hoặc Bình phương của bất kỳ số thực lớn hơn 2 đều lớn hơn 4

Hoặc Bình phương của tất cả các số thực lớn hơn 2 đều lớn hơn 4.

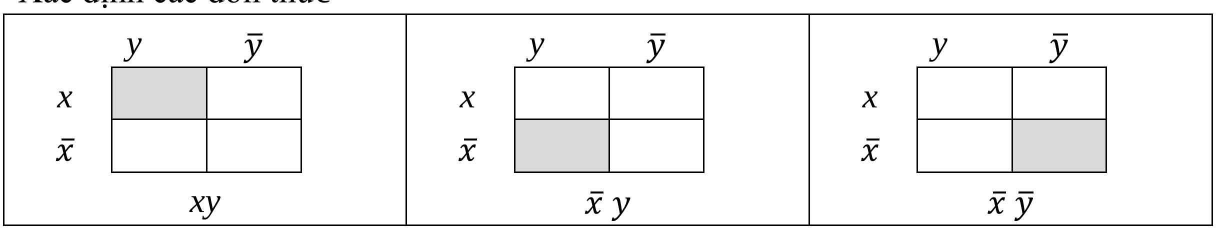
Bài tập 3.17

Tối thiểu hóa hàm Boole sau đây:

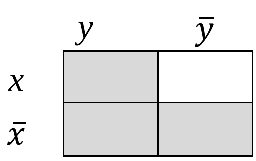
a. $xy \vee \bar{x}\, y \vee \bar{x}\, \bar{y}$

Hướng dẫn:

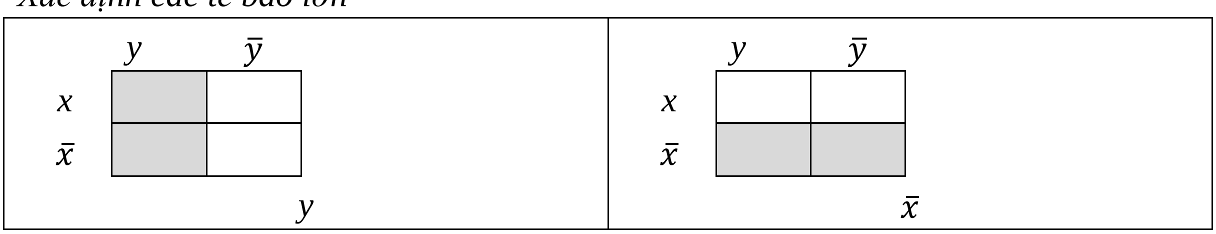
Xác định các đơn thức



Biểu đồ Karnaugh biểu diễn



Xác định các tế bào lớn

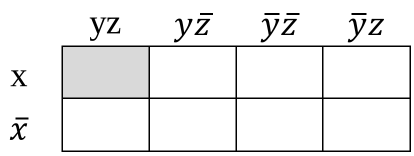


Do đó $xy \lor \bar{x}\,y \lor \bar{x}\,\bar{y}$ được thay bằng $\bar{x} \lor y$

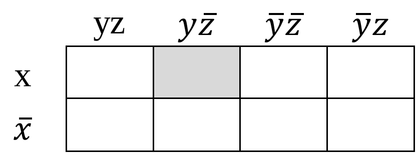
b. $xyz + xy\bar{z} + \bar{x}y\bar{z} + \bar{x}\,\bar{y}\,z$

Hướng dẫn:

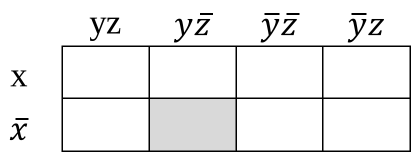
Xác định các đơn thức



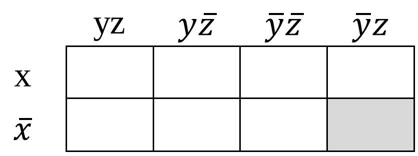
xyz



$xy\bar{z}$

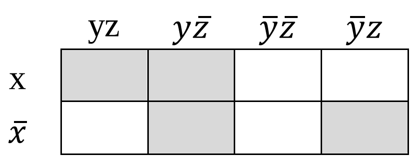


$\bar{x}y\bar{z}$

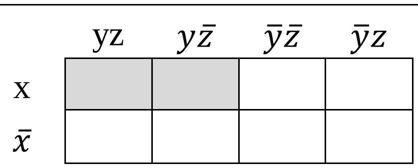


$\bar{x}\,\bar{y}\,z$

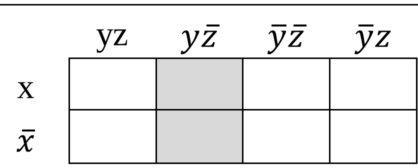
Biểu đồ Karnaugh biểu diễn biểu thức:



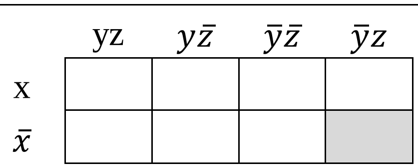
Xác định các tế bào lớn



xy



$y\bar{z}$



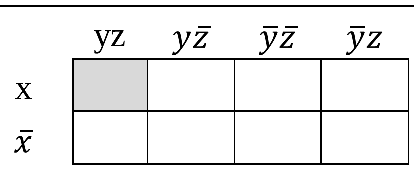
$\bar{x}\,\bar{y}\,z$

Do đó $xyz + xy\bar{z} + \bar{x}y\bar{z} + \bar{x}\,\bar{y}\,z$ được thay thế bằng xy + $y\bar{z}$ + $\bar{x}\,\bar{y}\,z$

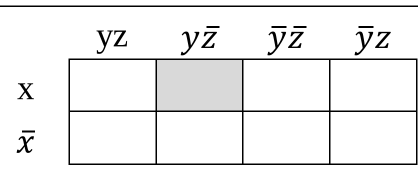
c. $xyz + xy\bar{z} + x\bar{y}z + \bar{x}yz + \bar{x}\,\bar{y}\,z$

Hướng dẫn:

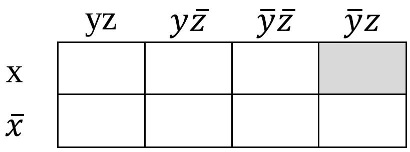
Xác định các đơn thức



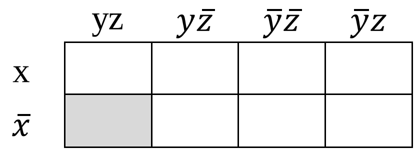
xyz



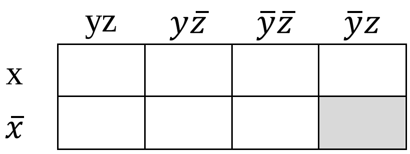
$xy\bar{z}$



$x\bar{y}z$

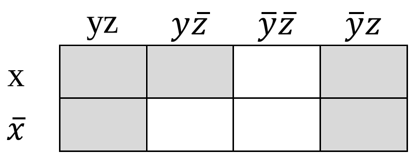


$\bar{x}yz$

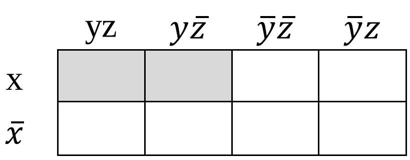


$\bar{x}\ \bar{y}\ z$

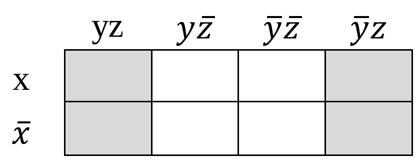
Biểu đồ Karnaugh biểu diễn biểu thức:



Xác định các tế bào lớn



xy



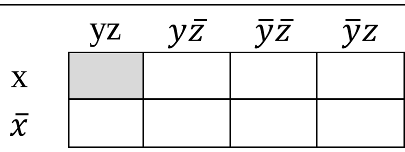
z

Do đó $xyz + xy\bar{z} + x\bar{y}z + \bar{x}yz + \bar{x}\ \bar{y}\ z$ được thay thế bởi xy + z

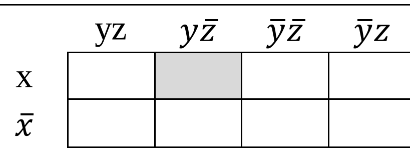
d. $xyz + xy\bar{z} + \bar{x}y\bar{z} + \bar{x}\ \bar{y}\ \bar{z} + \bar{x}\bar{y}z$

Hướng dẫn:

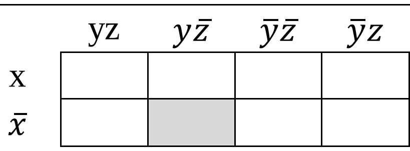
Xác định các đơn thức



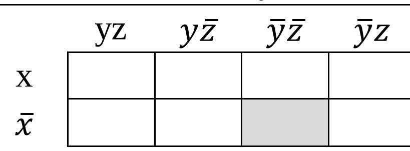
xyz



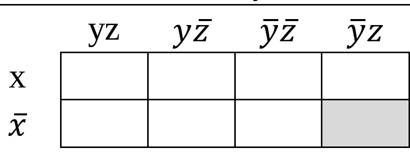
$xy\bar{z}$



$\bar{x}y\bar{z}$



$\bar{x}\bar{y}\bar{z}$



$\bar{x}\ \bar{y}\ z$

Biểu đồ Karnaugh biểu diễn biểu thức:

	yz	$y\bar{z}$	$\bar{y}\bar{z}$	$\bar{y}z$
x				
$\bar{x}$				

Xác định các tế bào lớn

Có hai cách xác định

Cách 1:

	yz	$y\bar{z}$	$\bar{y}\bar{z}$	$\bar{y}z$
x				
$\bar{x}$				

xy

	yz	$y\bar{z}$	$\bar{y}\bar{z}$	$\bar{y}z$
x				
$\bar{x}$				

$y\bar{z}$

	yz	$y\bar{z}$	$\bar{y}\bar{z}$	$\bar{y}z$
x				
$\bar{x}$				

$\bar{x}\,\bar{y}$

Do đó, $xyz + xy\bar{z} + \bar{x}y\bar{z} + \bar{x}\,\bar{y}\,\bar{z} + \bar{x}\bar{y}z$ được thay thế bằng xy + $y\bar{z}$ + $\bar{x}\,\bar{y}$

Cách 2:

	yz	$y\bar{z}$	$\bar{y}\bar{z}$	$\bar{y}z$
x				
$\bar{x}$				

xy

	yz	$y\bar{z}$	$\bar{y}\bar{z}$	$\bar{y}z$
x				
$\bar{x}$				

$\bar{x}\bar{z}$

	yz	$y\bar{z}$	$\bar{y}\bar{z}$	$\bar{y}z$
x				
$\bar{x}$				

$\bar{x}\,\bar{y}$

Do đó $xyz + xy\bar{z} + \bar{x}y\bar{z} + \bar{x}\,\bar{y}\,\bar{z} + \bar{x}\bar{y}z$ được thay thế bằng xy + $\bar{x}\bar{z}$ + $\bar{x}\,\bar{y}$

e. $xyzt + xyz\bar{t} + \bar{x}\,yzt + \bar{x}yz\bar{t}$

Hướng dẫn:

Xác định các đơn thức

	zt	$z\bar{t}$	$\bar{z}\,\bar{t}$	$\bar{z}\,t$
xy				
$x\bar{y}$				
$\bar{x}\,\bar{y}$				
$\bar{x}\,y$				

$xyzt$

	zt	$z\bar{t}$	$\bar{z}\,\bar{t}$	$\bar{z}\,t$
xy				
$x\bar{y}$				
$\bar{x}\,\bar{y}$				
$\bar{x}\,y$				

$xyz\bar{t}$

	zt	$z\bar{t}$	$\bar{z}\,\bar{t}$	$\bar{z}\,t$
xy				
$x\bar{y}$				
$\bar{x}\,\bar{y}$				
$\bar{x}\,y$				

$\bar{x}\,yzt$

	zt	$z\bar{t}$	$\bar{z}\,\bar{t}$	$\bar{z}\,t$
xy				
$x\bar{y}$				
$\bar{x}\,\bar{y}$				
$\bar{x}\,y$				

$\bar{x}yz\bar{t}$

Biểu đồ Karnaugh biểu diễn biểu thức:

	zt	$z\bar{t}$	$\bar{z}\,\bar{t}$	$\bar{z}\,t$
xy				
$x\bar{y}$				
$\bar{x}\,\bar{y}$				
$\bar{x}\,y$				

Xác định các tế bào lớn

	zt	$z\bar{t}$	$\bar{z}\,\bar{t}$	$\bar{z}\,t$
xy				
$x\bar{y}$				
$\bar{x}\,\bar{y}$				
$\bar{x}\,y$				

y +z

Do đó $xyzt + xyz\bar{t} + \bar{x}\,yzt + \bar{x}yz\bar{t}$ *được thay thế bằng y + z*

f. $x\bar{y} + xyz + \bar{x}\bar{y}\bar{z} + \bar{x}yz\,\bar{t}$

Hướng dẫn:

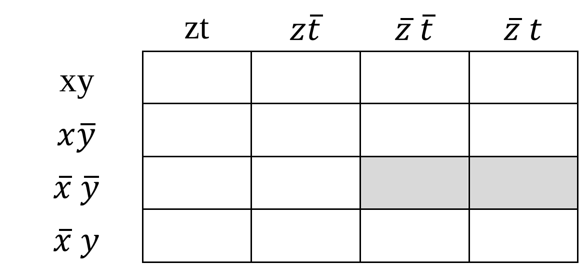
Xác định các đơn thức

	zt	$z\bar{t}$	$\bar{z}\,\bar{t}$	$\bar{z}\,t$
xy				
$x\bar{y}$				
$\bar{x}\,\bar{y}$				
$\bar{x}\,y$				

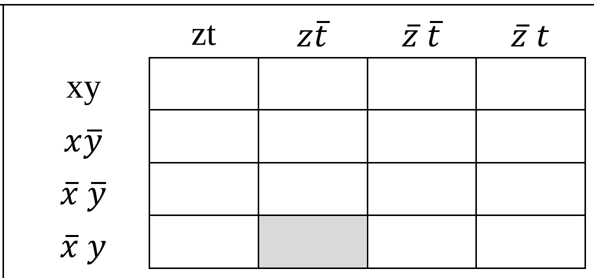
$x\bar{y}$

	zt	$z\bar{t}$	$\bar{z}\,\bar{t}$	$\bar{z}\,t$
xy				
$x\bar{y}$				
$\bar{x}\,\bar{y}$				
$\bar{x}\,y$				

xyz

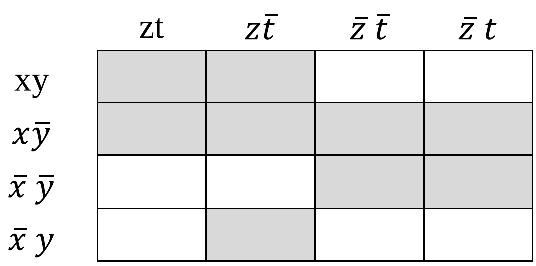


$\bar{x}\bar{y}\bar{z}$

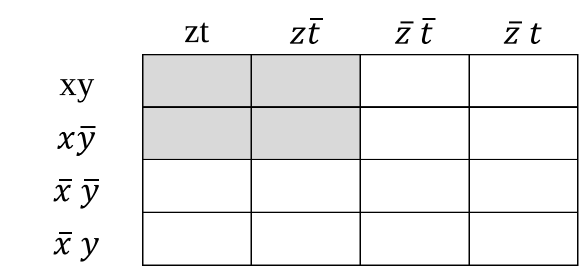


$\bar{x}yz\,\bar{t}$

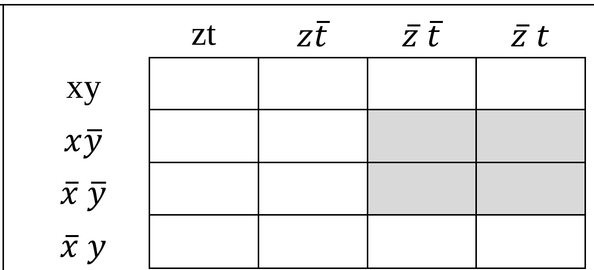
Biểu đồ Karnaugh biểu diễn biểu thức:



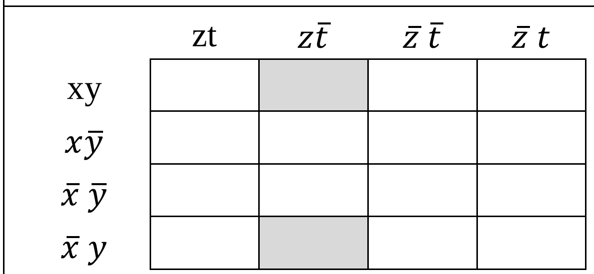
Xác định các tế bào lớn



xz



$\bar{y}\bar{z}$



$yz\bar{t}$

Do đó, $x\bar{y} + xyz + \bar{x}\bar{y}\bar{z} + \bar{x}yz\,\bar{t}$ được thay thế bởi $xz + \bar{y}\bar{z} + yz\bar{t}$

B. BÀI TẬP SINH VIÊN TỰ LÀM

Bài tập 3.18

Điền vào các vị trí trống của phát biểu (b) để có cùng dạng logic với các phát biểu (a)

(a) Nếu n chia hết cho 6, thì n chia hết cho 3.

Nếu n chia hết cho 3 thì tổng các chữ số của n chia hết cho 3

Do đó, nếu n chia hết cho 6 thì tổng các chữ số của n chia hết cho 3.

(Giả sử rằng n là số nguyên cố định, cụ thể)

(b) Nếu hàm này là ...., thì hàm này là hàm khả vi

Nếu hàm này là..............................., thì hàm này là hàm liên tục

Do đó, nếu hàm này là một đa thức, thì hàm này là ....

Bài tập 3.19

Thay thế các phát biểu sau đây bằng các mệnh đề logic, sử dụng các phép toán logic ¬, ∧, ∨

a. Đặt r = *"Nam là giáo sư Toán học",* s = *"Nam là giáo sư Khoa học máy tính".*

Phát biểu: "Nam là giáo sư Toán học, nhưng Nam không phải là giáo sư Khoa học máy tính".

b. Đặt p = "Đa thức có bậc bằng 2", q = "Đa thức có bậc bằng 3"

Phát biểu: "Đa thức này chỉ có bậc bằng 2, hoặc chỉ có bậc bằng 3"

c. **"**Bạn không thể chỉnh sửa mục được bảo mật của Wikipedia trừ khi bạn là quản trị viên"

Thể hiện câu trả lời với mệnh đề a = "Bạn có thể chỉnh sửa mục được bảo mật của Wikipedia", b = "Bạn là quản trị viên".

d. "Bạn chỉ được xem phim chỉ khi bạn trên 18 tuổi hoặc bạn được cha mẹ cho phép"

Thể hiện bằng biểu thức logic với các biến mệnh đề p = "Bạn được xem phim", q = "Bạn trên 18 tuổi ", r = "Được cha mẹ cho phép".

e. "Bạn chỉ có thể tốt nghiệp đại học nếu bạn đã hoàn thành đủ số tín chỉ, không nợ tiền học phí và trả hết sách đã mượn cho thư viện"

Thể hiện bằng biểu thức logic với các biến mệnh đề p = "Bạn có thể tốt nghiệp", q = "Bạn hoàn thành đủ số tín chỉ", r = "Nợ tiền học phí", t = "Trả hết sách đã mượn cho thư viện".

Bài tập 3.20

Xây dựng bảng giá trị chân lý cho các biểu thức logic sau đây:

a .$\neg p \wedge q$

b. $p \wedge (q \wedge r)$

Bài tập 3.21

Kiểm tra tính tương đương logic của các biểu thức sau đây? (Câu trả lời là có hoặc không bằng cách xây dựng bảng giá trị chân lý)

a. $p \vee (p \wedge q)$ và p

b. $p \vee t$ và t

c. $p \wedge t$ và p

d. $(p \wedge q) \wedge r$ và $p \wedge (q \wedge r)$

e. $(p \wedge q) \vee r$ và $p \wedge (q \vee r)$

Bài tập 3.22

Trong Ví dụ 3.26, nhà logic học Smullyan đã kể về một hòn đảo, các cư dân trên đảo chỉ gồm 2 loại người: Hiệp sĩ, những người luôn nói sự thật và nô lệ, những kẻ luôn nói dối. Bạn gặp 2 cư dân trên đảo, A và B. Xác định A, B thuộc kiểu người nào (nếu có thể), dựa vào các phát biểu của A và B. Nếu không thể xác định chính xác A, B, bạn có thể rút ra được kết luận nào khác?

a. A nói "Ít nhất một trong hai chúng tôi là nô lệ", B không nói gì.

b. A nói "Cả hai chúng tôi đều là hiệp sĩ" , B nói "A là nô lệ"

c. A nói "Tôi là một nô lệ hoặc B là hiệp sĩ", B không nói gì.

d. Cả A và B đều nói "Tôi là một hiệp sĩ"

e. A nói "Cả hai chúng tôi đều là nô lệ", B không nói gì.

Bài tập 3.23

Sử dụng luật De Morgan, viết phủ định cho các phát biểu sau đây:

a. Chữ số đơn vị của phép tính 4^{67} là 4 hoặc 6.

b. Chương trình này có lỗi trong 10 dòng đầu tiên hoặc nó đang được chạy với bộ dữ liệu không đầy đủ.

c. Tàu đến trễ hoặc đồng hồ của tôi chạy nhanh.

Bài tập 3.24

Sử dụng bảng giá trị chân lý, xác định các biểu thức logic sau đây là hằng đúng hay hằng sai:

a. $(p \wedge \neg q) \wedge (\neg p \vee q)$

b. $(\neg p \vee q) \vee (p \wedge \neg q)$

Bài tập 3.25

Định nghĩa phép loại trừ ⊕ như sau:

$$p \oplus q \equiv (p \vee q) \wedge \neg(p \wedge q)$$

Bảng giá trị chân lý của phép loại trừ được thể hiện:

P	Q	$p \oplus q$
T	T	F
T	F	T
F	T	T
F	F	F

a. Tìm kiếm 1 biểu thức logic đơn giản hơn tương đương logic với $p \oplus p$, $(p \oplus p) \oplus p$

b. Cho biết $(p \oplus q) \wedge r \equiv (p \wedge r) \oplus (q \wedge r)$? Lập luận và cho biết câu trả lời của bạn.

Bài tập 3.26

Sử dụng bảng giá trị chân lý, chứng minh rằng:

a. $p \rightarrow q \equiv \neg p \vee q$

b. $\neg(p \rightarrow q) \equiv p \wedge \neg q$

Bài tập 3.27

Viết lại các phát biểu sau đây ở dạng biểu thức? Kiểm tra tính tương đương logic của các biểu thức thu được?

"Nếu 2 là ước số của n, 3 là ước số của n thì 6 là ước số của n"

"Nếu 2 không là ước số của n, 3 không là ước số của n thì 6 không là ước số của n".

Bài tập 3.28

Sử dụng $p \rightarrow q \equiv \neg p \vee q$ và $p \leftrightarrow q \equiv (\neg p \vee q) \wedge (\neg q \vee p)$ viết lại các biểu thức logic mà không sử dụng phép →, ↔

a. $p \wedge \neg q \rightarrow r$

b. $(p \rightarrow r) \leftrightarrow (q \rightarrow r)$

Bài tập 3.29

Nếu P và Q là hai biểu thức tương đương logic là $P \leftrightarrow Q$ là một hằng đúng. Ngược lại nếu $P \leftrightarrow Q$ là một hằng đúng, thì P và Q tương đương logic. Sử dụng phép kéo theo hai chiều ↔, để chuyển đổi các tương đương logic sau đây về một hằng đúng. Sau đó lập bảng giá trị chân lý để xác minh:

a. $p \rightarrow (q \vee r) \equiv (p \wedge \neg q) \rightarrow r$

b. $p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$

c. $p \rightarrow (q \rightarrow r) \equiv (p \wedge q) \rightarrow r$

Bài tập 3.30

Chứng minh rằng:

$((p \lor q) \land (\neg p \lor q)) \rightarrow q$ là một hằng đúng

a. Bằng cách lập bảng giá trị chân lý.

b. Bằng các luật logic.

Bài tập 3.31

Sử dụng các luật logic chứng minh các biểu thức sau đây là hằng đúng

a. $(p \lor q) \rightarrow (p \land q)$

b. $(p \rightarrow (q \land r)) \rightarrow ((p \rightarrow q) \land (p \rightarrow r))$

c. $(\neg(p \land q) \land p) \rightarrow \neg q$

Bài tập 3.32

Cho chứng minh sau đây, sử dụng các luật logic, trong tương bước biến đổi, hãy chỉ các luật được sử dụng

Câu a.

$(p \land \neg q) \lor (p \land q)$

$\equiv p \land (\neg q \lor q)$ *(Luật…….)*

$\equiv p \land (q \lor \neg q)$ *(Luật…….)*

$\equiv p \land T$ *(Luật…….)*

$\equiv p$ *(Luật…….)*

Câu b.

$(p \lor \neg q) \land (\neg p \lor \neg q)$

$\equiv (\neg q \lor p) \land (\neg q \lor \neg p)$ *(Luật…….)*

$\equiv \neg q \lor (p \land \neg p)$ *(Luật…….)*

$\equiv \neg q \lor F$ *(Luật…….)*

$\equiv \neg q$ *(Luật…….)*

Bài tập 3.33

Chứng tỏ các biểu thức sau đây:

a. $\neg(p \lor \neg q) \lor (\neg p \lor \neg q) \equiv \neg p$

b. $\neg((\neg p \land q) \lor (\neg p \land \neg q)) \lor (p \land q) \equiv p$

Bài tập 3.34

Sử dụng quy tắc Modus Ponens và Modus Tollens, điền vào các chỗ trống, để tạo ra các kết luận hợp lý

a. Nếu $\sqrt{2}$ là số hữu tỷ, thì tồn tại bộ số nguyên a, b để $\sqrt{2} = \frac{a}{b}$

Không tồn tại bộ số nguyên a, b để $\sqrt{2} = \frac{a}{b}$

∴ ____

b. Nếu hình này là một hình tứ giác, thì tổng các góc của nó bằng 360^0

Tổng các góc của nó không bằng 360^0

∴ ____

c. Nếu họ không biết địa chỉ này, họ đã gọi điện.

____

∴Họ đã biết về địa chỉ này.

Bài tập 3.35

Hãy chỉ ra phương pháp suy luận, cho biết các suy luận đó có hợp lý hay không? Giải thích bằng cách quy tắc suy diễn.

Tôi phải đi học thêm ngoại ngữ

Nếu sau khi tốt nghiệp mà tôi không có chứng chỉ ngoại ngữ thì tôi sẽ khó xin được việc làm.

Nếu không xin được việc làm thì tôi sẽ không ổn định được cuộc sống riêng

Nếu không ổn định được cuộc sống riêng thì cô ấy sẽ không lấy tôi

Bây giờ cô ấy đã là vợ của tôi.

Bài tập 3.36

Chuyển biểu thức sau sang chuẩn tắc hội hoặc chuẩn tắc tuyển

a. $(p \to q) \to r$

b. $(p \leftrightarrow q)$

Bài tập 3.37

Sử dụng các luật logic, xác định dạng chuẩn tắc hội hoặc chuẩn tắc tuyển của các biểu thức sau đây:

a. $(\mathrm{p} \vee \mathrm{q}) \wedge (\mathrm{p} \wedge \mathrm{r})$

b. $(\mathrm{p} \to \mathrm{q}) \to \mathrm{r}$

c. $p \leftrightarrow q$

ĐẠI SỐ BOOLE

Bài tập 3.38

Xác định hàm F(x, y, z) , biết rằng F(x, y, z) = 1 khi và chỉ khi:

a. x = y = 0, z = 1

b. x = 0, y = 1, z = 0

c. x = 0, y = z = 1.

d. x = y= z = 0

Bài tập 3.39

Xác định dạng chuẩn tắc của hàm f(x, y, z) của các hàm sau đây:

a. F (x, y, z) = x + y + z
b. F (x, y, z) = (x + z)y
c. F (x, y, z) = x
d. F (x, y, z) = x $\bar{y}$

Bài tập 3.40

Hãy xác định công thức tối thiểu của hàm Boole sau đây:

$$f(x, y, z, t) = xz(\bar{y} \vee \bar{t}) \vee \bar{x}\,\bar{z}\,\bar{t} \vee z(yt \vee \bar{x}\,\bar{y})$$

Bài tập 3.41

Sử dụng biểu đồ Karnaugh, tối thiểu hóa các biểu thức sau đây:

a. $xy + x\bar{y}$

b. $xy + \bar{x}y + \bar{x}\bar{y}$

c. $x\bar{y} + \bar{x}\bar{y}$

d. $xyz + xy\bar{z} + x\bar{y}z$

e. $xy\bar{z} + x\bar{y}z + x\bar{y}\,\bar{z} + \bar{x}yz + \bar{x}y\bar{z} + \bar{x}\,\bar{y}z$

f. $xyz + xy\bar{z} + \bar{x}\,yz + \bar{x}\,\bar{y}z$

g. $xyz + xy\bar{z} + x\bar{y}\,z + x\bar{y}\,\bar{z} + \bar{x}\,\bar{y}z$

e. $xyzt + xy\bar{z}t + xyz\bar{t} + \bar{x}\bar{y}\,zt + \bar{x}\,yz\bar{t}$

f. $xy\bar{z}t + x\bar{y}zt + x\bar{y}\bar{z}t + \bar{x}yzt + \bar{x}\,y\bar{z}t + \bar{x}\,yz\bar{t} + \bar{x}\,\bar{y}\,\bar{z}\,\bar{t}$

TÀI LIỆU THAM KHẢO

[1]. **GS.TS. Nguyễn Hữu Anh**, Giáo trình Toán rời rạc, NXB Lao động Xã hội, 1995.

[2]. **Ngô Đắc Tân,** Lý thuyết tổ hợp và đồ thị, NXB Đại học Quốc gia Hà Nội, 2003.

[3]. **Kenneth H. Rosen,** Discrete Mathematics and Its Applications, Seventh Edition, Monmouth University, 2012.

[4]. **Susanna S. Epp,** Discrete Mathematics with Applications, Fourth Edition, DePaul University, 2010.

[5]. **Robin J. Wilson,** Introduction to Graph Theory, Fourth Edition, Longman Group Ltd, 1996.

[6]. **Mordechai Ben-Ari,** Mathematical Logic for Computer Science, Third Edition, Springer-Verlag London 2009, 2012.

NHÀ XUẤT BẢN KHOA HỌC TỰ NHIÊN VÀ CÔNG NGHỆ
Nhà A16 - Số 18 Hoàng Quốc Việt, Cầu Giấy, Hà Nội
Điện thoại: Phòng Phát hành: **024.22149040**;
Phòng Biên tập: **024.37917148**;
Phòng Quản lý Tổng hợp: **024.22149041**;
Fax: **024.37910147**; Email: **nxb@vap.ac.vn**; Website: **www.vap.ac.vn**

TOÁN RỜI RẠC

Lê Chí Luận (Chủ biên)
Lê Trung Kiên, Đoàn Thị Thanh Hằng, Phạm Quang Dũng

Chịu trách nhiệm xuất bản
Giám đốc, Tổng biên tập
TRẦN VĂN SẮC

Biên tập: **Đinh Như Quang**
Trình bày kỹ thuật: **Đỗ Hồng Ngân**
Trình bày bìa: **Đỗ Hồng Ngân**

Liên kết xuất bản: Trường Đại học Công nghệ Giao thông vận tải
Địa chỉ: Số 54 phố Triều Khúc, Thanh Xuân, Hà Nội

ISBN: 978-604-913-884-3

In 200 cuốn, khổ 19×27 cm, tại Công ty Cổ phần Khoa học & Công nghệ Hoàng Quốc Việt. Địa chỉ: Số 18, Hoàng Quốc Việt, Cầu Giấy, Hà Nội
Số xác nhận đăng ký xuất bản: 3436-2019/CXBIPH/04-44/KHTNVCN
Số quyết định xuất bản: 72/QĐ-KHTNCN, cấp ngày 19 tháng 9 năm 2019
In xong và nộp lưu chiểu quý IV năm 2019