

GS.TSKH. NGUYỄN VĂN KHANG

ĐỘNG LỰC HỌC HỆ NHIỀU VẬT



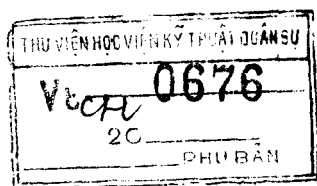
NHÀ XUẤT BẢN KHOA HỌC VÀ KỸ THUẬT

C23, $\frac{CK}{ĐƠN}$

GS. TSKH. NGUYỄN VĂN KHANG

ĐỘNG LỰC HỌC HỆ NHIỀU VẬT

(Dynamics of Multibody Systems)



B2143 - NTK - C2



NHÀ XUẤT BẢN KHOA HỌC VÀ KỸ THUẬT
HÀ NỘI 2007

MỤC LỤC

	Trang
<i>Mở đầu</i>	11
Chương 1. Ôn tập phép tính ma trận, véc tơ và tenxơ	15
§1 Ma trận và các phép tính đại số ma trận	15
1.1 Các định nghĩa về ma trận	15
1.2 Phép cộng hai ma trận và phép nhân ma trận với một hằng số	17
1.3 Ma trận vuông	17
1.4 Phép nhân các ma trận, ma trận nghịch đảo và ma trận tựa nghịch đảo	20
1.5 Các ma trận có cấu trúc khối	23
§2 Véc tơ hình học trong không gian ba chiều	24
2.1 Định nghĩa véc tơ hình học	24
2.2 Các phép tính đại số véc tơ	25
§3 Véc tơ đại số trong không gian ba chiều	29
3.1 Định nghĩa	29
3.2 Khái niệm toán tử sóng của véc tơ trong không gian ba chiều	29
3.3 Các phép tính đại số véc tơ	30
3.4 Một số tính chất của toán tử sóng	30
§4 Không gian véc tơ	31
4.1 Định nghĩa không gian véc tơ	31
4.2 Ánh xạ tuyến tính và toán tử tuyến tính	33
§5 Trị riêng, véc tơ riêng của ma trận và ma trận xác định dương	36
5.1 Định nghĩa và tính chất	36
5.2 Phương trình đặc trưng của ma trận	37
5.3 Ma trận xác định dương và ma trận xác định âm	37
§6 Đạo hàm của véc tơ và ma trận	38
6.1 Đạo hàm theo thời gian	38
6.2 Đạo hàm riêng theo biến véc tơ	39

§7	Tenxơ hạng hai	40
7.1	Ký hiệu tenxơ một cách hình thức	40
7.2	Tích tenxơ của hai vectơ trong không gian ba chiều	41
7.3	Tenxơ hạng hai	42
7.4	Các phép tính đại số tenxơ	43
7.5	Ma trận của tenxơ hạng hai	44
7.6	Tenxơ đơn vị hạng hai	45
7.7	Tóm tắt một vài công thức cần nhớ	47
Chương 2. Động học vật rắn		48
§1	Xác định vị trí của vật rắn trong không gian	48
1.1	Khái niệm điểm định vị và hướng của vật rắn	48
1.2	Ma trận cosin chỉ hướng	49
1.3	Các tính chất cơ bản của ma trận cosin chỉ hướng	51
1.4	Định lý Euler về chuyển động quay hữu hạn của vật rắn có một điểm cố định	53
1.5	Các ma trận quay cơ bản	54
§2	Vận tốc góc và gia tốc góc của vật rắn	57
2.1	Định nghĩa vận tốc góc của vật rắn	57
2.2	Các định lý về vận tốc góc của vật rắn	58
2.3	Một số cách định nghĩa khác về vận tốc của vật rắn	65
2.4	Gia tốc góc của vật rắn	68
§3	Công thức cộng vận tốc góc và công thức cộng gia tốc góc	69
3.1	Đạo hàm của vectơ trong hệ quy chiếu động	69
3.2	Công thức cộng vận tốc góc của vật rắn	69
3.3	Công thức cộng gia tốc góc của vật rắn	70
3.4	Cơ cấu hành tinh, vi sai nón	71
§4	Các tọa độ suy rộng xác định hướng của vật rắn	72
4.1	Các góc Euler	73
4.2	Các góc Cardan	77
4.3	Các góc Roll – Pitch –Yaw	85
4.4	Các tham số Euler	88
4.5	Các số siêu phức bốn chiều	98

4.6 Các tham số Rodrigues	99
4.7 Các phương án chọn tọa độ suy rộng xác định hướng của vật rắn	100
§5 Xác định vận tốc, gia tốc một điểm bất kỳ thuộc vật rắn	100
5.1 Xác định vận tốc một điểm bất kỳ thuộc vật rắn	100
5.2 Xác định gia tốc một điểm bất kỳ thuộc vật rắn	101
Chương 3. Động học hệ nhiều vật	102
§1 Các mối quan hệ động học cơ bản của hệ nhiều vật	102
1.1 Sự phân loại hệ nhiều vật	102
1.2 Các khớp động trong các hệ nhiều vật	104
1.3 Số bậc tự do và tọa độ suy rộng của hệ nhiều vật	107
1.4 Các điều kiện ràng buộc trong hệ nhiều vật có cấu trúc mạch vòng	112
§2 Phân tích động học hệ nhiều vật bằng phương pháp ma trận côsin chỉ hướng	118
2.1 Xác định vận tốc góc của các vật rắn bằng phương pháp truy hồi	118
2.2 Xác định vận tốc góc của các vật rắn bằng phương pháp trực tiếp	121
2.3 Xác định gia tốc góc của các vật rắn	122
2.4 Xác định vận tốc trọng tâm của các vật rắn	123
2.5 Xác định gia tốc trọng tâm của các vật rắn	126
§3 Phân tích động học hệ nhiều vật bằng phương pháp ma trận Denavit – Hartenberg	127
3.1 Các tọa độ thuần nhất và các ma trận biến đổi tọa độ thuần nhất	127
3.2 Các tham số động học Denavit -- Hartenberg và ma trận Denavit – Hartenberg	131
3.3 Phương trình xác định vị trí khâu thao tác của rôbốt	135
3.4 Các thí dụ áp dụng	136
§4 Phân tích động học hệ nhiều vật bằng phương pháp ma trận Jacôbi	141
4.1 Hệ nhiều vật có cấu trúc cây	141
4.2 Hệ nhiều vật có cấu trúc mạch vòng	144
§5 Phân tích động học hệ nhiều vật bằng phương pháp chiếu vuông góc	146
5.1 Nội dung cơ bản của phương pháp chiếu vuông góc	146
5.2 Phân tích động học cơ cấu bốn khâu bản lề phẳng	148
5.3 Phân tích động học cơ cấu tay quay - con trượt không gian	150

Chương 6. Phương pháp số trong động lực học hệ nhiều vật	271
§1 Phương trình trạng thái của các hệ cơ học	271
§2 Các phương pháp số giải hệ phương trình vi phân thường	273
2.1 Các phương pháp Runge – Kutta	274
2.2 Phương pháp Runge – Kutta Nyström	276
2.3 Phương pháp hai bước	277
2.4 Các phương pháp Adams	278
2.5 Phương pháp dự báo - hiệu chỉnh	279
2.6 Phương pháp Newmark	280
2.7 Phương pháp Wilson θ	281
2.8 Tích phân số hệ phương trình vi phân chuyển động của hệ nhiều vật có cấu trúc cây	284
§3 Các phương pháp số giải hệ phương trình vi phân - đại số của hệ nhiều vật	284
3.1 Phương pháp tách các nhân tử Lagrange	285
3.2 Phương pháp biến đổi về các tọa độ suy rộng độc lập	289
3.3 Phương pháp giải trực tiếp hệ phương trình vi phân - đại số	291
3.4 Các thí dụ áp dụng	293
§4 Tuyến tính hóa các phương trình vi phân chuyển động của hệ nhiều vật	296
4.1 Thiết lập phương trình vi phân chuyển động tuyến tính hóa của hệ nhiều vật	296
4.2 Các thí dụ áp dụng	299
§5 Ổn định chuyển động của hệ nhiều vật	303
5.1 Khái niệm ổn định chuyển động	303
5.2 Lý thuyết tổng quát về sự ổn định của hệ phương trình vi phân tuyến tính	306
5.3 Lý thuyết Floquet về hệ phương trình vi phân tuyến tính thuần nhất hệ số tuần hoàn	309
5.4 Sự ổn định của hệ phương trình vi phân tuyến tính thuần nhất hệ số hằng số	312
5.5 Sự ổn định của hệ phương trình vi phân tuyến tính thuần nhất hệ số tuần hoàn	313
5.6 Khảo sát ổn định của nghiệm phương trình vi phân phi tuyến bằng phương pháp xấp xỉ bậc nhất	316

§6 Dao động tuyến tính của hệ nhiều vật	317
6.1 Tính toán dao động tuần hoàn bằng phương pháp số	317
6.2 Thí dụ áp dụng	320
<i>Tài liệu tham khảo</i>	324
<i>Danh mục các từ tra cứu</i>	333

MỞ ĐẦU

1. Sự phát triển của các ngành cơ khí, giao thông vận tải, cơ điện tử, cơ sinh, tự động hóa, v.v... đòi hỏi chúng ta phải sử dụng công cụ tin học trong quá trình phân tích và tổng hợp động lực học các hệ kỹ thuật. Việc nghiên cứu các tính chất động lực của các hệ cơ học và các hệ cơ điện tử có một vai trò quan trọng trong việc tính toán thiết kế các hệ kỹ thuật. Hai bài toán cơ bản của động lực học là xây dựng mô hình và tính toán trên mô hình.

2. Xuất phát từ các mô hình thực hoặc các tài liệu thiết kế, chúng ta phải xây dựng các mô hình cơ học thay thế. Các mô hình cơ học vật rắn (tuyệt đối và biến dạng) hay được sử dụng trong kỹ thuật là:

- *Mô hình hệ các chất điểm*: Cơ hệ gồm n chất điểm liên kết với nhau bởi các phương trình liên kết. Các lực tác dụng lên các chất điểm thuộc hệ.

- *Mô hình hệ các vật rắn*: Hệ gồm có p vật rắn có khối lượng, có kích thước, chịu tác dụng của các lực phân bố hoặc các lực tập trung. Các lực tác dụng lên các vật rắn thuộc hệ gồm các lực hoạt động (lực đàn hồi của lò xo, lực cản, trọng lực, lực phát động của các mô tơ, v.v...) và các lực liên kết (do các vật rắn nối ghép với nhau và nối ghép với giá đỡ bằng các khớp, các liên kết tựa, v.v...).

- *Mô hình hệ các phần tử hữu hạn*: Hệ gồm một số hữu hạn các vật thể đàn hồi (các thanh, các tấm,...) có khối lượng, chịu tác dụng của các lực và các ngẫu lực thu gọn tập trung tại các điểm nút. Các điều kiện liên kết ràng buộc các dịch chuyển tại các điểm nút.

- *Mô hình các hệ liên tục*: Hệ gồm các phần tử đàn hồi, các phần tử dẻo,...chịu tác dụng các lực phân bố và các lực tập trung. Các điều kiện liên kết ràng buộc các tọa độ của mọi điểm của hệ.

- *Mô hình các hệ hỗn hợp*: Hệ gồm các chất điểm, các vật rắn, các phần tử hữu hạn, các vật thể đàn hồi, v.v... chịu tác dụng của các lực phân bố và các lực tập trung.

Dĩ nhiên còn nhiều loại mô hình cơ học khác nữa mà ta chưa kể ra ở đây. Chẳng hạn mô hình cơ học chất lỏng và chất khí, mô hình hỗn hợp chất lỏng và các vật rắn,... Trong cuốn sách này ta giới hạn chỉ xét mô hình hệ các vật rắn chịu liên kết. Các chất điểm (các vật điểm) được xem như các vật rắn chuyển động tịnh tiến.

Khi xây dựng mô hình cơ học ta phải tuân thủ hai quy tắc cơ bản sau đây:

- Mô hình cơ học lựa chọn phải đơn giản như có thể,

- Mô hình cơ học lựa chọn phải tương thích với mô hình thực.

Trong việc xây dựng mô hình cơ học ngoài việc sử dụng lý thuyết nhận dạng (Identification), thì kinh nghiệm của các nhà nghiên cứu, của các kỹ sư thiết kế, tính toán cũng hết sức quan trọng.

Cuốn sách này mới in lần đầu nên chắc chắn còn có khuyết, nhược điểm. Nhà xuất bản và tác giả mong muốn nhận được sự góp ý của đồng nghiệp và bạn đọc để có điều kiện bổ xung, hoàn thiện hơn cho các lần tái bản sau.

Các ý kiến đóng góp xin gửi về địa chỉ:

GS. TSKH Nguyễn Văn Khang

Bộ môn Cơ học ứng dụng, Trường Đại học Bách khoa Hà Nội

Email: nvankhang@mail.hut.edu.vn

Tel: 04.8680469

Hà nội, tháng 12 năm 2006

Nguyễn Văn Khang

Acknowledgments. I would like to thank Professor Dr.-Ing. Prof. E. h. Dr. h.c. *Werner Schiehlen* at the University of Stuttgart for introducing me to multibody dynamics and nonlinear dynamics.

I would like to take this opportunity to thank the German Academic Exchange Service (DAAD) for the financial support. Based on this I can study and make research in many Universities of the Federal Republic of Germany and other countries

Professor Nguyen Van Khang

Chương 1

ÔN TẬP PHÉP TÍNH MA TRẬN, VÉCTOR VÀ TENXƠ

Các phép tính véctor, ma trận và tenxơ có một vai trò quan trọng trong động lực học hệ nhiều vật nói riêng cũng như trong cơ học nói chung. Để người đọc dễ dàng hiểu được cách biểu diễn gọn, sáng sủa các đại lượng động lực cơ bản, các nguyên lý, các định lý và các phương trình chuyển động của các hệ nhiều vật trong các chương sau, ở đây ta sẽ trình bày tóm tắt một số kiến thức cơ bản về phép tính ma trận, phép tính véctor và phép tính tenxơ hạng hai.

§1 MA TRẬN VÀ CÁC PHÉP TÍNH ĐẠI SỐ MA TRẬN

1.1 Các định nghĩa về ma trận

a) *Ma trận*. Cho m và n là hai số nguyên dương. Một bảng chữ nhật gồm các phần tử a_{ij} được sắp xếp thành m hàng và n cột được gọi là một ma trận cỡ $m \times n$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \quad (1.1)$$

Phần tử a_{ij} là phần tử ở hàng thứ i và cột thứ j của ma trận \mathbf{A} . Các phần tử a_{ij} có thể là các hằng số hoặc các hàm. Đặc biệt các phần tử của một ma trận cũng có thể là các ma trận. Ma trận có các phần tử là các ma trận được gọi là ma trận khối.

Chú ý. Thuật ngữ ma trận (matrix) được Sylvester, một nhà toán học người Anh, sử dụng đầu tiên vào năm 1850. Năm 1858, một nhà toán học người Anh khác là A. Cayley (1821 - 1895) đã phát triển khái niệm ma trận và xây dựng các phép toán về ma trận.

b) *Ma trận chuyển vị*. Ma trận chuyển vị của ma trận \mathbf{A} , ký hiệu là \mathbf{A}^T , là ma trận nhận được từ ma trận \mathbf{A} bằng cách chuyển hàng thành cột

$$\mathbf{A}^T = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \quad (1.2)$$

c) *Ma trận cột và ma trận hàng.* Ma trận cột là ma trận cỡ $m \times 1$

$$\mathbf{a}_j = \begin{bmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{bmatrix} = [a_{1j}, a_{2j}, \dots, a_{mj}]^T \quad (1.3)$$

Ma trận hàng là ma trận cỡ $1 \times n$

$$\mathbf{b}_i = [b_{i1}, b_{i2}, \dots, b_{in}] \quad (1.4)$$

Với các khái niệm ma trận cột và ma trận hàng, một ma trận \mathbf{A} cỡ $m \times n$ có thể biểu diễn dưới dạng

$$\mathbf{A} = [\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n] = \begin{bmatrix} \mathbf{b}_1 \\ \mathbf{b}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{b}_m \end{bmatrix} \quad (1.5)$$

Để làm quen với cách viết ma trận dạng (1.5) ta xét thí dụ sau.

Thí dụ 1.1. Cho ma trận cỡ 2×3

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

Các ma trận cột của ma trận \mathbf{A} là

$$\mathbf{a}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{a}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{a}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Các ma trận hàng của ma trận \mathbf{A} là

$$\mathbf{b}_1 = [1, 2, 0], \quad \mathbf{b}_2 = [2, 3, 1]$$

Khi đó ma trận \mathbf{A} có thể viết dưới dạng

$$\mathbf{A} = [\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3] = \begin{bmatrix} \mathbf{b}_1 \\ \mathbf{b}_2 \end{bmatrix}$$

d) *Ma trận không*

Một ma trận mà tất cả các phần tử của nó đều bằng không được gọi là ma trận không

$$\mathbf{0} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}$$

e) Hai ma trận bằng nhau

Định nghĩa. Hai ma trận **A** và **B** cùng cỡ được gọi là bằng nhau khi các phần tử tương ứng của chúng bằng nhau

$$\mathbf{A} = \mathbf{B} \Leftrightarrow a_{ij} = b_{ij}, \quad \forall i, j \quad (1.6)$$

1.2 Phép cộng hai ma trận và phép nhân ma trận với một hằng số

Tổng của hai ma trận cùng cỡ $m \times n$ là một ma trận cùng cỡ và được xác định như sau

$$\mathbf{C} = \mathbf{A} + \mathbf{B}, \quad c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}, \quad \forall i, j \quad (1.7)$$

Tích của ma trận **A** cỡ $m \times n$ với hằng số α là một ma trận cỡ $m \times n$ và được xác định bởi hệ thức

$$\mathbf{C} = \alpha \mathbf{A}, \quad c_{ij} = \alpha a_{ij} \quad (1.8)$$

Phép cộng hai ma trận cùng cỡ và phép nhân ma trận với một hằng số có các tính chất sau

$$\mathbf{A} + \mathbf{B} = \mathbf{B} + \mathbf{A} \quad (\text{tính chất giao hoán})$$

$$\mathbf{A} + (\mathbf{B} + \mathbf{C}) = (\mathbf{A} + \mathbf{B}) + \mathbf{C} = \mathbf{A} + \mathbf{B} + \mathbf{C} \quad (\text{tính chất kết hợp})$$

$$\alpha(\mathbf{A} + \mathbf{B}) = \alpha \mathbf{A} + \alpha \mathbf{B} \quad (\text{tính chất phân phối})$$

Từ định nghĩa phép cộng hai ma trận dễ dàng suy ra phép cộng nhiều ma trận cùng cỡ

$$\mathbf{S} = \mathbf{A} + \mathbf{B} + \mathbf{C} + \dots + \mathbf{N}, \quad s_{ij} = a_{ij} + b_{ij} + c_{ij} + \dots + n_{ij} \quad (1.9)$$

Dễ dàng kiểm tra tính chất về chuyển vị của tổng các ma trận

$$(\mathbf{A} + \mathbf{B} + \mathbf{C} + \dots + \mathbf{N})^T = \mathbf{A}^T + \mathbf{B}^T + \mathbf{C}^T + \dots + \mathbf{N}^T \quad (1.10)$$

1.3 Ma trận vuông

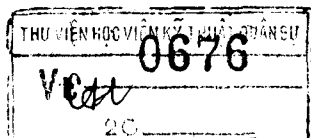
a) Các định nghĩa

Ma trận vuông. Ma trận **A** có số hàng bằng số cột ($m = n$) được gọi là ma trận vuông. Ma trận vuông cỡ $n \times n$ còn được gọi là ma trận vuông cấp n

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \quad (1.11)$$

Đường thẳng nối từ phần tử a_{11} qua a_{22} đến phần tử a_{nn} được gọi là đường chéo chính của ma trận vuông **A**. Các phần tử $a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}$ là các phần tử trên đường chéo chính.

Ma trận đường chéo. Ma trận vuông mà các phần tử của nó nằm ngoài đường chéo



chính đều bằng không ($a_{ij} = 0$ khi $i \neq j$) được gọi là ma trận đường chéo

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} = \text{diag}[a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}] \quad (1.12)$$

Ma trận đơn vị. Ma trận đường chéo mà các phần tử nằm trên đường chéo chính đều bằng 1 được gọi là ma trận đơn vị.

$$\mathbf{E} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix} = [\delta_{ij}] \quad (1.13)$$

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{khi } i = j \\ 0 & \text{khi } i \neq j \end{cases}$$

Vết của ma trận. Tổng các phần tử nằm trên đường chéo chính của ma trận vuông \mathbf{A} được gọi là vết (Trace) của ma trận \mathbf{A}

$$\text{tr} \mathbf{A} = a_{11} + a_{22} + \dots + a_{nn} = \sum_{i=1}^n a_{ii} \quad (1.14)$$

Một vài tính chất về vết của ma trận

$$\text{tr} (\mathbf{A}^T) = \text{tr} (\mathbf{A})$$

$$\text{tr} (\mathbf{A} + \mathbf{B}) = \text{tr} (\mathbf{A}) + \text{tr} (\mathbf{B})$$

b) Định thức của ma trận vuông

Nếu \mathbf{A} là ma trận vuông cấp n với các phần tử là các hằng số (hoặc các hàm số) thì định thức của ma trận \mathbf{A} là một con số (hoặc một hàm số) và được ký hiệu là $\det \mathbf{A}$. Ở đây ta nêu lên định nghĩa định thức theo qui tắc truy hồi. Trước hết định nghĩa định thức cấp hai. Sau đó định nghĩa định thức cấp ba, cấp bốn,...

Định thức cấp hai là một sự sắp xếp 2^2 phần tử a_{ik} thành một bảng vuông và gán cho nó một giá trị (hoặc một hàm số) tính theo công thức

$$\det \mathbf{A}_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \quad (1.15)$$

Định thức cấp ba là một sự sắp xếp 3^2 phần tử a_{ik} thành một bảng vuông và gán cho nó một giá trị (hoặc một hàm số) tính truy hồi theo các định thức cấp hai như sau

$$\det \mathbf{A}_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

$$= a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{32}a_{23}) - a_{12}(a_{21}a_{33} - a_{31}a_{23}) + a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{31}a_{22}) \quad (1.16)$$

Định thức con và phần phụ đại số. Định thức con M_{ik} của phần tử a_{ik} của ma trận vuông \mathbf{A} là định thức cấp $n-1$ suy ra từ \mathbf{A} bằng cách bỏ đi hàng thứ i và cột thứ k . Phần phụ đại số của phần tử a_{ik} của ma trận vuông \mathbf{A} , ký hiệu là A_{ik} , được định nghĩa bởi công thức sau

$$A_{ik} = (-1)^{i+k} M_{ik}. \quad (1.17)$$

Định thức cấp n . Định thức cấp n là một sự sắp xếp n^2 phần tử a_{ik} thành một bảng vuông

$$\det \mathbf{A} = d_n = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} \quad (1.18)$$

và gán cho nó một giá trị (hoặc một hàm số) tính truy hồi theo các định thức cấp $n-1$ như sau

$$d_n = \sum_{i=1}^n (-1)^{i+k} a_{ik} M_{ik} = \sum_{i=1}^n a_{ik} A_{ik}, \quad (1.19)$$

hoặc
$$d_n = \sum_{k=1}^n (-1)^{i+k} a_{ik} M_{ik} = \sum_{k=1}^n a_{ik} A_{ik}. \quad (1.20)$$

Trong (1.19) ta khai triển định thức theo cột thứ k . Trong đó k có thể lấy một trong các số từ 1 cho đến n . Trong (1.20) khai triển định thức theo hàng thứ i . Trong đó i có thể lấy một trong các số từ 1 cho đến n .

Chú ý rằng, nếu \mathbf{A} là ma trận vuông cấp n , ta có các hệ thức

$$\det \mathbf{A} = \det \mathbf{A}^T, \quad \det(\alpha \mathbf{A}) = \alpha^n \det \mathbf{A} \quad (1.21)$$

c) Ma trận chính quy và ma trận kỳ dị

Cho \mathbf{A} là một ma trận vuông cấp n . Nếu $\det \mathbf{A} \neq 0$ ma trận \mathbf{A} được gọi là ma trận chính quy. Ngược lại nếu $\det \mathbf{A} = 0$ thì ma trận \mathbf{A} được gọi là ma trận kỳ dị (hoặc ma trận không chính quy).

d) Ma trận đối xứng và ma trận đối xứng lệch

Cho \mathbf{A} là một ma trận vuông cấp n . Nếu $a_{ij} = a_{ji}$ (với mọi i, j) thì ma trận \mathbf{A} được gọi là ma trận đối xứng. Nếu $a_{ij} = -a_{ji}$ (với mọi i, j) thì ma trận \mathbf{A} được gọi là ma trận đối xứng lệch (skew symmetric).

Nếu \mathbf{A} là ma trận đối xứng thì $\mathbf{A} = \mathbf{A}^T$. Nếu \mathbf{A} là ma trận đối xứng lệch thì $\mathbf{A} = -\mathbf{A}^T$, $a_{ii} = 0$ (với mọi i).

Định lý. Cho \mathbf{A} là ma trận vuông tùy ý. Ma trận \mathbf{A} luôn luôn có thể phân tích thành tổng của một ma trận đối xứng \mathbf{A}_s và một ma trận đối xứng lệch \mathbf{A}_a .

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}_s + \mathbf{A}_a \quad (1.22)$$

Thật vậy, ta có công thức

$$\mathbf{A} = \frac{1}{2}(\mathbf{A} + \mathbf{A}^T) + \frac{1}{2}(\mathbf{A} - \mathbf{A}^T)$$

Dễ dàng chứng minh được

$$\frac{1}{2}(\mathbf{A} + \mathbf{A}^T) = \mathbf{A}_s, \quad \frac{1}{2}(\mathbf{A} - \mathbf{A}^T) = \mathbf{A}_a$$

1.4 Phép nhân các ma trận, ma trận nghịch đảo và ma trận tựa nghịch đảo

a) Phép nhân hai ma trận

Định nghĩa. Cho \mathbf{A} là ma trận cỡ $m \times p$, \mathbf{B} là ma trận cỡ $p \times n$. Tích của hai ma trận \mathbf{A} và \mathbf{B} là ma trận \mathbf{C} cỡ $m \times n$ được xác định bởi công thức sau

$$\mathbf{C} = \mathbf{AB}, \quad c_{ik} = \sum_{j=1}^p a_{ij} b_{jk} \quad (1.23)$$

Chú ý. Hai ma trận \mathbf{A} và \mathbf{B} chỉ có thể nhân với nhau được khi số cột của ma trận \mathbf{A} bằng số hàng của ma trận \mathbf{B} .

Phép nhân hai ma trận không có tính chất giao hoán nhưng có tính chất kết hợp và tính chất phân phối

$$\mathbf{A}(\mathbf{B} + \mathbf{C}) = \mathbf{AB} + \mathbf{AC} \quad (1.24)$$

$$\mathbf{A}(\mathbf{BC}) = (\mathbf{AB})\mathbf{C} \quad (1.25)$$

$$\mathbf{AB} \neq \mathbf{BA} \quad (1.26)$$

Thí dụ 1.2. Cho hai ma trận \mathbf{A} và \mathbf{B} có dạng như sau

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 2 \\ -2 & -1 & -1 \\ -1 & -3 & -1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 5 & 5 & 5 \end{bmatrix}$$

Hãy kiểm tra tính chất (1.26).

Lời giải. Theo công thức tính tích hai ma trận, ta có

$$\mathbf{AB} = \begin{bmatrix} 21 & 21 & 21 \\ -9 & -9 & -9 \\ -12 & -12 & -12 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{BA} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Về phép nhân các ma trận ta còn có một số hệ thức quan trọng sau

$$(\mathbf{ABC} \dots \mathbf{N})^T = \mathbf{N}^T \dots \mathbf{C}^T \mathbf{B}^T \mathbf{A}^T \quad (1.27)$$

$$\det(\mathbf{ABC} \dots \mathbf{N}) = \det \mathbf{A} \cdot \det \mathbf{B} \cdot \det \mathbf{C} \dots \det \mathbf{N} \quad (1.28)$$

$$\text{Tr}(\mathbf{AB}) = \text{Tr}(\mathbf{BA}) \quad (1.29)$$

b) Ma trận nghịch đảo

Cho \mathbf{A} là ma trận vuông cấp n . Nếu $\det \mathbf{A} \neq 0$ thì sẽ tồn tại một ma trận \mathbf{A}^{-1} mà

$$\mathbf{AA}^{-1} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{A} = \mathbf{E}$$

Ma trận \mathbf{A}^{-1} được gọi là ma trận nghịch đảo của ma trận \mathbf{A} .

Trong đại số tuyến tính người ta thường tính ma trận nghịch đảo theo công thức

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{\det \mathbf{A}} \text{adj} \mathbf{A} \quad (1.30)$$

Trong đó $\text{adj} \mathbf{A}$ là ma trận phụ trợ của ma trận \mathbf{A} và có dạng

$$\text{adj} \mathbf{A} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{bmatrix}$$

A_{ij} là các phần phụ đại số của phần tử a_{ij} của ma trận \mathbf{A} .

Ta có các đồng nhất thức sau đây về ma trận nghịch đảo

$$(\mathbf{A}^{-1})^T = (\mathbf{A}^T)^{-1} \quad (1.31)$$

$$(\mathbf{ABC} \dots \mathbf{N})^{-1} = \mathbf{N}^{-1} \dots \mathbf{C}^{-1} \mathbf{B}^{-1} \mathbf{A}^{-1} \quad (1.32)$$

c) Ma trận trực giao

Cho \mathbf{A} là một ma trận vuông cấp n . Ma trận \mathbf{A} được gọi là ma trận trực giao nếu như

$$\mathbf{AA}^T = \mathbf{A}^T \mathbf{A} = \mathbf{E} \quad (1.33)$$

Ma trận trực giao có các tính chất sau

$$\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{A}^T$$

$$\det \mathbf{A} = \pm 1$$

Chú ý rằng, nếu các cột (và các hàng) của ma trận vuông \mathbf{A} là các vectơ trực chuẩn thì \mathbf{A} là ma trận trực giao.

d) *Hạng của ma trận*

Định nghĩa. Cho A là ma trận cỡ $m \times n$

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Nếu tồn tại một ma trận con cấp r (ký hiệu là A_r) của ma trận A mà định thức của nó $\det A_r \neq 0$, còn mọi ma trận con cấp $r+i$ khác của ma trận A mà $\det A_{r+i} = 0$ ($\forall i, i \geq 1$) thì hạng của ma trận A là r

$$\text{Rank}(A) = r \tag{1.34}$$

Khi $m < n$, nếu hạng của ma trận A là m thì ma trận A được gọi là ma trận có hạng đầy đủ theo hàng. Khi $n < m$, nếu hạng của ma trận A là n thì ma trận A được gọi là ma trận có hạng đầy đủ theo cột. Đôi khi người ta gọi tất các loại ma trận này là ma trận có hạng đầy đủ.

Thí dụ 1.3. Cho ma trận

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 4 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Dễ dàng tính được $\det A = 0$, còn $\det A_2 = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} \neq 0$. Vậy $\text{Rank}(A) = 2$.

Các tính chất về hạng của ma trận:

Cho A và B là hai ma trận cùng cỡ thì $\text{Rank}(A + B) \leq \text{Rank}(A) + \text{Rank}(B)$

Nếu AB có nghĩa thì $\text{Rank}(AB) \leq \min\{\text{Rank}(A), \text{Rank}(B)\}$

$\text{Rank}(A) = \text{Rank}(A^T)$

Nếu r_c là số tối đa các vectơ cột độc lập tuyến tính của A còn r_h là số tối đa các vectơ hàng độc lập của A thì

$$\text{Rank}(A) = r_c = r_h \tag{1.35}$$

e) *Ma trận nghịch đảo suy rộng và ma trận tựa nghịch đảo*

- *Các định nghĩa*

Cho A là ma trận chữ nhật cỡ $m \times n$. Giả sử ứng với ma trận A tồn tại một ma trận X cỡ $n \times m$ thoả mãn các điều kiện sau

- (1) $AXA = A$
 - (2) $XAX = X$
 - (3) $(AX)^T = AX$
 - (4) $(XA)^T = XA$
- (1.36)

Các điều kiện (1.36) được gọi là các điều kiện *Penrose* (tên người đầu tiên đưa ra các điều kiện này).

Định nghĩa 1. Ma trận nghịch đảo suy rộng của ma trận A là ma trận thoả mãn tính chất 1 ở trên. Ký hiệu là $X = A^-$

Định nghĩa 2. Ma trận nghịch đảo suy rộng phản thân của ma trận A là ma trận thoả mãn hai tính chất 1 và 2 ở trên. Ký hiệu là $X = A_r^-$.

Định nghĩa 3. Ma trận X thoả mãn bốn tính chất trên được gọi là ma trận tựa nghịch đảo của ma trận chữ nhật A . Ta ký hiệu là $X = A^+$

- *Áp dụng*

Cho hệ phương trình đại số tuyến tính tổng quát

$$Ax = y \tag{1.37}$$

trong đó $A \in R^{m \times n}$, $x \in R^n$, $y \in R^m$. Dạng tổng quát của các nghiệm bình phương nhỏ nhất của (1.37) có dạng

$$x = A^+y + (E - A^+A)z \tag{1.38}$$

trong đó $z \in R^n$ là một véc tơ tuỳ ý, còn E là ma trận đơn vị. Nghiệm có chuẩn nhỏ nhất trong tập các nghiệm dạng (1.38) có dạng

$$x = A^+y \tag{1.39}$$

1.5 Các ma trận có cấu trúc khối

Ma trận con của ma trận A là một ma trận nhận được từ ma trận A bằng cách bỏ đi một số hàng và một số cột. Ma trận mà các phần tử của nó là các ma trận con của ma trận A được gọi là ma trận có cấu trúc khối (hoặc đôi khi gọi tắt là ma trận khối). Như thế nếu ta chia một ma trận bình thường thành các khối bằng các đường thẳng song song với các hàng và các cột ta sẽ được một ma trận có cấu trúc khối. Các khối là những ma trận con. Tuỳ theo vị trí của các ma trận con này mà ta đánh số chúng giống như đánh số các phần tử của một ma trận. Tích của hai ma trận cấu trúc khối được thực hiện giống như nhân hai ma trận không chia khối, trong đó mỗi khối được xem như mỗi phần tử của ma trận, miễn là khi các khối nhân với nhau phải thoả mãn điều kiện của phép nhân hai ma trận. Như thế việc chia một ma trận thành các khối là tuỳ ý, nhưng chia khối để thực hiện các phép nhân là không tuỳ ý.

Thí dụ 1.4. Cho \mathbf{A} là ma trận vuông cấp sáu, \mathbf{B} là ma trận cột gồm sáu phần tử

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} & a_{16} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} & a_{26} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35} & a_{36} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & a_{45} & a_{46} \\ a_{51} & a_{52} & a_{53} & a_{54} & a_{55} & a_{56} \\ a_{61} & a_{62} & a_{63} & a_{64} & a_{65} & a_{66} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_2 \\ b_4 \\ b_5 \\ b_6 \end{bmatrix}$$

Nếu ta chia các ma trận này thành các khối như sau

$$\mathbf{A}_{11} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A}_{12} = \begin{bmatrix} a_{15} & a_{16} \\ a_{25} & a_{26} \\ a_{35} & a_{36} \\ a_{45} & a_{46} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{A}_{21} = \begin{bmatrix} a_{51} & a_{52} & a_{53} & a_{54} \\ a_{61} & a_{62} & a_{63} & a_{64} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A}_{22} = \begin{bmatrix} a_{55} & a_{56} \\ a_{65} & a_{66} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{b}_1 = [b_1 \quad b_2 \quad b_3 \quad b_4]^T, \quad \mathbf{b}_2 = [b_5 \quad b_6]$$

thì việc nhân hai ma trận \mathbf{A} và \mathbf{b} có thể thực hiện bằng việc nhân hai ma trận cấu trúc khối

$$\mathbf{AB} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{11} & \mathbf{A}_{12} \\ \mathbf{A}_{21} & \mathbf{A}_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{b}_1 \\ \mathbf{b}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{11}\mathbf{b}_1 & \mathbf{A}_{12}\mathbf{b}_2 \\ \mathbf{A}_{21}\mathbf{b}_1 & \mathbf{A}_{22}\mathbf{b}_2 \end{bmatrix} \quad (1.40)$$

Nếu ta chia hai ma trận \mathbf{A} và \mathbf{b} như sau

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & | & a_{14} & a_{15} & a_{16} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & | & a_{24} & a_{25} & a_{26} \\ \hline a_{31} & a_{32} & a_{33} & | & a_{34} & a_{35} & a_{36} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & | & a_{44} & a_{45} & a_{46} \\ a_{51} & a_{52} & a_{53} & | & a_{54} & a_{55} & a_{56} \\ a_{61} & a_{62} & a_{63} & | & a_{64} & a_{65} & a_{66} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \hline b_2 \\ b_4 \\ b_5 \\ b_6 \end{bmatrix}$$

thì không thể nhân hai ma trận khối với nhau được.

§2 VÉCTƠ HÌNH HỌC TRONG KHÔNG GIAN BA CHIỀU

2.1 Định nghĩa véctơ hình học

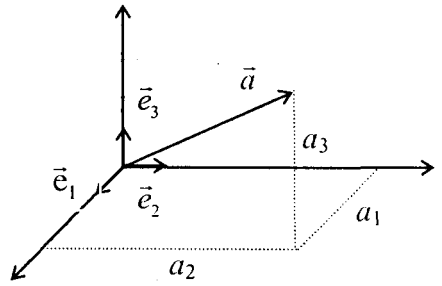
Véctơ là một đoạn thẳng có hướng ở trong không gian ba chiều. Ta quy ước gọi là véctơ hình học và ký hiệu \vec{a} .

Ta đưa vào một hệ tọa độ vuông góc như hình 1.1. Trong đó $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ là các vectơ đơn vị trên các trục tọa độ. Ta ký hiệu hệ trục tọa độ này bằng $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$. Khi đó vectơ \vec{a} có thể biểu diễn dưới dạng

$$\vec{a} = a_1\vec{e}_1 + a_2\vec{e}_2 + a_3\vec{e}_3 \quad (2.1)$$

Trong đó

$$\begin{aligned} a_1 &= a \cos(\vec{e}_1, \vec{a}) \\ a_2 &= a \cos(\vec{e}_2, \vec{a}) \\ a_3 &= a \cos(\vec{e}_3, \vec{a}) \end{aligned} \quad (2.2)$$



Hình 1.1 Biểu diễn vectơ

Các đại lượng $\cos(\vec{e}_1, \vec{a}), \cos(\vec{e}_2, \vec{a}), \cos(\vec{e}_3, \vec{a})$ được gọi là các cosin chỉ hướng của vectơ \vec{a} , a là độ lớn của vectơ \vec{a} còn $a_i (i=1,2,3)$ là các tọa độ của vectơ \vec{a} trong hệ tọa độ $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$.

2.2 Các phép tính đại số vectơ

a) Tổng của hai vectơ \vec{a} và \vec{b} là vectơ \vec{c} xác định bởi hệ thức

$$\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}, \text{ với } c_i = a_i + b_i \quad (2.3)$$

Tổng của hai vectơ có tính chất giao hoán và tính chất kết hợp

$$\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a} \quad (2.4)$$

$$(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c}) \quad (2.5)$$

b) Tích của vectơ \vec{a} với đại lượng vô hướng α là vectơ

$$\vec{b} = \alpha \vec{a}, \text{ với } b_i = \alpha a_i \quad (2.6)$$

và có tính chất

$$(\alpha + \beta)\vec{a} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{a}$$

$$\alpha(\vec{a} + \vec{b}) = \alpha\vec{a} + \alpha\vec{b}$$

c) Tích vô hướng (nội tích) của hai vectơ \vec{a} và \vec{b} là một đại lượng vô hướng

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos \varphi, \quad 0^\circ < \varphi < 180^\circ \quad (2.7)$$

φ là góc giữa hai vectơ \vec{a} và \vec{b} .

Tích vô hướng của hai vectơ có các tính chất sau

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a} \quad (\text{Tính chất giao hoán})$$

$$(\vec{a} + \vec{b}) \cdot \vec{c} = \vec{a} \cdot \vec{c} + \vec{b} \cdot \vec{c} \quad (\text{Tính chất phân phối})$$

$$\lambda(\vec{a} \cdot \vec{b}) = (\lambda\vec{a}) \cdot \vec{b} = \vec{a} \cdot (\lambda\vec{b}) \quad (\text{Tính chất kết hợp})$$

Trong đó λ là một hằng số.

Theo định nghĩa tích vô hướng của hai vectơ ta thấy nếu \vec{a} vuông góc với \vec{b} thì $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$. Từ đó ta suy ra

$$\vec{e}_1 \cdot \vec{e}_2 = \vec{e}_2 \cdot \vec{e}_3 = \vec{e}_3 \cdot \vec{e}_1 = 0$$

$$\vec{e}_1 \cdot \vec{e}_1 = \vec{e}_2 \cdot \vec{e}_2 = \vec{e}_3 \cdot \vec{e}_3 = 1$$

Từ định nghĩa (2.7) dễ dàng suy ra biểu thức đại số của tích vô hướng

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 \quad (2.8)$$

và tính chất của các cosin chỉ phương

$$\cos^2(\vec{e}_1, \vec{a}) + \cos^2(\vec{e}_2, \vec{a}) + \cos^2(\vec{e}_3, \vec{a}) = 1 \quad (2.9)$$

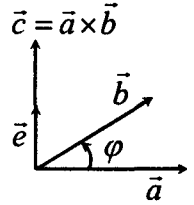
Với khái niệm tích vô hướng của hai vectơ, ta có thể biểu diễn vectơ \vec{a} trong không gian ba chiều với cơ sở $R = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ như sau

$$\vec{a} = a_1 \vec{e}_1 + a_2 \vec{e}_2 + a_3 \vec{e}_3 = (\vec{a}_1, \vec{e}_1) \vec{e}_1 + (\vec{a}_2, \vec{e}_2) \vec{e}_2 + (\vec{a}_3, \vec{e}_3) \vec{e}_3 \quad (2.10)$$

d) Tích vectơ (ngoại tích) của hai vectơ \vec{a} và \vec{b} là một vectơ \vec{c} ký hiệu bởi

$$\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| \sin \varphi \vec{e} \quad (2.11)$$

Trong đó \vec{e} là vectơ đơn vị vuông góc với mặt phẳng chứa hai vectơ \vec{a} và \vec{b} và nhìn từ nút vectơ \vec{e} xuống ta thấy vectơ \vec{a} quay đến vectơ \vec{b} ngược chiều kim đồng hồ. Nói cách khác các vectơ \vec{a} , \vec{b} , \vec{c} tạo thành một hệ quy chiếu thuận.



Hình 1.2

Tích vectơ của hai vectơ có các tính chất sau

$$\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a} \quad (\text{Tính chất phản giao hoán})$$

$$\vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{c} \quad (\text{Tính chất phân phối})$$

$$\lambda (\vec{a} \times \vec{b}) = (\lambda \vec{a}) \times \vec{b} = \vec{a} \times (\lambda \vec{b}) \quad (\text{Tính chất kết hợp đối với vô hướng})$$

Từ định nghĩa (2.11) ta dễ dàng suy ra các tính chất sau

$$\vec{a} \times \vec{a} = a^2 \sin 0 \cdot \vec{e} = 0$$

$$|\vec{a} \times \vec{b}|^2 = \vec{a}^2 \vec{b}^2 - (\vec{a} \cdot \vec{b})^2$$

Áp dụng các kết quả trên vào hệ các vectơ đơn vị của một hệ tọa độ vuông góc $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ ta có

$$\vec{e}_1 \times \vec{e}_2 = \vec{e}_3, \quad \vec{e}_2 \times \vec{e}_3 = \vec{e}_1, \quad \vec{e}_3 \times \vec{e}_1 = \vec{e}_2$$

$$\vec{e}_1 \times \vec{e}_1 = 0, \quad \vec{e}_2 \times \vec{e}_2 = 0, \quad \vec{e}_3 \times \vec{e}_3 = 0.$$

Do $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ là ba vectơ của một hệ trục chuẩn nên ta có các biểu thức

$$\vec{a} = a_1\vec{e}_1 + a_2\vec{e}_2 + a_3\vec{e}_3 = \sum_{i=1}^3 a_i\vec{e}_i$$

$$\vec{b} = b_1\vec{e}_1 + b_2\vec{e}_2 + b_3\vec{e}_3 = \sum_{j=1}^3 b_j\vec{e}_j$$

Từ đó suy ra

$$\vec{a} \times \vec{b} = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 a_i b_j (\vec{e}_i \times \vec{e}_j) = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \sum_{k=1}^3 (a_i b_j - a_j b_i) \vec{e}_k \quad (i \neq j \neq k)$$

$$= (a_2 b_3 - a_3 b_2) \vec{e}_1 + (a_3 b_1 - a_1 b_3) \vec{e}_2 + (a_1 b_2 - a_2 b_1) \vec{e}_3$$

$$= \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} \quad (2.12)$$

e) Tích hỗn hợp $[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}]$ của ba véctơ \vec{a} , \vec{b} , \vec{c} là một đại lượng vô hướng được định nghĩa bởi hệ thức

$$[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}] = \vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) \quad (2.13)$$

Tích hỗn hợp của ba véctơ có tính chất quan trọng như sau

$$\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{b} \cdot (\vec{c} \times \vec{a}) = \vec{c} \cdot (\vec{a} \times \vec{b}) \quad (2.14)$$

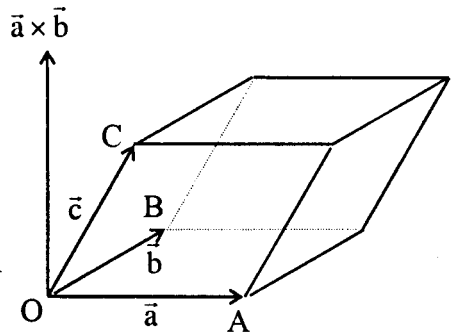
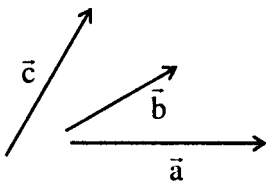
hay

$$[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}] = [\vec{b}, \vec{c}, \vec{a}] = [\vec{c}, \vec{a}, \vec{b}] \quad (2.15)$$

Ý nghĩa hình học của tích hỗn hợp

$|\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}| =$ số đo thể tích của hình hộp có ba cạnh OA, OB, OC mà $\vec{OA} = \vec{a}$,

$\vec{OB} = \vec{b}$, $\vec{OC} = \vec{c}$.



Hình 1.3

Sử dụng khái niệm định thức cấp ba ta có

$$\begin{aligned} [\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}] &= \vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = a_1(b_2c_3 - b_3c_2) + a_2(b_3c_1 - b_1c_3) + a_3(b_1c_2 - b_2c_1) \\ &= \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} \end{aligned} \quad (2.16)$$

Chú ý rằng $[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}] = 0$ khi ba véctơ $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ đồng phẳng.

f) Tích véc tơ kép của ba véctơ $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ là một véc tơ được xác định bởi các công thức khai triển như sau

$$\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = (\vec{a} \cdot \vec{c})\vec{b} - (\vec{a} \cdot \vec{b})\vec{c} \quad (2.17)$$

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c} = (\vec{a} \cdot \vec{c})\vec{b} - (\vec{b} \cdot \vec{c})\vec{a} \quad (2.18)$$

Ta chứng minh công thức (2.17). Theo định nghĩa ta có

$$\begin{aligned} \vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) &= \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_2c_3 - b_3c_2 & b_3c_1 - b_1c_3 & b_1c_2 - b_2c_1 \end{vmatrix} \\ &= \vec{e}_1 [a_2(b_1c_2 - b_2c_1) - a_3(b_3c_1 - b_1c_3)] \\ &\quad + \vec{e}_2 [a_3(b_2c_3 - b_3c_2) - a_1(b_1c_2 - b_2c_1)] \\ &\quad + \vec{e}_3 [a_1(b_3c_1 - b_1c_3) - a_2(b_2c_3 - b_3c_2)] \\ &= \vec{e}_1 [b_1(a_1c_1 + a_2c_2 + a_3c_3) - c_1(a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3)] \\ &\quad + \vec{e}_2 [b_2(a_1c_1 + a_2c_2 + a_3c_3) - c_2(a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3)] \\ &\quad + \vec{e}_3 [b_3(a_1c_1 + a_2c_2 + a_3c_3) - c_3(a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3)] \\ &= \vec{e}_1 [b_1(\vec{a} \cdot \vec{c}) - c_1(\vec{a} \cdot \vec{b})] + \vec{e}_2 [b_2(\vec{a} \cdot \vec{c}) - c_2(\vec{a} \cdot \vec{b})] + \vec{e}_3 [b_3(\vec{a} \cdot \vec{c}) - c_3(\vec{a} \cdot \vec{b})] \\ &= \vec{b}(\vec{a} \cdot \vec{c}) - \vec{c}(\vec{a} \cdot \vec{b}) \end{aligned}$$

Chú ý rằng các công thức (2.17) và (2.18) còn được gọi là công thức khai triển Graßmann.

Từ các công thức trên ta dễ dàng chứng minh được đồng nhất thức Lagrange

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot (\vec{c} \times \vec{d}) = (\vec{a} \cdot \vec{c})(\vec{b} \cdot \vec{d}) - (\vec{c} \cdot \vec{b})(\vec{a} \cdot \vec{d}) \quad (2.19)$$

Đặc biệt khi $\vec{c} = \vec{a}, \vec{d} = \vec{b}$ từ (2.19) ta suy ra

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot (\vec{a} \times \vec{b}) = (\vec{a} \times \vec{b})^2 = (\vec{a} \cdot \vec{a})(\vec{b} \cdot \vec{b}) - (\vec{a} \cdot \vec{b})^2 \quad (2.20)$$

§3 VÉCTƠ ĐẠI SỐ TRONG KHÔNG GIAN BA CHIỀU

Như trên đã thấy vectơ hình học \vec{a} không phụ thuộc vào hệ qui chiếu. Bây giờ ta đưa ra cách biểu diễn ma trận cột của vectơ hình học và dĩ nhiên cách biểu diễn này phụ thuộc vào hệ quy chiếu ta chọn.

3.1 Định nghĩa

Cho vectơ hình học \vec{a} trong không gian ba chiều. Trong hệ quy chiếu $R = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ vectơ \vec{a} có thể biểu diễn dưới dạng

$$\vec{a} = a_1\vec{e}_1 + a_2\vec{e}_2 + a_3\vec{e}_3 \quad (3.1)$$

Ma trận cột có các thành phần là các tọa độ của vectơ hình học \vec{a} trong hệ quy chiếu $R = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ được gọi là vectơ đại số. Ký hiệu là \mathbf{a} (cũng có tài liệu ký hiệu là \underline{a})

$$\mathbf{a} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} = [a_1, a_2, a_3]^T \quad (3.2)$$

Các đại lượng a_1, a_2, a_3 được gọi là các tọa độ của vectơ \mathbf{a} trong hệ qui chiếu R.

Nếu ta quy ước

$$\vec{e} = \begin{bmatrix} \vec{e}_1 \\ \vec{e}_2 \\ \vec{e}_3 \end{bmatrix} \quad (3.3)$$

và gọi là một cơ sở trong không gian ba chiều, thì ta có hệ thức liên hệ giữa vectơ hình học \vec{a} và vectơ đại số \mathbf{a}

$$\vec{a} = \mathbf{a}^T \vec{e} \quad (3.4)$$

Như thế vectơ hình học không phụ thuộc vào việc chọn hệ qui chiếu, còn vectơ đại số phụ thuộc vào việc chọn hệ qui chiếu. Vì vậy khi cần thiết, ta phải ghi rõ hệ quy chiếu vào góc trên bên trái của vectơ đại số như sau

$${}^R \mathbf{a} = [a_1, a_2, a_3]^T$$

3.2 Khái niệm toán tử sóng của vectơ trong không gian ba chiều

Để chuẩn bị xây dựng các phép tính của vectơ đại số ta đưa vào khái niệm toán tử sóng của vectơ đại số \mathbf{a} trong không gian ba chiều, ký hiệu là $\tilde{\mathbf{a}}$.

Định nghĩa. Cho vectơ trong không gian ba chiều $\mathbf{a} = [a_1, a_2, a_3]^T$. Toán tử sóng của vectơ đại số \mathbf{a} là một ma trận vuông cấp ba và được định nghĩa như sau

$$\tilde{\mathbf{a}} = \begin{bmatrix} 0 & -a_3 & a_2 \\ a_3 & 0 & -a_1 \\ -a_2 & a_1 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.5)$$

Chú ý. Ma trận $\tilde{\mathbf{a}}$ được định nghĩa như trên còn được gọi là ma trận đối xứng lệch tương ứng với vectơ đại số \mathbf{a} .

3.3 Các phép tính đại số vectơ

Ta sử dụng các phép tính đại số ma trận để tính toán các vectơ đại số bởi vì vectơ đại số thực chất là ma trận cột. Điểm khác nhau cần nhấn mạnh giữa vectơ đại số và ma trận cột nói chung là vectơ đại số phụ thuộc vào hệ qui chiếu. Dưới đây ta sử dụng thuật ngữ “Ngôn ngữ hình học” để chỉ các phép toán đối với vectơ hình học và thuật ngữ “Ngôn ngữ đại số” để chỉ các phép toán ma trận đối với vectơ đại số.

	Ngôn ngữ hình học	Ngôn ngữ đại số
Tổng của hai vectơ	$\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$	$\mathbf{c} = \mathbf{a} + \mathbf{b}$
Tích vô hướng của hai vectơ	$\alpha = \vec{a} \cdot \vec{b}$	$\alpha = \mathbf{a}^T \mathbf{b} = \mathbf{b}^T \mathbf{a}$
Tích vectơ của hai vectơ	$\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$	$\mathbf{c} = \tilde{\mathbf{a}} \mathbf{b}$
Tích hỗn hợp của ba vectơ	$\alpha = \vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c})$	$\alpha = \mathbf{a}^T (\tilde{\mathbf{b}} \mathbf{c})$
Tích véc tơ kép của ba vectơ	$\vec{d} = \vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c})$	$\mathbf{d} = \tilde{\mathbf{a}} (\tilde{\mathbf{b}} \mathbf{c})$

3.4 Một số tính chất của toán tử sóng

Từ định nghĩa (3.5) về toán tử sóng của vectơ đại số ở trên ta dễ dàng suy ra một số tính chất sau

$$\tilde{\mathbf{a}}^T = \begin{bmatrix} 0 & a_3 & -a_2 \\ -a_3 & 0 & a_1 \\ a_2 & -a_1 & 0 \end{bmatrix} = -\tilde{\mathbf{a}} \quad (3.6)$$

$$\alpha \tilde{\mathbf{a}} = \tilde{\alpha \mathbf{a}} \quad (3.7)$$

$$\widetilde{(\mathbf{a} + \mathbf{b})} = \tilde{\mathbf{a}} + \tilde{\mathbf{b}} \quad (3.8)$$

$$\tilde{\mathbf{a}} \mathbf{b} = -\tilde{\mathbf{b}} \mathbf{a} \quad (\text{do } \vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}) \quad (3.9)$$

$$\tilde{\mathbf{a}} \mathbf{a} = 0 \quad (\text{do } \vec{a} \times \vec{a} = 0) \quad (3.10)$$

$$(\tilde{\mathbf{a}} \mathbf{a})^T = \mathbf{a}^T \tilde{\mathbf{a}}^T = -\mathbf{a}^T \tilde{\mathbf{a}} = 0 \Rightarrow \mathbf{a}^T \tilde{\mathbf{a}} = 0 \quad (3.11)$$

Từ những kết quả trên ta dễ dàng suy ra một số kết quả khác

$$\tilde{\mathbf{a}} \tilde{\mathbf{b}} = \mathbf{b} \mathbf{a}^T - \mathbf{a}^T \mathbf{b} \mathbf{E}_3 \quad (\mathbf{E}_3 \text{ là ma trận đơn vị cấp 3}) \quad (3.12)$$

$$(\tilde{\mathbf{a}}\tilde{\mathbf{b}}) = \mathbf{b} \mathbf{a}^T - \mathbf{a} \mathbf{b}^T = \tilde{\mathbf{a}} \tilde{\mathbf{b}} - \tilde{\mathbf{b}} \tilde{\mathbf{a}} \quad (3.13)$$

$$\tilde{\mathbf{a}} \tilde{\mathbf{b}} + \mathbf{a} \mathbf{b}^T = \tilde{\mathbf{b}} \tilde{\mathbf{a}} + \mathbf{b} \mathbf{a}^T \quad (3.14)$$

§4 KHÔNG GIAN VÉCTOR

4.1 Định nghĩa không gian véctor

a) Định nghĩa

Cho một tập V không rỗng gồm các véctor $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}, \dots$ và một trường K . Trên tập V ta xác định phép tính cộng hai véctor

$$\vec{x}, \vec{y} \rightarrow \vec{x} + \vec{y} \in V, \quad \forall \vec{x}, \vec{y} \in V \quad (4.1)$$

Giữa tập V và trường K ta xác định một phép nhân véctor với một vô hướng

$$\vec{x}, \alpha \rightarrow \alpha \vec{x} \in V, \quad \forall \vec{x} \in V, \forall \alpha \in K \quad (4.2)$$

Với hai phép tính trên, tập V được gọi là không gian véctor trên trường K , nếu các phép tính trên thoả mãn tám tiên đề sau:

$$(1) \vec{x} + \vec{y} = \vec{y} + \vec{x}, \quad \forall \vec{x}, \vec{y} \in V$$

$$(2) \vec{x} + (\vec{y} + \vec{z}) = (\vec{x} + \vec{y}) + \vec{z}, \quad \forall \vec{x}, \vec{y}, \vec{z} \in V$$

$$(3) \text{Tồn tại phần tử } \vec{0} \in V \text{ sao cho } \vec{x} + \vec{0} = \vec{x}, \quad \forall \vec{x} \in V$$

$$(4) \text{Tồn tại phần tử đối } (-\vec{x}) \text{ sao cho } \vec{x} + (-\vec{x}) = \vec{0}, \quad \forall \vec{x} \in V$$

$$(5) \text{Nếu } 1 \text{ là đơn vị của trường } K \text{ thì } 1 \cdot \vec{x} = \vec{x}, \quad \forall \vec{x} \in V$$

$$(6) (\alpha + \beta) \vec{x} = \alpha \vec{x} + \beta \vec{x}, \quad \forall \vec{x} \in V, \quad \forall \alpha, \beta \in K$$

$$(7) \alpha(\vec{x} + \vec{y}) = \alpha \vec{x} + \alpha \vec{y}, \quad \forall \vec{x}, \vec{y} \in V, \quad \forall \alpha \in K$$

$$(8) (\alpha\beta) \vec{x} = \alpha(\beta \vec{x}) = \beta(\alpha \vec{x}), \quad \forall \vec{x} \in V, \quad \forall \alpha, \beta \in K$$

Chú ý. Trường K thường là trường số thực \mathbb{R} (hoặc trường số phức \mathbb{C}).

b) Không gian véctor hữu hạn chiều

Không gian véctor V được gọi là không gian véctor hữu hạn chiều nếu như thoả mãn thêm tiên đề chín sau đây:

(9) Tồn tại một số hữu hạn các véctor $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_n$ sao cho bất kỳ một véctor nào của V cũng biểu diễn được dưới dạng

$$\vec{x} = \alpha_1 \vec{x}_1 + \alpha_2 \vec{x}_2 + \dots + \alpha_n \vec{x}_n, \quad \alpha_j \in K$$

Khi đó $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ được gọi là toạ độ của véctor $\vec{x} \in V$ trong cơ sở $\{\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_n\}$.

Số chiều của không gian véctor là số nhỏ nhất các véctor $\{\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_n\}$ độc lập tuyến tính để thoả mãn tiên đề 9.

c) Không gian \mathbb{R}^n và không gian Euclide \mathbb{E}^n

Xét trường hợp các véctơ \vec{x} gồm n phần tử là các số thực. Khi đó ta ký hiệu không gian véctơ hữu hạn chiều này bằng ký hiệu \mathbb{R}^n . Ký hiệu $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n\}$ là một cơ sở của không gian véctơ \mathbb{R}^n . Khi đó một véctơ hình học trong không gian \mathbb{R}^n được định nghĩa bởi công thức sau

$$\vec{x} = x_1 \vec{e}_1 + x_2 \vec{e}_2 + \dots + x_n \vec{e}_n \quad (4.3)$$

Trong đó $x_i (i=1, \dots, n)$ là các toạ độ của véctơ \vec{x} trong không gian \mathbb{R}^n với cơ sở $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n\}$. Véctơ

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \quad (x_1, x_2, \dots, x_n \in \mathbb{R}^n) \quad (4.4)$$

được gọi là véctơ đại số trong \mathbb{R}^n tương ứng với véctơ hình học \vec{x} (4.3). Các số thực x_1, x_2, \dots, x_n được gọi là các toạ độ của véctơ \mathbf{x} ở trong cơ sở $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n\}$, còn n là số chiều của nó. Như thế giữa véctơ hình học và véctơ đại số có một tương ứng một - một. Trong một số trường hợp người ta dùng hai khái niệm này như nhau.

Hai véctơ n chiều \mathbf{x} và \mathbf{y} gọi là bằng nhau khi các toạ độ tương ứng của chúng trùng nhau $x_i = y_i (i = 1, 2, \dots, n)$.

Đối với các véctơ n chiều ta cũng xây dựng các phép tính cộng, trừ, nhân với một vô hướng tương tự như véctơ ba chiều. Chẳng hạn đối với các véctơ đại số ta có

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \mathbf{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} \Rightarrow \mathbf{x} \pm \mathbf{y} = \begin{bmatrix} x_1 \pm y_1 \\ x_2 \pm y_2 \\ \vdots \\ x_n \pm y_n \end{bmatrix}, \lambda \mathbf{x} = \begin{bmatrix} \lambda x_1 \\ \lambda x_2 \\ \vdots \\ \lambda x_n \end{bmatrix} \quad (4.5)$$

Các phép tính trên thoả mãn các tính chất giao hoán, kết hợp, phân phối như trong các véctơ ba chiều.

Trong không gian \mathbb{R}^n ta đưa vào khái niệm tích vô hướng của hai véctơ như sau. Giả sử cho biết hai véctơ n chiều

$$\vec{x} = x_1 \vec{e}_1 + x_2 \vec{e}_2 + \dots + x_n \vec{e}_n, \quad \vec{y} = y_1 \vec{e}_1 + y_2 \vec{e}_2 + \dots + y_n \vec{e}_n$$

Tích vô hướng của hai véctơ được định nghĩa bởi công thức sau

$$\vec{x} \cdot \vec{y} = \mathbf{x}^T \mathbf{y} = \mathbf{y}^T \mathbf{x} = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \dots + x_n y_n \quad (4.6)$$

Độ lớn của véctơ \vec{x} , hoặc còn gọi là chiều dài của véctơ \vec{x} hay chuẩn Euclide của

nó được định nghĩa bởi công thức

$$|\vec{x}| = \sqrt{\mathbf{x}^T \mathbf{x}} = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2} \quad (4.7)$$

Định nghĩa. Không gian Euclide n chiều \mathbb{E}^n là không gian \mathbb{R}^n trên đó xây dựng khái niệm tích vô hướng của hai vectơ.

Cũng giống như các vectơ trong không gian ba chiều, tích vô hướng của các vectơ n chiều có các tính chất sau

$$\begin{aligned} \vec{x} \cdot \vec{y} &= \vec{y} \cdot \vec{x} \\ (\vec{x} + \vec{y}) \cdot \vec{z} &= \vec{x} \cdot \vec{z} + \vec{y} \cdot \vec{z} \\ \lambda(\vec{x} \cdot \vec{y}) &= (\lambda \vec{x}) \cdot \vec{y} = \vec{x} \cdot (\lambda \vec{y}) \\ \vec{x} \neq 0 &\Leftrightarrow \vec{x} \cdot \vec{x} > 0 \end{aligned}$$

Trong không gian \mathbb{R}^n ta chọn một cơ sở $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n\}$ như sau

$$\mathbf{e}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{e}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \dots, \quad \mathbf{e}_n = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} \quad (4.8)$$

Cơ sở (4.8) của \mathbb{R}^n được gọi là cơ sở tự nhiên của không gian \mathbb{R}^n .

4.2 Ánh xạ tuyến tính và toán tử tuyến tính

a) Ánh xạ tuyến tính

Định nghĩa. Cho V, W là hai không gian vectơ hữu hạn chiều trên cùng một trường K . Ánh xạ $\vec{f}: V \rightarrow W$ được gọi là ánh xạ tuyến tính nếu \vec{f} thỏa mãn hai tính chất sau:

$$\begin{aligned} (1) \quad \vec{f}(\vec{x} + \vec{y}) &= \vec{f}(\vec{x}) + \vec{f}(\vec{y}), \quad \forall \vec{x}, \vec{y} \in V \\ (2) \quad \vec{f}(\alpha \vec{x}) &= \alpha \vec{f}(\vec{x}), \quad \forall \vec{x} \in V, \forall \alpha \in K \end{aligned}$$

Ta có thể gộp hai tính chất trên bằng tính chất sau

$$\vec{f}(\alpha \vec{x} + \beta \vec{y}) = \alpha \vec{f}(\vec{x}) + \beta \vec{f}(\vec{y}), \quad \forall \vec{x}, \vec{y} \in V, \quad \forall \alpha, \beta \in K$$

Chú ý. Trong các biểu thức trên \vec{x}, \vec{y}, \dots là các phần tử của không gian V , còn $\vec{f}(\vec{x}), \vec{f}(\vec{y}), \dots$ là các phần tử của không gian W .

b) Toán tử tuyến tính

Định nghĩa. Một ánh xạ tuyến tính $\vec{f}: V \rightarrow V$ được gọi là một toán tử tuyến tính.

c) Ma trận của toán tử tuyến tính theo một cơ sở

Cho V là một không gian vectơ n chiều. Chọn $\{\bar{e}_1, \bar{e}_2, \dots, \bar{e}_n\}$ là một cơ sở của V .

Xét ánh xạ tuyến tính $\vec{f}: V \rightarrow V$. Ta có

$$\begin{aligned}\vec{f}(\bar{e}_1) &= a_{11}\bar{e}_1 + a_{21}\bar{e}_2 + \dots + a_{n1}\bar{e}_n \\ \vec{f}(\bar{e}_2) &= a_{12}\bar{e}_1 + a_{22}\bar{e}_2 + \dots + a_{n2}\bar{e}_n \\ &\dots\dots\dots \\ \vec{f}(\bar{e}_n) &= a_{1n}\bar{e}_1 + a_{2n}\bar{e}_2 + \dots + a_{nn}\bar{e}_n\end{aligned}\tag{4.9}$$

Ma trận

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}\tag{4.10}$$

được gọi là ma trận của toán tử tuyến tính \vec{f} theo cơ sở $\{\bar{e}_1, \bar{e}_2, \dots, \bar{e}_n\}$.

Khi tính toán cụ thể ta nên chuyển từ biểu diễn vectơ hình học sang biểu diễn vectơ đại số.

Thí dụ 1.5. Cho $f(x): R^3 \rightarrow R^3$ xác định bởi công thức sau

$$f(x) = f(x_1, x_2, x_3) = \begin{bmatrix} x_1 + x_2 \\ x_2 + x_3 \\ x_3 + x_1 \end{bmatrix}$$

Hãy tìm ma trận của toán tử tuyến tính f theo cơ sở tự nhiên $e_1 = [1, 0, 0]^T$, $e_2 = [0, 1, 0]^T$, $e_3 = [0, 0, 1]^T$ của R^3 .

Lời giải. Ta tính

$$f(e_1) = f(1, 0, 0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = 1e_1 + 0e_2 + 1e_3$$

$$f(e_2) = f(0, 1, 0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = 1e_1 + 1e_2 + 0e_3$$

$$f(e_3) = f(0, 0, 1) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = 0e_1 + 1e_2 + 1e_3$$

Vậy ma trận \mathbf{A} của toán tử tuyến tính có dạng

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

d) Ma trận của ánh xạ tuyến tính

Cho V và W là hai không gian véctor hữu hạn chiều (số chiều của chúng có thể khác nhau) trên cùng trường K . Cho $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n\}$ là cơ sở của không gian V , $\{\vec{g}_1, \vec{g}_2, \dots, \vec{g}_m\}$ là cơ sở của không gian W . Nếu $\vec{f}: V \rightarrow W$ là một ánh xạ tuyến tính thì ta có hệ thức

$$\begin{aligned} \vec{f}(\vec{e}_1) &= a_{11}\vec{g}_1 + a_{21}\vec{g}_2 + \dots + a_{m1}\vec{g}_m \\ \vec{f}(\vec{e}_2) &= a_{12}\vec{g}_1 + a_{22}\vec{g}_2 + \dots + a_{m2}\vec{g}_m \\ &\dots\dots\dots \\ \vec{f}(\vec{e}_n) &= a_{1n}\vec{g}_1 + a_{2n}\vec{g}_2 + \dots + a_{mn}\vec{g}_m \end{aligned} \quad (4.11)$$

Ma trận

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \quad (4.12)$$

được gọi là ma trận của ánh xạ tuyến tính \vec{f} theo các cơ sở $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n\}$ và $\{\vec{g}_1, \vec{g}_2, \dots, \vec{g}_m\}$.

Thí dụ 1.6. Tìm ma trận của ánh xạ tuyến tính $\mathbf{f}: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ xác định bởi công thức

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} x_1 + x_2 \\ x_1 - x_2 \\ 2x_1 - x_2 \end{bmatrix}$$

theo các cơ sở của \mathbb{R}^2 và \mathbb{R}^3 .

Lời giải. Cơ sở tự nhiên của \mathbb{R}^2 là

$$\mathbf{e}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{e}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Cơ sở tự nhiên của \mathbb{R}^3 là

$$\mathbf{g}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{g}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{g}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Ta tính

$$\mathbf{f}(\mathbf{e}_1) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} = 1\mathbf{g}_1 + 1\mathbf{g}_2 + 2\mathbf{g}_3$$

$$\mathbf{f}(\mathbf{e}_2) = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix} = 1\mathbf{g}_1 - 1\mathbf{g}_2 - 1\mathbf{g}_3$$

Vậy ma trận \mathbf{A} của ánh xạ tuyến tính \mathbf{f} là

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$$

§5 TRỊ RIÊNG, VÉCTƠ RIÊNG CỦA MA TRẬN VÀ MA TRẬN XÁC ĐỊNH DƯƠNG

5.1 Định nghĩa và tính chất

a) Định nghĩa

Cho \mathbf{A} là ma trận vuông cấp n với các phần tử a_{ij} là các số thực hoặc số phức. Số λ được gọi là trị riêng của ma trận \mathbf{A} , véctơ \vec{x} được gọi là véctơ riêng ứng với trị riêng λ , nếu như phương trình sau được thoả mãn

$$\mathbf{A}\vec{x} = \lambda\vec{x}, \quad \vec{x} \neq 0 \quad (5.1)$$

Từ (5.1) ta suy ra

$$\mathbf{A}\vec{x} - \lambda\vec{x} = 0 \Rightarrow (\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E})\vec{x} = 0 \quad (5.2)$$

Phương trình (5.1) hoặc (5.2) được gọi là phương trình riêng của ma trận \mathbf{A} .

b) Các tính chất

- Nếu \vec{x} là một véctơ riêng của ma trận \mathbf{A} thì trị riêng λ ứng với nó là duy nhất.
- Nếu λ là một trị riêng của ma trận \mathbf{A} thì ứng với λ có thể có vô số các véctơ riêng.

5.2 Phương trình đặc trưng của ma trận

Để cho hệ phương trình đại số tuyến tính thuần nhất (5.2) có nghiệm không tầm thường, điều kiện cần và đủ là định thức của ma trận hệ số của chúng phải bằng không

$$\det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{E}) = |\mathbf{A} - \lambda \mathbf{E}| = 0 \quad (5.3)$$

Phương trình (5.3) được gọi là phương trình đặc trưng của ma trận \mathbf{A} , còn định thức $\det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{E})$ được gọi là đa thức đặc trưng của ma trận \mathbf{A} .

Khi \mathbf{A} là một ma trận vuông cấp n , khai triển định thức (5.3) ta được một đa thức bậc n

$$\lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + a_2 \lambda^{n-2} + \dots + a_{n-1} \lambda + a_n = 0 \quad (5.4)$$

Phương trình (5.4) có n nghiệm trong trường số phức. Các nghiệm này có thể là các nghiệm đơn cũng có thể là các nghiệm bội. Chúng có thể là các nghiệm thực (dương, âm, không) hoặc cũng có thể là các nghiệm phức. Khi có nghiệm phức thì bao giờ cũng có từng cặp nghiệm phức liên hợp. Các nghiệm của phương trình (5.4) là các trị riêng của ma trận \mathbf{A} . Khi biết được các trị riêng λ_k của ma trận \mathbf{A} , thế vào phương trình (5.2) ta xác định được các véc tơ riêng tương ứng. Chú ý rằng, các véc tơ riêng được xác định sai khác một hằng số nhân.

Khi \mathbf{A} là ma trận thực đối xứng, ta có các định lý sau:

Định lý 1. Khi \mathbf{A} là ma trận thực đối xứng, các trị riêng λ_k của nó là các số thực.

Định lý 2. Khi \mathbf{A} là ma trận thực đối xứng, các véc tơ riêng ứng với các trị riêng khác nhau sẽ trực giao nhau.

5.3 Ma trận xác định dương và ma trận xác định âm

a) Định nghĩa. Cho \mathbf{A} là ma trận vuông cấp n , $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Ma trận \mathbf{A} được gọi là ma trận xác định dương khi và chỉ khi

$$\mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x} > 0 \quad \text{với } \mathbf{x} \neq \mathbf{0} \quad (5.5)$$

\mathbf{A} là ma trận xác định không âm (á xác định dương) khi và chỉ khi

$$\mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x} \geq 0 \quad \text{với } \mathbf{x} \neq \mathbf{0} \quad (5.6)$$

\mathbf{A} là ma trận xác định âm khi và chỉ khi

$$\mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x} < 0 \quad \text{với } \mathbf{x} \neq \mathbf{0} \quad (5.7)$$

\mathbf{A} là ma trận xác định không dương (á xác định âm) khi và chỉ khi

$$\mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x} \leq 0 \quad \text{với } \mathbf{x} \neq \mathbf{0} \quad (5.8)$$

Chú ý. Đôi khi người ta sử dụng ký hiệu qui ước: Khi \mathbf{A} là ma trận xác định dương, ta qui ước viết $\mathbf{A} > 0$.

b) Các định lý

Định lý 3. Cho $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ đối xứng. Ma trận A là xác định dương (không âm) khi và chỉ khi tất cả các trị riêng của nó là dương (không âm).

Định lý 4. Cho $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ đối xứng. Ma trận A là xác định dương khi và chỉ khi tất cả các tử thức chéo chính của nó đều dương

$$\det A_i > 0, \quad i = 1, 2, \dots, n \tag{5.9}$$

§6 ĐẠO HÀM CỦA VÉCTƠ VÀ MA TRẬN

6.1 Đạo hàm theo thời gian

Xét véctor hàm 3 chiều $\mathbf{a}(t) = [a_1(t), a_2(t), a_3(t)]^T$. Đạo hàm của véctor $\mathbf{a}(t)$ theo thời gian là một véctor có dạng

$$\frac{d\mathbf{a}(t)}{dt} = \dot{\mathbf{a}}(t) = [\dot{a}_1(t), \dot{a}_2(t), \dot{a}_3(t)]^T \tag{6.1}$$

Từ định nghĩa (6.1) ta suy ra các công thức sau

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{a}(t) + \mathbf{b}(t)) = \dot{\mathbf{a}}(t) + \dot{\mathbf{b}}(t) \tag{6.2}$$

$$\frac{d}{dt}(\alpha(t)\mathbf{a}(t)) = \dot{\alpha}\mathbf{a} + \alpha\dot{\mathbf{a}} \tag{6.3}$$

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{a}^T \mathbf{b}) = \dot{\mathbf{a}}^T \mathbf{b} + \mathbf{a}^T \dot{\mathbf{b}} \tag{6.4}$$

$$\frac{d}{dt}(\tilde{\mathbf{a}}\mathbf{b}) = \tilde{\mathbf{a}}\dot{\mathbf{b}} + \dot{\tilde{\mathbf{a}}}\mathbf{b} \tag{6.5}$$

$$\tilde{\dot{\mathbf{a}}} = \dot{\tilde{\mathbf{a}}} \tag{6.6}$$

Cho A là ma trận có dạng $A(t) = [a_{ik}(t)]$. Đạo hàm của ma trận A theo thời gian là một ma trận mà các phần tử của nó cũng được đạo hàm theo thời gian t

$$\frac{d}{dt}A(t) = \left[\frac{d}{dt} a_{ik}(t) \right] = [\dot{a}_{ik}(t)] = \dot{A} \tag{6.7}$$

Từ đó suy ra

$$\frac{d}{dt}(A(t) + B(t)) = \dot{A} + \dot{B} \tag{6.8}$$

$$\frac{d}{dt}(A(t)B(t)) = \dot{A}B + A\dot{B} \tag{6.9}$$

$$\frac{d}{dt}(\alpha(t)\mathbf{A}(t)) = \dot{\alpha}\mathbf{A} + \alpha\dot{\mathbf{A}} \quad (6.10)$$

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{A}(t)\mathbf{a}(t)) = \dot{\mathbf{A}}\mathbf{a} + \mathbf{A}\dot{\mathbf{a}} \quad (6.11)$$

6.2 Đạo hàm riêng theo biến véc tơ

Cho \mathbf{x} là một véc tơ n chiều

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \Rightarrow \mathbf{x}^T = [x_1, x_2, \dots, x_n] \quad (6.12)$$

Ta quy ước đưa vào các toán tử sau:

$$\frac{1}{\partial \mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\partial x_1} \\ \frac{1}{\partial x_2} \\ \vdots \\ \frac{1}{\partial x_n} \end{bmatrix}, \quad \frac{1}{\partial \mathbf{x}^T} = \left[\frac{1}{\partial x_1}, \frac{1}{\partial x_2}, \dots, \frac{1}{\partial x_n} \right] \quad (6.13)$$

a) Đạo hàm riêng của một véc tơ theo biến véc tơ

Cho \mathbf{a} là véc tơ m chiều, \mathbf{x} là véc tơ n chiều

$$\mathbf{a} = [a_1, a_2, \dots, a_m]^T \quad \mathbf{x} = [x_1, x_2, \dots, x_n]^T$$

Đạo hàm riêng của véc tơ \mathbf{a} theo biến véc tơ \mathbf{x} được định nghĩa bởi hệ thức sau

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{a}}{\partial \mathbf{x}} &= \partial \mathbf{a} \cdot \frac{1}{\partial \mathbf{x}^T} = \begin{bmatrix} \partial a_1 \\ \partial a_2 \\ \vdots \\ \partial a_m \end{bmatrix} \left[\frac{1}{\partial x_1}, \frac{1}{\partial x_2}, \dots, \frac{1}{\partial x_n} \right] \\ &= \begin{bmatrix} \frac{\partial a_1}{\partial x_1} & \frac{\partial a_1}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial a_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial a_2}{\partial x_1} & \frac{\partial a_2}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial a_2}{\partial x_n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial a_m}{\partial x_1} & \frac{\partial a_m}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial a_m}{\partial x_n} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (6.14)$$

b) Đạo hàm riêng của một vô hướng theo biến véc tơ

Cho α là một vô hướng còn \mathbf{x} là một véc tơ n chiều. Từ định nghĩa trên ta suy ra biểu thức định nghĩa đạo hàm riêng của α theo biến véc tơ \mathbf{x}

$$\frac{\partial \alpha}{\partial \mathbf{x}} = \partial \alpha \cdot \frac{1}{\partial \mathbf{x}^T} = \left[\frac{\partial \alpha}{\partial x_1}, \frac{\partial \alpha}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial \alpha}{\partial x_n} \right] \quad (6.15)$$

c) Đạo hàm riêng một dạng toàn phương theo biến véc tơ

Như đã biết một dạng toàn phương thực có thể biểu diễn dưới dạng

$$Q(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x} \quad (\text{là một vô hướng}) \quad (6.16)$$

Trong đó \mathbf{A} là ma trận vuông cấp n đối xứng ($\mathbf{A}^T = \mathbf{A}$), \mathbf{x} là véc tơ n chiều. Từ đó ta có các định nghĩa sau.

Đạo hàm bậc nhất

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} (\mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x}) = \mathbf{x}^T \mathbf{A} + \mathbf{x}^T \mathbf{A} = 2 \mathbf{x}^T \mathbf{A} \quad (\text{là một véc tơ hàng}) \quad (6.17)$$

Đạo hàm bậc hai

$$\frac{\partial^2}{\partial \mathbf{x}^T \partial \mathbf{x}} (\mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x}) = \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}^T} (2 \mathbf{x}^T \mathbf{A}) = 2 \mathbf{A} \quad (\text{là một ma trận}) \quad (6.18)$$

Từ đó suy ra

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} (\mathbf{x}^T \mathbf{x}) = 2 \mathbf{x}^T \quad (6.19)$$

§7 TENSOR HẠNG HAI

Mục tiêu của phép tính ten xơ là xây dựng một công cụ toán học để có thể mô tả một cách đầy đủ quan hệ giữa các đại lượng vật lý và các đại lượng hình học. Các đại lượng này được xác định không chỉ qua một giá trị mà có thể qua hai giá trị (véc tơ phẳng), hoặc qua hơn hai giá trị (tenxơ).

Có hai quan điểm trình bày khái niệm tenxơ. Quan điểm thứ nhất xem tenxơ như là các đại lượng có chỉ số, được xác định qua các phép biến đổi toạ độ theo những qui tắc nhất định. Quan điểm thứ hai, xem tenxơ như các hàm đa tuyến tính. Trong giáo trình này chúng tôi trình bày khái niệm tenxơ theo quan điểm thứ hai.

7.1 Ký hiệu tenxơ một cách hình thức

Ta ký hiệu tenxơ một cách hình thức bằng các chữ cái có mũ tên ở trên. Số lượng các mũ tên bằng hạng của tenxơ. Ta quy ước ký hiệu các tenxơ hạng không và các tenxơ hạng một bằng các chữ cái thường và nhỏ, ký hiệu các tenxơ từ hạng hai trở lên bằng các chữ cái in và to. Các thí dụ về ký hiệu tenxơ:

Tenxơ hạng không là các vô hướng a, b, c, \dots

Tenxơ hạng một là các véctơ hình học $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \dots$

Tenxơ hạng hai được ký hiệu bởi $\vec{\vec{A}}, \vec{\vec{D}}, \vec{\vec{T}}, \dots$, tenxơ hạng ba là $\vec{\vec{\vec{A}}}$, tenxơ hạng bốn là $\vec{\vec{\vec{\vec{A}}}}$, (hoặc $\overset{(4)}{\vec{A}}$), v.v...

7.2 Tích tenxơ của hai véctơ trong không gian ba chiều

a) *Định nghĩa 1 (tích tenxơ của hai véctơ)*. Cho \vec{a} và \vec{b} là hai véctơ trong không gian Euclide ba chiều \mathbb{E}^3 . Tích tenxơ (hay còn gọi là tích dyad hoặc tích trực tiếp) của hai véctơ \vec{a} và \vec{b} , ký hiệu $\vec{a} \otimes \vec{b}$, là một toán tử tuyến tính biến đổi phần tử $\vec{x} \in \mathbb{E}^3$ thành phần tử $\vec{y} \in \mathbb{E}^3$ theo quy luật sau

$$(\vec{a} \otimes \vec{b})\vec{x} = \vec{y} = (\vec{b} \cdot \vec{x})\vec{a}, \quad \forall \vec{x} \in \mathbb{E}^3 \quad (7.1)$$

Chú ý. Cho $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ là một cơ sở của không gian \mathbb{E}^3 . Theo công thức (7.1) ta có

$$(\vec{e}_k \otimes \vec{e}_l)\vec{e}_m = (\vec{e}_l \cdot \vec{e}_m)\vec{e}_k = g_{lm}\vec{e}_k \quad (7.2)$$

Trong đó g_{lm} là các hằng số. Nếu chọn $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ là một cơ sở tự nhiên thì

$$g_{lm} = \begin{cases} 1 & \text{khi } l = m \\ 0 & \text{khi } l \neq m \end{cases}$$

b) *Ma trận của toán tử tuyến tính $\vec{a} \otimes \vec{b}$*

Chọn $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ là cơ sở của \mathbb{E}^3 . Ta có các hệ thức

$$\vec{a} = a_1\vec{e}_1 + a_2\vec{e}_2 + a_3\vec{e}_3, \quad \vec{b} = b_1\vec{e}_1 + b_2\vec{e}_2 + b_3\vec{e}_3$$

Theo công thức (7.1) ta có

$$(\vec{a} \otimes \vec{b})\vec{e}_1 = (\vec{b} \cdot \vec{e}_1)\vec{a} = b_1(a_1\vec{e}_1 + a_2\vec{e}_2 + a_3\vec{e}_3)$$

$$(\vec{a} \otimes \vec{b})\vec{e}_2 = (\vec{b} \cdot \vec{e}_2)\vec{a} = b_2(a_1\vec{e}_1 + a_2\vec{e}_2 + a_3\vec{e}_3)$$

$$(\vec{a} \otimes \vec{b})\vec{e}_3 = (\vec{b} \cdot \vec{e}_3)\vec{a} = b_3(a_1\vec{e}_1 + a_2\vec{e}_2 + a_3\vec{e}_3)$$

Theo (4.9) ma trận của toán tử tuyến tính $\vec{a} \otimes \vec{b}$ có dạng

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_1b_1 & a_1b_2 & a_1b_3 \\ a_2b_1 & a_2b_2 & a_2b_3 \\ a_3b_1 & a_3b_2 & a_3b_3 \end{bmatrix} = \mathbf{a}\mathbf{b}^T \quad (7.3)$$

Chú ý. Ma trận \mathbf{A} của toán tử tuyến tính $\vec{a} \otimes \vec{b}$ phụ thuộc vào việc chọn cơ sở $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ của không gian \mathbb{E}^3 .

7.3 Tenxơ hạng hai

Tenxơ là các ánh xạ đa tuyến tính. Trong giáo trình này ta giới hạn xét một loại tenxơ hạng hai đơn giản. Tenxơ này biểu diễn dưới dạng một toán tử tuyến tính.

a) *Định nghĩa 2.* Cho $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n$ và $\vec{b}_1, \vec{b}_2, \dots, \vec{b}_n$ là các véctơ trong không gian Euclide ba chiều \mathbb{E}^3 . Tổng các tích tenxơ $\vec{a}_k \otimes \vec{b}_k$ được gọi là tenxơ hạng hai

$$\vec{D} = \sum_{k=1}^n \vec{a}_k \otimes \vec{b}_k \quad (7.4)$$

Trong không gian ba chiều \mathbb{E}^3 với cơ sở $\vec{e} = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}^T$, hai véctơ bất kỳ \vec{a} , \vec{b} có thể biểu diễn dưới dạng

$$\vec{a} = a_1 \vec{e}_1 + a_2 \vec{e}_2 + a_3 \vec{e}_3 = \sum_{i=1}^3 a_i \vec{e}_i \quad (7.5)$$

$$\vec{b} = b_1 \vec{e}_1 + b_2 \vec{e}_2 + b_3 \vec{e}_3 = \sum_{i=1}^3 b_i \vec{e}_i \quad (7.6)$$

Thế các biểu thức (7.5) và (7.6) vào biểu thức (7.4) ta được

$$\vec{D} = \sum_{k=1}^n \vec{a}_k \otimes \vec{b}_k = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \left(\sum_{k=1}^n a_{ki} b_{kj} \right) \vec{e}_i \otimes \vec{e}_j$$

Nếu ta đưa vào ký hiệu

$$D_{ij} = \sum_{k=1}^n a_{ki} b_{kj}$$

$$\text{thì} \quad \vec{D} = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 D_{ij} \vec{e}_i \otimes \vec{e}_j \quad (7.7)$$

Các đại lượng D_{ij} được gọi là các toạ độ của tenxơ \vec{D} trong cơ sở \vec{e} (chú ý: cách gọi trên chỉ là một cách gọi tắt. Thật ra tenxơ hạng hai \vec{D} là một phần tử trong không gian véctơ \mathbb{R}^9 , D_{ij} là các toạ độ của tenxơ \vec{D} ở trong cơ sở $\{\vec{e}_i \otimes \vec{e}_j\}$).

Trong các cơ sở khác nhau thì các toạ độ D_{ij} của tenxơ \vec{D} cũng khác nhau. Trong một số tài liệu, người ta biểu diễn tenxơ \vec{D} dưới dạng sau

$$\vec{D} = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 D_{ij} \vec{e}_i \otimes \vec{e}_j = \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & D_{13} \\ D_{21} & D_{22} & D_{23} \\ D_{31} & D_{32} & D_{33} \end{bmatrix} \vec{e}_i \otimes \vec{e}_j \quad (7.8)$$

Như thế ta có ba cách thức biểu diễn tenxơ hạng hai là (7.4), (7.7), và (7.8).

b) Tenxơ hạng hai liên hợp

Định nghĩa 3. Tenxơ hạng hai

$$\vec{D}^* = \sum_{k=1}^n \vec{b}_k \otimes \vec{a}_k \quad (7.9)$$

được gọi là tenxơ liên hợp với tenxơ \vec{D}

7.4 Các phép tính đại số tenxơ

a) Phép cộng hai tenxơ hạng hai

Định nghĩa 4. Tổng của hai tenxơ hạng hai \vec{A} và \vec{B} là một tenxơ hạng hai \vec{C} được định nghĩa bởi hệ thức

$$\vec{C} = \vec{A} + \vec{B}, \quad C_{ij} = A_{ij} + B_{ij} \quad (7.10)$$

Hệ quả:

1) Tổng của n tenxơ hạng hai là một tenxơ hạng hai

$$\vec{D} = \sum_{k=1}^n \vec{a}_k \otimes \vec{b}_k \quad (7.11)$$

2) Mỗi tenxơ hạng hai có thể biểu diễn dưới dạng

$$\vec{D} = \sum_{k=1}^n \vec{a}_k \otimes \vec{b}_k = \vec{a} \otimes \vec{b} \quad (7.12)$$

Khi chứng minh các định lý ta hay sử dụng công thức (7.12) để biểu diễn tenxơ hạng hai.

b) Tích của tenxơ hạng hai với một vô hướng

Định nghĩa 5. Tích của tenxơ hạng hai \vec{A} với một vô hướng là một tenxơ hạng hai được định nghĩa như sau

$$\vec{D} = \alpha \vec{A}, \quad D_{ij} = \alpha A_{ij} \quad (7.13)$$

c) Tích vô hướng tenxơ hạng hai với véctơ $\vec{v} \in \mathbb{R}^3$

Định nghĩa 6. Tích vô hướng bên trái của hai tenxơ \vec{D} với véctơ \vec{v} ba chiều là một véctơ, được định nghĩa bởi các hệ thức sau

$$\vec{v} \cdot \vec{D} = \vec{v} \cdot (\vec{a} \otimes \vec{b}) = (\vec{v} \cdot \vec{a}) \vec{b} \quad (7.14)$$

Định nghĩa 7. Tích vô hướng bên phải của hai tenxơ \vec{D} với véctơ \vec{v} ba chiều là một véctơ, được định nghĩa bởi các hệ thức sau

$$\vec{D} \cdot \vec{v} = (\vec{a} \otimes \vec{b}) \cdot \vec{v} = \vec{a} (\vec{b} \cdot \vec{v}) \quad (7.15)$$

d) Tích véctor của tenxơ hạng hai với véctor $\vec{v} \in \mathbb{R}^3$

Định nghĩa 8. Tích véctor của tenxơ hạng hai $\vec{\vec{D}}$ với véctor \vec{v} là một tenxơ hạng hai được định nghĩa bởi các hệ thức sau

$$\vec{v} \times \vec{\vec{D}} = \vec{v} \times (\vec{a} \otimes \vec{b}) = (\vec{v} \times \vec{a}) \otimes \vec{b} \quad (7.16)$$

$$\vec{\vec{D}} \times \vec{v} = (\vec{a} \otimes \vec{b}) \times \vec{v} = \vec{a} \otimes (\vec{b} \times \vec{v}) \quad (7.17)$$

Chú ý. Tích tenxơ của một tenxơ hạng hai $\vec{\vec{A}}$ với tenxơ hạng hai $\vec{\vec{B}}$ là một tenxơ hạng 4. Tích véctor của một tenxơ hạng hai với một tenxơ hạng hai là một tenxơ hạng ba,... Những vấn đề này ta không xét ở đây.

7.5 Ma trận của tenxơ hạng hai

a) **Định nghĩa ma trận của tenxơ hạng hai.** Chín toạ độ D_{ij} của tenxơ hạng hai $\vec{\vec{D}}$ trong cơ sở $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ lập thành một ma trận vuông cấp ba

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & D_{13} \\ D_{21} & D_{22} & D_{23} \\ D_{31} & D_{32} & D_{33} \end{bmatrix} \quad (7.18)$$

Ma trận \mathbf{D} được gọi là ma trận các toạ độ của tenxơ hạng hai $\vec{\vec{D}}$ trong cơ sở \vec{e} .

Nhờ ma trận \mathbf{D} , tenxơ $\vec{\vec{D}}$ có thể biểu diễn dưới dạng

$$\vec{\vec{D}} = \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & D_{13} \\ D_{21} & D_{22} & D_{23} \\ D_{31} & D_{32} & D_{33} \end{bmatrix}_{\vec{e}} = \vec{e}^T \mathbf{D} \vec{e} \quad (7.19)$$

Theo công thức (7.3), nếu tenxơ $\vec{\vec{D}}$ có dạng

$$\vec{\vec{D}} = \vec{a}_1 \otimes \vec{b}_1 + \vec{a}_2 \otimes \vec{b}_2 + \dots + \vec{a}_n \otimes \vec{b}_n \quad (7.20)$$

thì ma trận \mathbf{D} của nó có thể biểu diễn dưới dạng

$$\mathbf{D} = \mathbf{a}_1 \mathbf{b}_1^T + \mathbf{a}_2 \mathbf{b}_2^T + \dots + \mathbf{a}_n \mathbf{b}_n^T \quad (7.21)$$

Nhờ công thức (7.21) ta dễ dàng tính được các phần tử của ma trận \mathbf{D} của tenxơ hạng hai $\vec{\vec{D}}$ cho bởi công thức (7.20).

Ma trận của tenxơ hạng hai liên hợp

$$\vec{\vec{D}}^* = \vec{b}_1 \otimes \vec{a}_1 + \vec{b}_2 \otimes \vec{a}_2 + \dots + \vec{b}_n \otimes \vec{a}_n \quad (7.22)$$

có dạng

$$\mathbf{D}^* = \mathbf{b}_1 \mathbf{a}_1^T + \mathbf{b}_2 \mathbf{a}_2^T + \dots + \mathbf{b}_n \mathbf{a}_n^T \quad (7.23)$$

Chú ý. Giữa tenxơ hạng hai $\vec{\vec{D}}$ và ma trận cấp ba \mathbf{D} có một sự tương ứng 1-1. Chính vì vậy trong một số sách, người ta ít phân biệt rõ hai khái niệm này. Tuy nhiên, cần nhớ rằng khái niệm tenxơ về bản chất khác hẳn khái niệm ma trận.

Tenxơ hạng hai $\vec{\vec{D}}$ theo định nghĩa ở trên là một toán tử tuyến tính trong không gian \mathbb{E}^3 , nó không phụ thuộc vào hệ qui chiếu, còn ma trận \mathbf{D} của nó phụ thuộc vào hệ qui chiếu ta sử dụng.

b) Các định lý tương quan

Định lý 1 (Tích vô hướng của tenxơ với véctơ). Nếu $\vec{d} = \vec{\vec{D}} \cdot \vec{c}$ với $\vec{c} \in R^3, \vec{d} \in R^3$, thì véctơ đại số tương ứng có dạng

$$\vec{d} = \vec{\vec{D}} \cdot \vec{c} \Rightarrow \mathbf{d} = \mathbf{Dc} \quad (7.24)$$

Chứng minh. Thực vậy

$$\begin{aligned} \vec{d} &= \vec{\vec{D}} \cdot \vec{c} = (\vec{a} \otimes \vec{b}) \cdot \vec{c} = (\vec{b} \cdot \vec{c}) \vec{a} \\ &= (\vec{b} \cdot \vec{c})(a_1 \vec{e}_1 + a_2 \vec{e}_2 + a_3 \vec{e}_3) \end{aligned}$$

Từ đó suy ra

$$d_1 = a_1(\vec{b} \cdot \vec{c}) = a_1 \mathbf{b}^T \mathbf{c}, \quad d_2 = a_2(\vec{b} \cdot \vec{c}) = a_2 \mathbf{b}^T \mathbf{c}, \quad d_3 = a_3(\vec{b} \cdot \vec{c}) = a_3 \mathbf{b}^T \mathbf{c}$$

Biểu thức trên chứng tỏ rằng

$$\mathbf{d} = \mathbf{ab}^T \mathbf{c} = \mathbf{Dc}.$$

Định lý 2 (Tích hỗn hợp của tenxơ với véctơ). Nếu $\vec{d} = \vec{a} \times (\vec{\vec{D}} \cdot \vec{c})$ với $\vec{a}, \vec{c}, \vec{d} \in R^3$, thì véctơ đại số tương ứng có dạng

$$\vec{d} = \vec{a} \times (\vec{\vec{D}} \cdot \vec{c}) \Rightarrow \mathbf{d} = \vec{a} \mathbf{Dc} \quad (7.25)$$

Chứng minh. Gọi $\vec{b} = \vec{\vec{D}} \cdot \vec{c}$ ta có

$$\vec{d} = \vec{a} \times (\vec{\vec{D}} \cdot \vec{c}) = \vec{a} \times \vec{b}.$$

Theo định lý 1 ta có $\mathbf{b} = \mathbf{Dc}$. Do đó ta có

$$\mathbf{d} = \vec{a} \mathbf{b} = \vec{a} \mathbf{Dc}$$

7.6 Tenxơ hạng hai đơn vị

a) Định nghĩa

Xét tenxơ hạng hai

$$\vec{\vec{E}} = \vec{e}_1 \otimes \vec{e}_1 + \vec{e}_2 \otimes \vec{e}_2 + \vec{e}_3 \otimes \vec{e}_3 \quad (7.26)$$

trong đó $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ là 3 véctơ đơn vị của một hệ qui chiếu. Tenxơ này có hai tính

chất sau:

- *Tính chất 1.* Ma trận các toạ độ của tenxơ hạng hai $\vec{\vec{E}}$ là ma trận đơn vị cấp 3

$$\mathbf{E} = \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_1^T + \mathbf{e}_2 \mathbf{e}_2^T + \mathbf{e}_3 \mathbf{e}_3^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (7.27)$$

- *Tính chất 2.* Tích vô hướng bên phải và tích vô hướng bên trái của tenxơ $\vec{\vec{E}}$ với véctơ $\vec{v} \in \mathbb{R}^3$ thì bằng \vec{v}

$$\vec{\vec{E}} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{\vec{E}} = \vec{v} \quad (7.28)$$

Thật vậy, ta có

$$\begin{aligned} \vec{\vec{E}} \cdot \vec{v} &= (\vec{e}_1 \otimes \vec{e}_1) \cdot \vec{v} + (\vec{e}_2 \otimes \vec{e}_2) \cdot \vec{v} + (\vec{e}_3 \otimes \vec{e}_3) \cdot \vec{v} \\ &= \vec{e}_1 (\vec{e}_1 \cdot \vec{v}) + \vec{e}_2 (\vec{e}_2 \cdot \vec{v}) + \vec{e}_3 (\vec{e}_3 \cdot \vec{v}) \\ &= v_1 \vec{e}_1 + v_2 \vec{e}_2 + v_3 \vec{e}_3 = \vec{v} \end{aligned}$$

Tương tự, ta chứng minh được: Tích vô hướng bên trái của tenxơ hạng hai $\vec{\vec{E}}$ với véctơ $\vec{v} \in \mathbb{R}^3$ là véctơ \vec{v}

$$\begin{aligned} \vec{v} \cdot \vec{\vec{E}} &= \vec{v} \cdot (\vec{e}_1 \otimes \vec{e}_1) + \vec{v} \cdot (\vec{e}_2 \otimes \vec{e}_2) + \vec{v} \cdot (\vec{e}_3 \otimes \vec{e}_3) \\ &= (\vec{v} \cdot \vec{e}_1) \vec{e}_1 + (\vec{v} \cdot \vec{e}_2) \vec{e}_2 + (\vec{v} \cdot \vec{e}_3) \vec{e}_3 \\ &= v_1 \vec{e}_1 + v_2 \vec{e}_2 + v_3 \vec{e}_3 = \vec{v} \end{aligned}$$

Do đó, tenxơ hạng hai $\vec{\vec{E}}$ xác định bởi hệ thức (7.26) được gọi là tenxơ hạng hai đơn vị.

b) *Định lý tương quan tích véctơ kép*

$$\text{Định lý 3.} \quad \vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{v}) = (\vec{b} \otimes \vec{a} - \vec{a} \cdot \vec{b} \vec{\vec{E}}) \cdot \vec{v} \quad (7.29)$$

$$\vec{a} \tilde{\mathbf{b}} \mathbf{v} = (\mathbf{b} \mathbf{a}^T - \mathbf{a}^T \mathbf{b} \mathbf{E}) \mathbf{v} \quad (7.30)$$

$$\text{Hệ quả.} \quad \vec{a} \tilde{\mathbf{b}} = \mathbf{b} \mathbf{a}^T - \mathbf{a}^T \mathbf{b} \mathbf{E}_3 \quad (7.31)$$

Chứng minh. Theo định nghĩa tích véctơ kép $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{v})$ ta có

$$\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{v}) = (\vec{a} \cdot \vec{v}) \vec{b} - (\vec{a} \cdot \vec{b}) \vec{v}$$

Mặt khác theo định nghĩa tích vô hướng của tenxơ hạng hai với véctơ và theo tính chất của tenxơ đơn vị ta có

$$\begin{aligned} \vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{v}) &= (\vec{a} \cdot \vec{v}) \vec{b} - (\vec{a} \cdot \vec{b}) \vec{v} \\ &= (\vec{b} \otimes \vec{a}) \cdot \vec{v} - (\vec{a} \cdot \vec{b}) \vec{\vec{E}} \cdot \vec{v} = (\vec{b} \otimes \vec{a} - \vec{a} \cdot \vec{b} \vec{\vec{E}}) \cdot \vec{v} \end{aligned}$$

Dạng ma trận của hệ thức (7.28) là

$$\tilde{\mathbf{a}}\tilde{\mathbf{b}}\mathbf{v} = (\mathbf{b}\mathbf{a}^T - \mathbf{a}^T\mathbf{b}\mathbf{E})\mathbf{v}$$

Do hệ thức trên luôn luôn đúng với mọi véc tơ \mathbf{v} , nên ta có đồng nhất thức sau

$$\tilde{\mathbf{a}}\tilde{\mathbf{b}} = \mathbf{b}\mathbf{a}^T - \mathbf{a}^T\mathbf{b}\mathbf{E}_3$$

Chú ý. Công thức 7.29 có một vai trò quan trọng trong động lực học vật rắn và hệ các vật rắn. Sau này khi chứng minh các định lý và các nguyên lý cơ học trong hệ nhiều vật ta hay sử dụng công thức này.

7.7 Tóm tắt một vài công thức cần nhớ

Cho \vec{a} và \vec{b} là hai véc tơ trong không gian ba chiều. Ta đã đưa ra ba phép toán: tích vô hướng, tích véc tơ và tích tenxơ của hai véc tơ. Sau đó ta đã chứng minh hai định lý: tích vô hướng của tenxơ với véc tơ và tích hỗn hợp của tenxơ với véc tơ. Các phép toán đó được thể hiện bằng “ngôn ngữ hình học” và “ngôn ngữ đại số” trong bảng sau đây:

	Ngôn ngữ hình học	Ngôn ngữ đại số
Tích vô hướng của hai véc tơ	$\alpha = \vec{a}\vec{b}$	$\alpha = \mathbf{a}^T\mathbf{b} = \mathbf{b}^T\mathbf{a}$
Tích véc tơ của hai véc tơ	$\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$	$\mathbf{c} = \tilde{\mathbf{a}}\mathbf{b}$
Tích tenxơ của hai véc tơ	$\vec{\vec{D}} = \vec{a} \otimes \vec{b}$	$\mathbf{D} = \mathbf{a}\mathbf{b}^T$
Tích vô hướng của tenxơ và véc tơ	$\vec{d} = \vec{\vec{D}}\vec{c}$	$\mathbf{d} = \mathbf{D}\mathbf{c}$
Tích hỗn hợp của tenxơ với véc tơ	$\vec{d} = \vec{a} \times (\vec{\vec{D}}\vec{c})$	$\mathbf{d} = \tilde{\mathbf{a}}\mathbf{D}\mathbf{c}$

Chương 2

ĐỘNG HỌC VẬT RẮN

Động học vật rắn là phần rất quan trọng của giáo trình Động lực học hệ nhiều vật. Trong chương này ta trình bày bài toán xác định vị trí, vận tốc, gia tốc của vật rắn không gian chuyển động trong một hệ qui chiếu cố định. Vị trí của vật rắn ở trong không gian được xác định bởi vị trí một điểm định vị (position) và hướng (orientation) của vật rắn đối với một hệ qui chiếu đã chọn. Điểm định vị là một điểm xác định nào đó của vật rắn (thông thường trong động lực học ta hay lấy khối tâm của vật rắn làm điểm định vị). Hướng của vật rắn được xác định bằng ma trận cosin chỉ hướng hoặc các toạ độ suy rộng xác định vị trí của vật rắn quay quanh một điểm cố định. Vận tốc của vật rắn là tập hợp vận tốc của điểm định vị và vận tốc góc của vật rắn. Gia tốc của vật rắn là tập hợp gia tốc của điểm định vị và gia tốc góc của vật rắn.

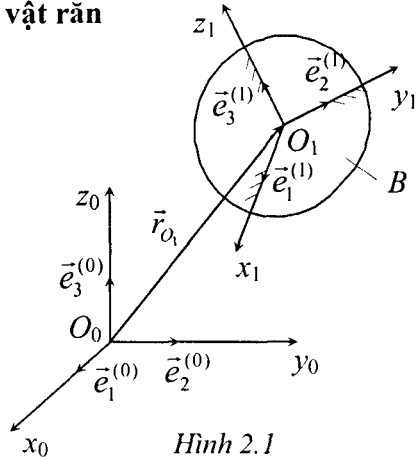
§1 XÁC ĐỊNH VỊ TRÍ CỦA VẬT RẮN TRONG KHÔNG GIAN

1.1 Khái niệm điểm định vị và hướng của vật rắn

Để mô tả chuyển động của vật rắn B đối với hệ qui chiếu cố định $R_0 = \{O_0, x_0, y_0, z_0\}$ ta đưa vào hệ qui chiếu $R_1 = \{O_1, x_1, y_1, z_1\}$ gắn chặt vào vật rắn B (hình 2.1). Vị trí của vật rắn B đối với hệ qui chiếu cố định R_0 được xác định bởi:

- Vị trí của điểm O_1 (bất kỳ) thuộc vật rắn B ,
- Vị trí của hệ qui chiếu R_1 đối với điểm O_1 .

Ta qui ước gọi vị trí của điểm O_1 là vị trí điểm định vị (Position), còn vị trí của hệ qui chiếu R_1 đối với điểm O_1 là hướng (Orientation) của vật rắn đối với hệ qui chiếu R_0



Hình 2.1

Trong hệ qui chiếu R_0 vị trí của điểm O_1 được xác định bởi véctor

$$\vec{r}_{O_1} = x_{O_1} \vec{e}_1^{(0)} + y_{O_1} \vec{e}_2^{(0)} + z_{O_1} \vec{e}_3^{(0)} \quad (1.1)$$

Trong đó $x_{O_1}, y_{O_1}, z_{O_1}$ là các toạ độ của véctor \vec{r}_{O_1} trong hệ qui chiếu R_0 , còn $\vec{e}_1^{(0)}, \vec{e}_2^{(0)}, \vec{e}_3^{(0)}$ là các véctor đơn vị trên các trục của hệ qui chiếu R_0 . Nếu sử dụng khái niệm véctor đại số, từ (1.1) ta suy ra

$${}^{R_0} \mathbf{r}_{O_1} = \mathbf{r}_{O_1}^{(0)} = [x_{O_1}, y_{O_1}, z_{O_1}]^T \quad (1.2)$$

Chú ý. Trong một số tài liệu *điểm định vị* của vật rắn còn được gọi là *điểm cực*.

Bài toán xác định hướng của vật rắn là bài toán xác định vị trí của vật rắn quay quanh một điểm cố định. Ta có thể xác định vị trí của vật rắn quay quanh một điểm cố định bằng ba toạ độ suy rộng: ba góc Euler, hoặc ba góc Cardan, hoặc ba góc Roll - Pitch - Yaw, v.v... Ta cũng có thể xác định vị trí của vật rắn quay quanh một điểm cố định bằng ba vectơ đơn vị $\vec{e}_1^{(1)}, \vec{e}_2^{(1)}, \vec{e}_3^{(1)}$ trên ba trục của hệ qui chiếu động R_1 gắn chặt vào vật rắn B đối với hệ qui chiếu R_0 :

$$\begin{aligned}\vec{e}_1^{(1)} &= a_{11}\vec{e}_1^{(0)} + a_{21}\vec{e}_2^{(0)} + a_{31}\vec{e}_3^{(0)} \\ \vec{e}_2^{(1)} &= a_{12}\vec{e}_1^{(0)} + a_{22}\vec{e}_2^{(0)} + a_{32}\vec{e}_3^{(0)} \\ \vec{e}_3^{(1)} &= a_{13}\vec{e}_1^{(0)} + a_{23}\vec{e}_2^{(0)} + a_{33}\vec{e}_3^{(0)}\end{aligned}\quad (1.3)$$

Trong đó a_{1i}, a_{2i}, a_{3i} ($i=1,2,3$) là các hình chiếu của vectơ đơn vị $\vec{e}_i^{(1)}$ ($i=1,2,3$) của hệ qui chiếu động R_1 lên các trục của hệ qui chiếu cố định R_0 . Các thành phần này được gọi là các côsin chỉ hướng của các trục của hệ qui chiếu động R_1 đối với hệ qui chiếu cố định R_0 .

1.2 Ma trận côsin chỉ hướng

Ta ký hiệu ba vectơ đơn vị trên các trục của hệ qui chiếu R_0 là $\vec{e}_1^{(0)}, \vec{e}_2^{(0)}, \vec{e}_3^{(0)}$, ba vectơ đơn vị trên các trục của hệ qui chiếu R_1 là $\vec{e}_1^{(1)}, \vec{e}_2^{(1)}, \vec{e}_3^{(1)}$ (hình 2.1).

a) Định nghĩa ma trận côsin chỉ hướng

Ma trận vuông cấp ba

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \vec{e}_1^{(0)} \cdot \vec{e}_1^{(1)} & \vec{e}_1^{(0)} \cdot \vec{e}_2^{(1)} & \vec{e}_1^{(0)} \cdot \vec{e}_3^{(1)} \\ \vec{e}_2^{(0)} \cdot \vec{e}_1^{(1)} & \vec{e}_2^{(0)} \cdot \vec{e}_2^{(1)} & \vec{e}_2^{(0)} \cdot \vec{e}_3^{(1)} \\ \vec{e}_3^{(0)} \cdot \vec{e}_1^{(1)} & \vec{e}_3^{(0)} \cdot \vec{e}_2^{(1)} & \vec{e}_3^{(0)} \cdot \vec{e}_3^{(1)} \end{bmatrix}\quad (1.4)$$

được gọi là ma trận côsin chỉ hướng của vật rắn B đối với hệ qui chiếu R_0 .

Nếu ta đưa vào ký hiệu

$$a_{ij} = \vec{e}_i^{(0)} \cdot \vec{e}_j^{(1)} = \cos(\vec{e}_i^{(0)}, \vec{e}_j^{(1)}), \quad (i, j = 1, 2, 3)\quad (1.5)$$

thì ma trận côsin chỉ hướng (1.4) có dạng

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}\quad (1.6)$$

b) Ý nghĩa của ma trận côsin chỉ hướng

Để thấy rõ ý nghĩa của ma trận côsin chỉ hướng, ta xét hai hệ qui chiếu R_0 và R_1 có cùng gốc toạ độ O (hình 2.2). Trong đó hệ qui chiếu động R_1 được gắn chặt vào vật rắn B. Lấy một điểm P bất kỳ thuộc vật rắn B. Vị trí của điểm P được xác định bởi

véc tơ $\overline{OP} = \vec{u}$. Nếu ký hiệu tọa độ của điểm P trong hệ qui cố định R_0 là $u_1^{(0)}, u_2^{(0)}, u_3^{(0)}$, trong hệ qui chiếu động R_1 là $u_1^{(1)}, u_2^{(1)}, u_3^{(1)}$ thì ta có các biểu thức sau:

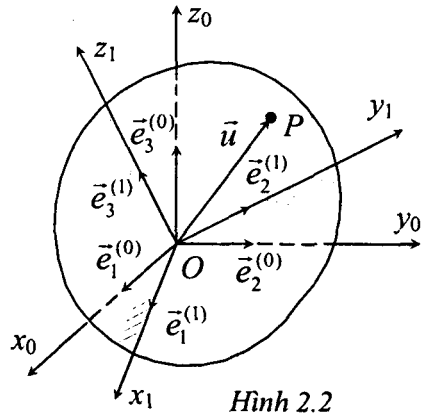
$$\vec{u} = u_1^{(0)} \vec{e}_1^{(0)} + u_2^{(0)} \vec{e}_2^{(0)} + u_3^{(0)} \vec{e}_3^{(0)} \quad (1.7)$$

$$\vec{u} = u_1^{(1)} \vec{e}_1^{(1)} + u_2^{(1)} \vec{e}_2^{(1)} + u_3^{(1)} \vec{e}_3^{(1)} \quad (1.8)$$

Từ đó ta suy ra các véc tơ đại số

$$\mathbf{u}^{(0)} = {}^{R_0} \mathbf{u} = [u_1^{(0)}, u_2^{(0)}, u_3^{(0)}]^T,$$

$$\mathbf{u}^{(1)} = {}^{R_1} \mathbf{u} = [u_1^{(1)}, u_2^{(1)}, u_3^{(1)}]^T$$



Hình 2.2

Ta đi tìm mối quan hệ giữa các véc tơ đại số $\mathbf{u}^{(0)}$ và $\mathbf{u}^{(1)}$.

Từ định nghĩa ma trận côsin chỉ hướng ta suy ra bảng sau

	x_1	y_1	z_1
x_0	$a_{11} = \vec{e}_1^{(0)} \cdot \vec{e}_1^{(1)}$	$a_{12} = \vec{e}_1^{(0)} \cdot \vec{e}_2^{(1)}$	$a_{13} = \vec{e}_1^{(0)} \cdot \vec{e}_3^{(1)}$
y_0	$a_{21} = \vec{e}_2^{(0)} \cdot \vec{e}_1^{(1)}$	$a_{22} = \vec{e}_2^{(0)} \cdot \vec{e}_2^{(1)}$	$a_{23} = \vec{e}_2^{(0)} \cdot \vec{e}_3^{(1)}$
z_0	$a_{31} = \vec{e}_3^{(0)} \cdot \vec{e}_1^{(1)}$	$a_{32} = \vec{e}_3^{(0)} \cdot \vec{e}_2^{(1)}$	$a_{33} = \vec{e}_3^{(0)} \cdot \vec{e}_3^{(1)}$

Bảng 2.1. Bảng xác định ma trận côsin chỉ hướng

Từ bảng trên ta dễ dàng thiết lập được các hệ thức liên hệ (1.3). Thế các biểu thức (1.3) vào biểu thức (1.8) ta được

$$\begin{aligned} \vec{u} = & (a_{11}u_1^{(1)} + a_{12}u_2^{(1)} + a_{13}u_3^{(1)})\vec{e}_1^{(0)} + (a_{21}u_1^{(1)} + a_{22}u_2^{(1)} + a_{23}u_3^{(1)})\vec{e}_2^{(0)} \\ & + (a_{31}u_1^{(1)} + a_{32}u_2^{(1)} + a_{33}u_3^{(1)})\vec{e}_3^{(0)} \end{aligned} \quad (1.9)$$

So sánh các biểu thức (1.7) và (1.9) ta suy ra hệ phương trình sau

$$\begin{bmatrix} u_1^{(0)} \\ u_2^{(0)} \\ u_3^{(0)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1^{(1)} \\ u_2^{(1)} \\ u_3^{(1)} \end{bmatrix} \quad (1.10)$$

Hệ phương trình (1.10) có thể viết ngắn gọn như sau

$$\mathbf{u}^{(0)} = \mathbf{A} \mathbf{u}^{(1)} \quad (1.11)$$

Như thế ma trận côsin chỉ hướng xác định vị trí của vật rắn B (hệ qui chiếu động R_1) đối với hệ qui chiếu R_0 . Từ (1.11) ta thấy ma trận côsin chỉ hướng \mathbf{A} biến đổi tọa độ của điểm P tùy ý thuộc vật rắn B trong hệ qui chiếu động R_1 sang tọa độ của nó trong hệ qui chiếu cố định R_0 .

1.3 Các tính chất cơ bản của ma trận côsin chỉ hướng

Để hiểu rõ hơn về ma trận côsin chỉ hướng ta nêu lên các tính chất cơ bản của ma trận này.

Định lý 1. Ma trận côsin chỉ hướng là ma trận trực giao.

Chứng minh. Từ các phương trình (1.3) ta suy ra

$${}^{R_0}\mathbf{e}_1^{(1)} = \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ a_{31} \end{bmatrix}, \quad {}^{R_0}\mathbf{e}_2^{(1)} = \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ a_{32} \end{bmatrix}, \quad {}^{R_0}\mathbf{e}_3^{(1)} = \begin{bmatrix} a_{13} \\ a_{23} \\ a_{33} \end{bmatrix}$$

Từ đó, ma trận côsin chỉ hướng (1.6) có thể viết lại dưới dạng

$$\mathbf{A} = \left[{}^{R_0}\mathbf{e}_1^{(1)}, {}^{R_0}\mathbf{e}_2^{(1)}, {}^{R_0}\mathbf{e}_3^{(1)} \right] \quad (1.12)$$

Từ (1.12) ta thấy: Ma trận côsin chỉ hướng \mathbf{A} là ma trận có ba cột là ba vectơ trực chuẩn. Do đó \mathbf{A} là một ma trận trực giao. Từ tính chất của ma trận trực giao ta suy ra $\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{A}^T$. Do đó từ công thức (1.11) ta có biến đổi ngược

$$\mathbf{u}^{(1)} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{u}^{(0)} = \mathbf{A}^T\mathbf{u}^{(0)} \quad (1.13)$$

Hệ quả của định lý 1. Trong chín thành phần a_{ij} của ma trận côsin chỉ hướng \mathbf{A} chỉ có ba thành phần độc lập.

Quả vậy, do ma trận côsin chỉ hướng \mathbf{A} là ma trận trực giao nên ta có $\mathbf{A}\mathbf{A}^T = \mathbf{E}$. Từ đó ta suy ra sáu phương trình ràng buộc 9 thành phần của ma trận côsin chỉ hướng như sau

$$a_{11}^2 + a_{12}^2 + a_{13}^2 = 1, \quad a_{11}a_{21} + a_{12}a_{22} + a_{13}a_{23} = 0$$

$$a_{21}^2 + a_{22}^2 + a_{23}^2 = 1, \quad a_{11}a_{31} + a_{12}a_{32} + a_{13}a_{33} = 0$$

$$a_{31}^2 + a_{32}^2 + a_{33}^2 = 1, \quad a_{21}a_{31} + a_{22}a_{32} + a_{23}a_{33} = 0$$

Do đó chỉ còn lại ba thành phần của ma trận côsin chỉ hướng độc lập.

Định lý 2. Định thức của ma trận côsin chỉ hướng bằng một, $\det \mathbf{A} = 1$.

Chứng minh. Theo biểu thức tích tích hỗn hợp của ba vectơ ở chương 1

$$\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = |\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}|$$

và công thức (1.12) ta suy ra

$$\det \mathbf{A} = |\mathbf{e}_1^{(1)}, \mathbf{e}_2^{(1)}, \mathbf{e}_3^{(1)}| = \vec{e}_1^{(1)} \cdot (\vec{e}_2^{(1)} \times \vec{e}_3^{(1)}) \quad (1)$$

Do R_1 là hệ qui chiếu thuận nên ta có

$$\vec{e}_2^{(1)} \times \vec{e}_3^{(1)} = \vec{e}_1^{(1)} \quad (2)$$

Thế (2) vào (1) ta được

$$\det \mathbf{A} = \vec{e}_1^{(1)} \cdot \vec{e}_1^{(1)} = 1$$

Định lý 3. Ma trận côsin chỉ hướng có ít nhất một trị riêng bằng 1.

Chứng minh. Trước hết ta chứng minh các trị riêng của ma trận côsin chỉ hướng \mathbf{A} đều có trị tuyệt đối là 1. Giả sử λ là trị riêng của ma trận \mathbf{A} , \vec{u} là vectơ riêng tương ứng. Theo bài toán trị riêng ta có

$$\mathbf{A}\vec{u} = \lambda\vec{u} \quad (1)$$

Từ đó suy ra

$$(\mathbf{A}\vec{u}) \cdot (\mathbf{A}\vec{u}) = (\mathbf{A}\vec{u})^T (\mathbf{A}\vec{u}) = \mathbf{u}^T \mathbf{A}^T \mathbf{A} \vec{u} = \mathbf{u}^T \vec{u} = |\vec{u}|^2 \quad (2)$$

$$\text{Vậy } |\mathbf{A}\vec{u}| = |\vec{u}| = |\lambda||\vec{u}| \Rightarrow |\lambda| = 1 \quad (3)$$

Bây giờ ta chứng minh trong ba trị riêng $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ của ma trận \mathbf{A} có một trị riêng là 1. Theo trên ta có $|\lambda_1| = |\lambda_2| = |\lambda_3| = 1$. Do \mathbf{A} là ma trận vuông cấp ba với các phần tử là các số thực nên phương trình đặc trưng của nó là phương trình đại số bậc ba với hệ số thực

$$a_0\lambda^3 + a_1\lambda^2 + a_2\lambda + a_3 = 0 \quad (4)$$

Do đó các trị riêng của ma trận \mathbf{A} có thể có hai khả năng:

$\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ là các số thực

$\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ có một trị riêng thực và một cặp trị riêng phức liên hợp.

Giả sử λ_1 là trị riêng thực của \mathbf{A} . Theo (3) ta thấy có hai khả năng xảy ra hoặc $\lambda_1 = 1$ hoặc $\lambda_1 = -1$. Nếu $\lambda_1 = 1$, định lý được chứng minh. Nếu $\lambda_1 = -1$, ta có

$$\det \mathbf{A} = \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 = 1 \Rightarrow \lambda_2 \lambda_3 = -1 \quad (5)$$

Ta thấy có hai khả năng xảy ra: hoặc λ_2, λ_3 là hai số thực, hoặc λ_2, λ_3 là hai số phức liên hợp. Nếu λ_2 và λ_3 là hai số phức liên hợp ($\lambda_3 = \bar{\lambda}_2$) ta có hệ thức

$$\lambda_2 \lambda_3 = \lambda_2 \bar{\lambda}_2 = |\lambda_2|^2 = 1 \quad (6)$$

Hệ thức (6) mâu thuẫn với (5). Vậy λ_2, λ_3 phải là hai số thực. Do $|\lambda_2| = |\lambda_3| = 1$, $\lambda_2 \lambda_3 = -1$ nên ta suy ra:

$$\text{hoặc } \lambda_2 = 1, \lambda_3 = -1 \text{ hoặc } \lambda_2 = -1, \lambda_3 = 1$$

Như thế ma trận côsin chỉ hướng \mathbf{A} luôn có một trị riêng bằng 1.

1.4 Định lý Euler về chuyển động quay hữu hạn của vật rắn có một điểm cố định

Xét chuyển động của vật rắn B có một điểm O cố định. Chọn $R_0 \equiv Ox_0y_0z_0$ là hệ qui chiếu cố định, hệ qui chiếu $R_1 \equiv Ox_1y_1z_1$ là hệ qui chiếu động gắn liền vào vật rắn B (hình 2.3). Vị trí của vật rắn B đối với hệ qui chiếu cố định được xác định bởi ma trận côsin chỉ hướng A xác định vị trí của hệ qui chiếu động R_1 đối với hệ qui chiếu cố định R_0 .

Định lý Euler. Cho R_0 và R_1 là hai hệ qui chiếu có chung điểm gốc tại O . Hệ qui chiếu R_1 gắn chặt vào vật rắn B . A là ma trận côsin chỉ hướng của vật rắn B đối với hệ qui chiếu R_0 . Ta có thể quay hệ qui chiếu R_0 sang hệ qui chiếu R_1 bằng một phép quay hữu hạn quanh trục Δ đi qua O . Hướng của trục Δ là hướng của vectơ riêng \vec{u} ứng với trị riêng $\lambda=1$ của ma trận côsin chỉ hướng A .

Chứng minh. Gọi λ là trị riêng của ma trận côsin chỉ hướng A mà $\lambda=1$. Theo bài toán trị riêng ta có

$$A\vec{u} = \lambda\vec{u} = \vec{u} \quad (1)$$

Gọi $\mathbf{u}^{(0)}$ là vectơ đại số của \vec{u} trong hệ qui chiếu R_0 , $\mathbf{u}^{(1)}$ là vectơ đại số của \vec{u} trong hệ qui chiếu R_1 . Từ (1) ta suy ra

$$A\mathbf{u}^{(1)} = \mathbf{u}^{(1)} \quad (2)$$

Mặt khác từ ý nghĩa của ma trận côsin chỉ hướng ta có

$$\mathbf{u}^{(0)} = A\mathbf{u}^{(1)} \quad (3)$$

Thế (2) vào (3) ta được

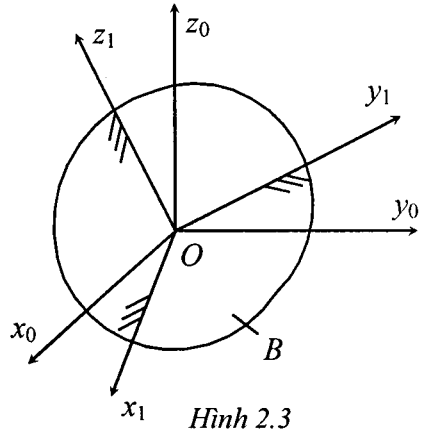
$$\mathbf{u}^{(0)} = A\mathbf{u}^{(1)} = \mathbf{u}^{(1)} \quad (4)$$

Như thế hình chiếu của vectơ \vec{u} lên các trục tọa độ của hệ qui chiếu R_0 và R_1 là như nhau. Vậy vectơ \vec{u} là bất biến trong phép quay hệ qui chiếu R_0 sang hệ qui chiếu R_1 . Vậy \vec{u} là trục quay của vật rắn trong phép quay R_0 sang R_1 .

Hệ quả. Chuyển động quay tức thời của vật rắn quanh một điểm cố định O là chuyển động quay quanh một trục quay tức thời đi qua điểm O cố định đó.

Chú ý:

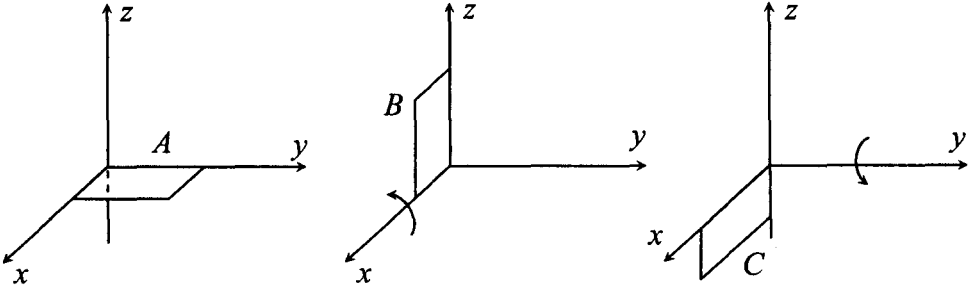
- 1) Do định lý Euler, nên ma trận côsin chỉ hướng A của hệ qui chiếu R_1 đối với hệ qui chiếu R_0 còn được gọi là ma trận quay hệ qui chiếu R_0 sang hệ qui chiếu R_1 .
- 2) Tính không giao hoán của các phép quay hữu hạn.



Hình 2.3

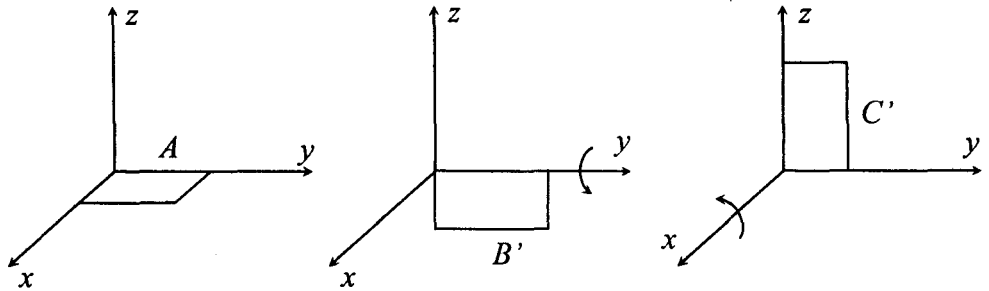
Các chuyển động quay hữu hạn không có tính chất giao hoán: Xuất phát từ một vị trí cho trước thực hiện hai chuyển động quay theo thứ tự khác nhau, ta được vị trí cuối cùng khác nhau.

Thí dụ 2.1. Thực hiện phép quay theo thứ tự $(\mathbf{u}_1 = \mathbf{e}_x, \beta_1 = 90^\circ) \rightarrow (\mathbf{u}_2 = \mathbf{e}_y, \beta_2 = 90^\circ)$



Hình 2.4

Nếu ta thay đổi thứ tự quay $(\mathbf{u}_2 = \mathbf{e}_y, \beta_2 = 90^\circ) \rightarrow (\mathbf{u}_1 = \mathbf{e}_x, \beta_1 = 90^\circ)$, thì ta được:

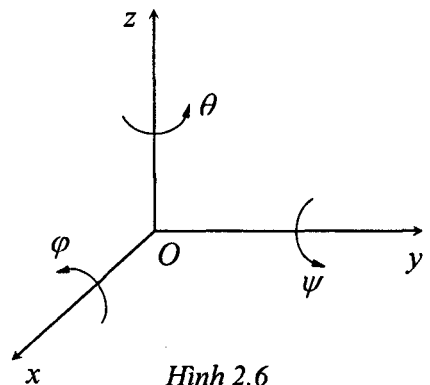


Hình 2.5

Như thế thực hiện hai phép quay quanh các trục x và y những góc như nhau, nhưng thứ tự quay khác nhau, vị trí của tâm phẳng A ở trong không gian khác nhau.

1.5 Các ma trận quay cơ bản

Trước hết ta quy ước hướng quay dương quanh một trục là hướng quay ngược chiều kim đồng hồ như hình 2.6. Các phép quay quanh các trục x, y, z của hệ qui chiếu R được gọi là các phép quay cơ bản. Trước hết ta tìm ma trận cosin chỉ hướng của vật rắn khi nó quay quanh trục x_0 một góc φ (hình 2.7). Ma trận này được gọi là ma trận quay của vật rắn quanh một trục x_0 một góc φ . Dựa vào công thức định nghĩa (1.4) ta dễ dàng xác định được ma trận



Hình 2.6

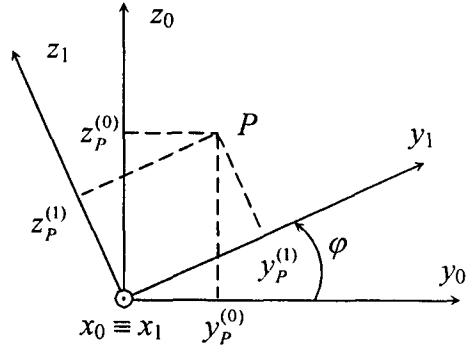
côsin chỉ hướng

$$\mathbf{A}_x(\varphi) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \varphi & -\sin \varphi \\ 0 & \sin \varphi & \cos \varphi \end{bmatrix} \quad (1.14)$$

Ma trận (1.14) được gọi là ma trận quay cơ bản của phép quay quanh trục x_0 .

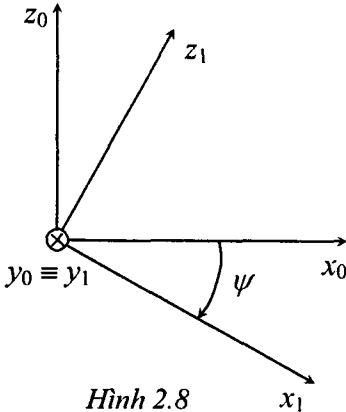
Hệ thức liên hệ giữa các tọa độ của điểm P trong hệ qui chiếu cố định $R_0 = Ox_0y_0z_0$ và trong hệ qui chiếu động $R_1 = Ox_1y_1z_1$ có dạng

$$\begin{bmatrix} x_p^{(0)} \\ y_p^{(0)} \\ z_p^{(0)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \varphi & -\sin \varphi \\ 0 & \sin \varphi & \cos \varphi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_p^{(1)} \\ y_p^{(1)} \\ z_p^{(1)} \end{bmatrix} \quad (1.15)$$

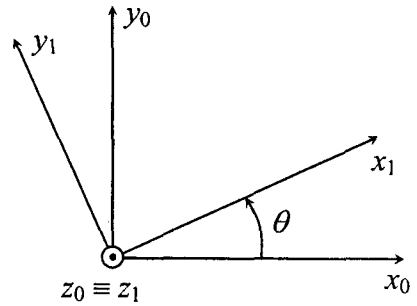


Hình 2.7

Bằng cách tính tương tự ta xác định được ma trận quay quanh các trục y_0 và z_0 (hình 2.8 và hình 2.9).



Hình 2.8

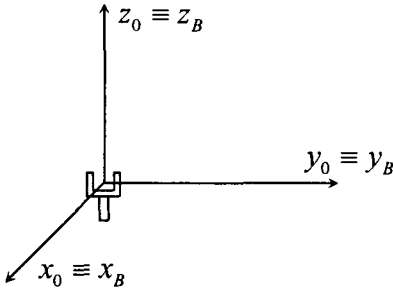


Hình 2.9

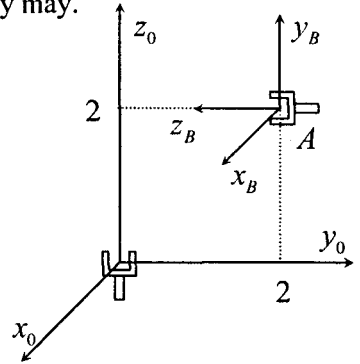
$$\mathbf{A}_y(\psi) = \begin{bmatrix} \cos \psi & 0 & \sin \psi \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \psi & 0 & \cos \psi \end{bmatrix} \quad (1.16)$$

$$\mathbf{A}_z(\theta) = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (1.17)$$

Thí dụ 2.2. Lúc đầu vị trí của hệ qui chiếu động $R_1 = Ax_By_Bz_B$ gắn liền với bàn kẹp tay máy trùng với vị trí của hệ quy chiếu cố định $R_0 = Ox_0y_0z_0$ (hình 2.10a). Tại thời điểm khảo sát vị trí của bàn kẹp như trên hình 2.10b. Hãy xác định vị trí điểm định vị và ma trận côsin chỉ hướng của bàn kẹp tay máy.



Hình 2.10a



Hình 2.10b

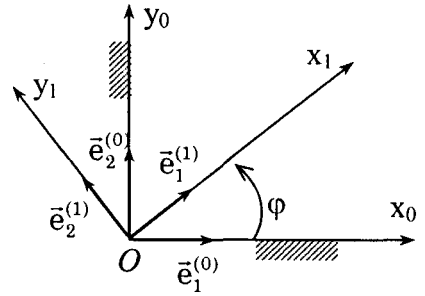
Lời giải. Vị trí điểm định vị được xác định bởi véc tơ

$${}^{R_0} \mathbf{r}_A = [0, 2, 2]^T$$

Bàn kẹp quay quanh trục x góc 90° . Vậy ma trận côsin chỉ hướng của bàn kẹp có dạng

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Thí dụ 2.3. Đạo hàm theo thời gian của véc tơ đơn vị của hệ qui chiếu động. Cho $R_0 = x_0y_0$ là hệ quy chiếu cố định. Véc tơ đơn vị trên các trục là $\vec{e}_1^{(0)}, \vec{e}_2^{(0)}$. Cho $R_1 = Ox_1y_1$ là hệ quy chiếu động, các véc tơ đơn vị trên các trục là $\vec{e}_1^{(1)}, \vec{e}_2^{(1)}$ (hình 2.11). Tìm đạo hàm của các véc tơ đơn vị $\vec{e}_1^{(1)}, \vec{e}_2^{(1)}$ trong hệ quy chiếu cố định $R_0 = x_0y_0$.



Hình 2.11

Lời giải. Từ hình vẽ (2.11) ta có

$$\vec{e}_1^{(1)} = \cos \varphi \cdot \vec{e}_1^{(0)} + \sin \varphi \cdot \vec{e}_2^{(0)}$$

$$\vec{e}_2^{(1)} = -\sin \varphi \cdot \vec{e}_1^{(0)} + \cos \varphi \cdot \vec{e}_2^{(0)}$$

(1)

Đạo hàm các véc tơ trên theo thời gian ở trong hệ quy chiếu cố định $R_0 = Ox_0y_0$ ta được

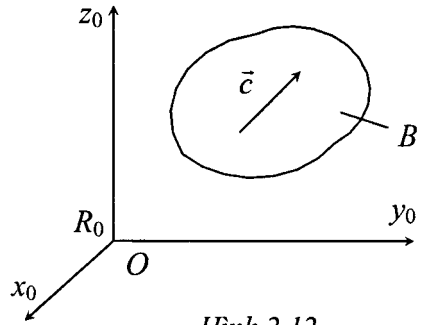
$$\begin{aligned} \frac{{}^{R_0} d\vec{e}_1^{(1)}}{dt} &= (-\sin \varphi \vec{e}_1^{(0)} + \cos \varphi \vec{e}_2^{(0)}) \dot{\varphi} = \dot{\varphi} \vec{e}_2^{(1)} \\ \frac{{}^{R_0} d\vec{e}_2^{(1)}}{dt} &= -(\cos \varphi \vec{e}_1^{(0)} + \sin \varphi \vec{e}_2^{(0)}) \dot{\varphi} = -\dot{\varphi} \vec{e}_1^{(1)} \end{aligned} \quad (1.18)$$

§2 VẬN TỐC GÓC VÀ GIA TỐC GÓC CỦA VẬT RẮN

Vận tốc góc của vật rắn là một trong những đặc trưng động học cơ bản nhất của vật rắn. Vận tốc góc của vật rắn có thể định nghĩa một cách trực giác là sự thay đổi theo thời gian về hướng của vật rắn. Tuy nhiên trong trường hợp tổng quát, nếu định nghĩa như vậy rất khó xác định hướng quay của vật rắn một cách định lượng đơn giản như khi định nghĩa vận tốc của chất điểm. Vì vậy người ta cố gắng xác định vận tốc góc của vật rắn qua đạo hàm theo thời gian của một đại lượng định lượng tương đối đơn giản nào đó của vật rắn.

2.1 Định nghĩa vận tốc góc của vật rắn

Xét một vật rắn B chuyển động đối với một hệ qui chiếu R_0 như hình 2.12. Lấy \vec{c} là một vectơ tùy ý khác không thuộc vật rắn B . Do $(\vec{c})^2 = \text{const}$ nên đạo hàm theo t biểu thức này ta được $\vec{c} \cdot \frac{{}^{R_0} d\vec{c}}{dt} = 0$. Như thế $\frac{{}^{R_0} d\vec{c}}{dt}$ là một vectơ vuông góc với vectơ \vec{c} . Mặt khác do tích có hướng $\vec{b} = \vec{a} \times \vec{c}$ là một vectơ vuông góc với mặt phẳng chứa \vec{a} và \vec{c} . Những nhận xét đó đã gợi ý cho ta xây dựng khái niệm vectơ vận tốc góc của vật rắn như sau.



Hình 2.12

a) *Định nghĩa vận tốc góc của vật rắn.* Lấy \vec{c} là một vectơ tùy ý khác không của vật rắn B . Vận tốc góc của vật rắn B đối với hệ qui chiếu R_0 là một vectơ, ký hiệu là ${}^{R_0} \vec{\omega}^B$, mà nhân vectơ với vectơ \vec{c} ta được đạo hàm $\frac{{}^{R_0} d\vec{c}}{dt}$

$$\frac{{}^{R_0} d\vec{c}}{dt} = {}^{R_0} \vec{\omega}^B \times \vec{c} \quad (2.1)$$

b) *Chú ý*

1) Vận tốc góc của vật rắn được định nghĩa bởi công thức (2.1) là duy nhất. Thật vậy, giả sử ${}^{R_0} \vec{\omega}^B$ không duy nhất, sẽ tồn tại một vectơ ${}^{R_0} \vec{\omega}'^B$ mà

$$\frac{{}^{R_0} d\vec{c}}{dt} = {}^{R_0} \vec{\omega}'^B \times \vec{c} \quad (1)$$

Lấy biểu thức (2.1) trừ đi biểu thức (1) ta được

$$\vec{0} = {}^{R_0}\vec{\omega}^B \times \vec{c} - {}^{R_0}\vec{\omega}'^B \times \vec{c} = ({}^{R_0}\vec{\omega}^B - {}^{R_0}\vec{\omega}'^B) \times \vec{c} \quad (2)$$

Do \vec{c} là vectơ tùy ý khác không của vật rắn B và do phương trình (2) thoả mãn với mọi $\vec{c} \neq \vec{0}$, nên ta suy ra

$${}^{R_0}\vec{\omega}^B - {}^{R_0}\vec{\omega}'^B = 0 \Rightarrow {}^{R_0}\vec{\omega}^B = {}^{R_0}\vec{\omega}'^B$$

2) Ta chấp nhận giả thiết về sự tồn tại của đạo hàm vectơ \vec{c} theo thời gian. Từ đó suy ra sự tồn tại của khái niệm vận tốc góc của vật rắn theo như định nghĩa (2.1).

3) Khi khảo sát chuyển động của một vật rắn đối với một hệ qui chiếu, ta có thể bỏ các chỉ số trên ở trong ký hiệu vận tốc góc và viết một cách ngắn gọn là $\vec{\omega}$.

2.2 Các định lý về vận tốc góc của vật rắn

a) Định lý xác định vận tốc góc của vật rắn qua các vectơ đơn vị của một hệ qui chiếu động

Ta gắn chặt vào vật rắn B một hệ qui chiếu vuông góc R_1 có các vectơ đơn vị trên các trục toạ độ là $\vec{e}_1^{(1)}$, $\vec{e}_2^{(1)}$, $\vec{e}_3^{(1)}$ (hình 2.13).

Định lý 2.1. Trong cơ sở vuông góc $R_1 = \{\vec{e}_1^{(1)}, \vec{e}_2^{(1)}, \vec{e}_3^{(1)}\}$ gắn liền vào vật rắn B , vận tốc góc của vật rắn B đối với hệ qui chiếu R_0 được xác định bởi công thức

$${}^{R_0}\vec{\omega}^B = \vec{e}_1^{(1)} \left(\frac{{}^{R_0}d\vec{e}_2^{(1)}}{dt} \cdot \vec{e}_3^{(1)} \right) + \vec{e}_2^{(1)} \left(\frac{{}^{R_0}d\vec{e}_3^{(1)}}{dt} \cdot \vec{e}_1^{(1)} \right) + \vec{e}_3^{(1)} \left(\frac{{}^{R_0}d\vec{e}_1^{(1)}}{dt} \cdot \vec{e}_2^{(1)} \right) \quad (2.2)$$

Chứng minh. Trong hệ qui chiếu $R_1 = \{\vec{e}_1^{(1)}, \vec{e}_2^{(1)}, \vec{e}_3^{(1)}\}$ vectơ vận tốc góc của vật rắn B có thể viết dưới dạng

$${}^{R_0}\vec{\omega}^B = ({}^{R_0}\vec{\omega}^B \cdot \vec{e}_1^{(1)})\vec{e}_1^{(1)} + ({}^{R_0}\vec{\omega}^B \cdot \vec{e}_2^{(1)})\vec{e}_2^{(1)} + ({}^{R_0}\vec{\omega}^B \cdot \vec{e}_3^{(1)})\vec{e}_3^{(1)} \quad (1)$$

Do $\vec{e}_1^{(1)}$, $\vec{e}_2^{(1)}$, $\vec{e}_3^{(1)}$ là ba vectơ đơn vị trên ba trục của một hệ toạ độ vuông góc nên ta có công thức quen biết

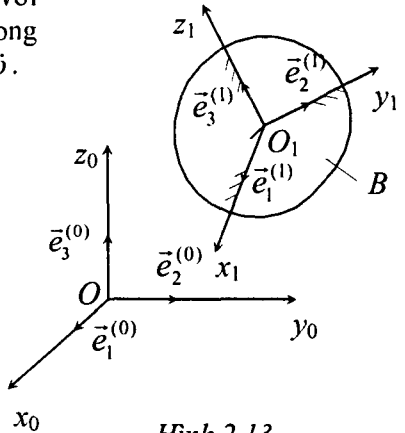
$$\vec{e}_1^{(1)} = \vec{e}_2^{(1)} \times \vec{e}_3^{(1)}, \quad \vec{e}_2^{(1)} = \vec{e}_3^{(1)} \times \vec{e}_1^{(1)}, \quad \vec{e}_3^{(1)} = \vec{e}_1^{(1)} \times \vec{e}_2^{(1)} \quad (2)$$

Thế các biểu thức (2) vào (1) ta được

$${}^{R_0}\vec{\omega}^B = [{}^{R_0}\vec{\omega}^B \cdot (\vec{e}_2^{(1)} \times \vec{e}_3^{(1)})]\vec{e}_1^{(1)} + [{}^{R_0}\vec{\omega}^B \cdot (\vec{e}_3^{(1)} \times \vec{e}_1^{(1)})]\vec{e}_2^{(1)} + [{}^{R_0}\vec{\omega}^B \cdot (\vec{e}_1^{(1)} \times \vec{e}_2^{(1)})]\vec{e}_3^{(1)} \quad (3)$$

Chú ý đến tính chất của tích hỗn hợp ba vectơ

$$\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{b} \cdot (\vec{c} \times \vec{a}) = \vec{c} \cdot (\vec{a} \times \vec{b})$$



Hình 2.13

và định nghĩa vận tốc góc của vật rắn (2.1), hệ thức (3) có dạng

$$\begin{aligned} {}^{R_0}\vec{\omega}^B &= [\vec{e}_3^{(1)} \cdot ({}^{R_0}\vec{\omega}^B \times \vec{e}_2^{(1)})] \vec{e}_1^{(1)} + [\vec{e}_1^{(1)} \cdot ({}^{R_0}\vec{\omega}^B \times \vec{e}_3^{(1)})] \vec{e}_2^{(1)} + [\vec{e}_2^{(1)} \cdot ({}^{R_0}\vec{\omega}^B \times \vec{e}_1^{(1)})] \vec{e}_3^{(1)} \\ &= \left(\vec{e}_3^{(1)} \cdot \frac{{}^{R_0}d\vec{e}_2^{(1)}}{dt} \right) \vec{e}_1^{(1)} + \left(\vec{e}_1^{(1)} \cdot \frac{{}^{R_0}d\vec{e}_3^{(1)}}{dt} \right) \vec{e}_2^{(1)} + \left(\vec{e}_2^{(1)} \cdot \frac{{}^{R_0}d\vec{e}_1^{(1)}}{dt} \right) \vec{e}_3^{(1)} \end{aligned} \quad (4)$$

Do tích vô hướng của hai véctơ có tính chất giao hoán, từ (4) ta suy ra công thức (2.2). Định lý được chứng minh.

Thí dụ 2.4. Vận tốc góc của vật rắn quay quanh một trục cố định. Theo (2.2) biểu thức xác định vận tốc góc của vật rắn quay quanh một trục cố định có dạng

$$\vec{\omega} = \left(\frac{{}^{R_0}d\vec{e}_2}{dt} \cdot \vec{e}_3 \right) \vec{e}_1 + \left(\frac{{}^{R_0}d\vec{e}_3}{dt} \cdot \vec{e}_1 \right) \vec{e}_2 + \left(\frac{{}^{R_0}d\vec{e}_1}{dt} \cdot \vec{e}_2 \right) \vec{e}_3 \quad (1)$$

Trong trường hợp vật rắn quay quanh một trục cố định,

do $\vec{e}_3 = const$, nên $\frac{{}^{R_0}d\vec{e}_3}{dt} = 0$. Còn các đạo hàm $\frac{{}^{R_0}d\vec{e}_1}{dt}$

và $\frac{{}^{R_0}d\vec{e}_2}{dt}$ được tính theo công thức (1.18)

$$\frac{{}^{R_0}d\vec{e}_1}{dt} = \dot{\varphi} \vec{e}_2, \quad \frac{{}^{R_0}d\vec{e}_2}{dt} = -\dot{\varphi} \vec{e}_1, \quad \frac{{}^{R_0}d\vec{e}_3}{dt} = 0 \quad (2)$$

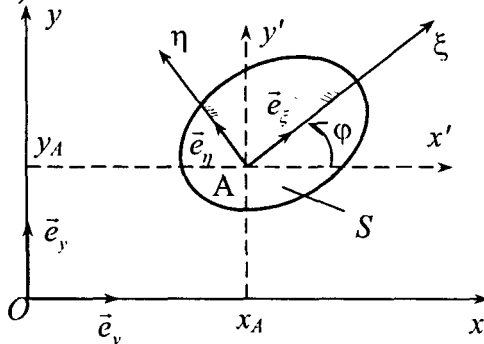
Thế (2) vào (1) ta được

$$\vec{\omega} = -\dot{\varphi} (\vec{e}_1 \cdot \vec{e}_3) \vec{e}_1 + (0 \cdot \vec{e}_1) \vec{e}_2 + \dot{\varphi} (\vec{e}_2 \cdot \vec{e}_2) \vec{e}_3 \quad (3)$$

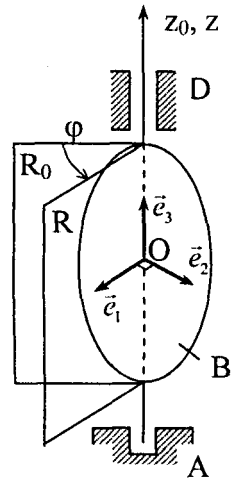
Do $\vec{e}_1 \cdot \vec{e}_3 = 0$, $\vec{e}_2 \cdot \vec{e}_2 = 1$, nên ta nhận được biểu thức xác định vận tốc góc của vật rắn quay quanh 1 trục cố định

$$\vec{\omega} = \dot{\varphi} \vec{e}_3 \quad (4)$$

Thí dụ 2.5. Vận tốc góc của vật rắn chuyển động phẳng. Theo công thức xác định vận tốc góc của vật rắn (2.2) ta có



Hình 2.15



Hình 2.14

$$\vec{\omega} = \left(\frac{{}^R d\vec{e}_\eta}{dt} \cdot \vec{e}_\zeta \right) \vec{e}_\xi + \left(\frac{{}^R d\vec{e}_\zeta}{dt} \cdot \vec{e}_\xi \right) \vec{e}_\eta + \left(\frac{{}^R d\vec{e}_\xi}{dt} \cdot \vec{e}_\eta \right) \vec{e}_\zeta \quad (1)$$

Trong bài toán phẳng như hình 2.15, theo các công thức (1.18), ta có

$$\frac{{}^R d\vec{e}_\xi}{dt} = \dot{\varphi} \vec{e}_\eta, \quad \frac{{}^R d\vec{e}_\eta}{dt} = -\dot{\varphi} \vec{e}_\xi, \quad \frac{{}^R d\vec{e}_\zeta}{dt} = 0 \quad (2)$$

Thế các biểu thức (2) vào biểu thức (1) ta được:

$$\vec{\omega} = -(\dot{\varphi} \vec{e}_\xi \cdot \vec{e}_\zeta) \vec{e}_\xi + (0 \cdot \vec{e}_\xi) \vec{e}_\eta + (\dot{\varphi} \vec{e}_\eta \cdot \vec{e}_\eta) \vec{e}_\zeta \quad (3)$$

Do $\vec{e}_\xi \cdot \vec{e}_\zeta = 0$, $\vec{e}_\eta \cdot \vec{e}_\eta = 1$ ta có công thức vận tốc góc:

$$\vec{\omega} = \dot{\varphi} \vec{e}_\zeta \quad (4)$$

b) Định lý về xác định vận tốc góc của vật rắn qua đạo hàm hai vectơ thuộc vật rắn

Định lý 2.2. Giả sử \vec{a} và \vec{b} là hai vectơ khác không thuộc vật rắn B và không song song với nhau. Khi đó vận tốc góc của vật rắn B có dạng

$${}^{R_0} \vec{\omega}^B = \frac{{}^{R_0} \frac{d\vec{a}}{dt} \times {}^{R_0} \frac{d\vec{b}}{dt}}{\frac{{}^{R_0} d\vec{a}}{dt} \cdot \vec{b}} \quad (2.3)$$

Chứng minh. Lấy \vec{c} là một vectơ tùy ý khác không của vật rắn B . Ta có thể biểu diễn vectơ \vec{c} dưới dạng

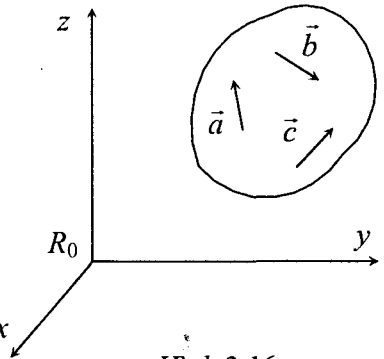
$$\vec{c} = \alpha \vec{a} + \beta \vec{b} + \gamma \vec{a} \times \vec{b} \quad (1)$$

Trong đó α, β, γ là các tọa độ của vectơ \vec{c} trong hệ qui chiếu động $R_1 = \{\vec{a}, \vec{b}, \vec{a} \times \vec{b}\}$. Đạo hàm vectơ \vec{c} theo thời gian ở trong hệ qui chiếu cố định R_0 ta được

$${}^{R_0} \frac{d\vec{c}}{dt} = \alpha \frac{{}^{R_0} d\vec{a}}{dt} + \beta \frac{{}^{R_0} d\vec{b}}{dt} + \gamma \left(\frac{{}^{R_0} d\vec{a}}{dt} \times \vec{b} + \vec{a} \times \frac{{}^{R_0} d\vec{b}}{dt} \right) \quad (2)$$

Ta đưa vào ký hiệu

$${}^{R_0} \vec{\omega}_1^B = \frac{{}^{R_0} \frac{d\vec{a}}{dt} \times {}^{R_0} \frac{d\vec{b}}{dt}}{\frac{{}^{R_0} d\vec{a}}{dt} \cdot \vec{b}} \quad (3)$$



Hình 2.16

Bây giờ ta sẽ chứng minh ${}^{R_0}\vec{\omega}_1^B$ bằng véctơ vận tốc góc của vật rắn B ở trong hệ qui chiếu R_0 .

Nhân hữu hướng véctơ ${}^{R_0}\vec{\omega}_1^B$ với véctơ \vec{c} ta được

$${}^{R_0}\vec{\omega}_1^B \times \vec{c} = \frac{\left[\left({}^{R_0} \frac{d\vec{a}}{dt} \right) \times \left({}^{R_0} \frac{d\vec{b}}{dt} \right) \right]}{\left({}^{R_0} \frac{d\vec{a}}{dt} \right) \cdot \vec{b}} \times (\alpha \vec{a} + \beta \vec{b} + \gamma \vec{a} \times \vec{b}) \quad (4)$$

Chú ý đến các tính chất của tích véctơ kép

$$\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = (\vec{a} \cdot \vec{c})\vec{b} - (\vec{a} \cdot \vec{b})\vec{c}$$

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c} = (\vec{a} \cdot \vec{c})\vec{b} - (\vec{b} \cdot \vec{c})\vec{a}$$

ta có

$$\left({}^{R_0} \frac{d\vec{a}}{dt} \right) \times \left({}^{R_0} \frac{d\vec{b}}{dt} \right) \times \vec{a} = \left[\left({}^{R_0} \frac{d\vec{a}}{dt} \right) \cdot \vec{a} \right] \left({}^{R_0} \frac{d\vec{b}}{dt} \right) - \left[\left({}^{R_0} \frac{d\vec{b}}{dt} \right) \cdot \vec{a} \right] \left({}^{R_0} \frac{d\vec{a}}{dt} \right) \quad (5)$$

Theo giả thiết $\vec{a} \in B$ nên $\vec{a} \cdot \vec{a} = \text{const}$. Từ đó suy ra

$$\frac{{}^{R_0} d(\vec{a} \cdot \vec{a})}{dt} = \frac{{}^{R_0} d\vec{a}}{dt} \cdot \vec{a} + \vec{a} \cdot \frac{{}^{R_0} d\vec{a}}{dt} = 2 \frac{{}^{R_0} d\vec{a}}{dt} \cdot \vec{a} = 0$$

Từ đó suy ra

$$\frac{{}^{R_0} d\vec{a}}{dt} \cdot \vec{a} = 0 \quad (6)$$

Chú ý đến (6) biểu thức (5) có dạng

$$\left({}^{R_0} \frac{d\vec{a}}{dt} \right) \times \left({}^{R_0} \frac{d\vec{b}}{dt} \right) \times \vec{a} = - \left[\left({}^{R_0} \frac{d\vec{b}}{dt} \right) \cdot \vec{a} \right] \left({}^{R_0} \frac{d\vec{a}}{dt} \right) \quad (7)$$

Mặt khác do $\vec{a} \in B$, $\vec{b} \in B$ nên $\vec{a} \cdot \vec{b} = \text{const}$. Từ đó ta có

$$\frac{{}^{R_0} d\vec{a}}{dt} \cdot \vec{b} = - \frac{{}^{R_0} d\vec{b}}{dt} \cdot \vec{a} \quad (8)$$

Thế (8) vào (7) ta được

$$\left({}^{R_0} \frac{d\vec{a}}{dt} \right) \times \left({}^{R_0} \frac{d\vec{b}}{dt} \right) \times \vec{a} = \left[\left({}^{R_0} \frac{d\vec{a}}{dt} \right) \cdot \vec{b} \right] \left({}^{R_0} \frac{d\vec{a}}{dt} \right) \quad (9)$$

Chia hai vế của (9) cho $\frac{{}^{R_0} d\vec{a}}{dt} \cdot \vec{b}$ ta được

$$\frac{\left({}^{R_0} \frac{d\vec{a}}{dt} \right) \times \left({}^{R_0} \frac{d\vec{b}}{dt} \right) \times \vec{a}}{\left({}^{R_0} \frac{d\vec{a}}{dt} \right) \cdot \vec{b}} = {}^{R_0} \vec{\omega}_1^B \times \vec{a} = \frac{{}^{R_0} d\vec{a}}{dt} \quad (10)$$

Theo định nghĩa vận tốc góc của vật rắn (2.1) ta có

$$\frac{{}^{R_0} d\vec{a}}{dt} = {}^{R_0} \vec{\omega}^B \times \vec{a} \quad (11)$$

Từ (10) và (11) ta suy ra

$${}^{R_0} \vec{\omega}^B = {}^{R_0} \vec{\omega}_1^B = \frac{\left({}^{R_0} \frac{d\vec{a}}{dt} \right) \times \left({}^{R_0} \frac{d\vec{b}}{dt} \right)}{\left({}^{R_0} \frac{d\vec{a}}{dt} \right) \cdot \vec{b}} \quad (12)$$

Chú ý bằng cách hoán vị vai trò của \vec{a} và \vec{b} ta có

$${}^{R_0} \vec{\omega}^B = \frac{\left({}^{R_0} \frac{d\vec{b}}{dt} \right) \times \left({}^{R_0} \frac{d\vec{a}}{dt} \right)}{\left({}^{R_0} \frac{d\vec{b}}{dt} \right) \cdot \vec{a}} \quad (2.4)$$

Từ định lý 2.2 ta suy ra hệ quả sau:

Hệ quả. Nếu biết vị trí ba điểm không thẳng hàng của vật rắn B thì ta xác định được véctơ vận tốc góc của vật rắn B .

c) Đạo hàm ma trận côsin chỉ hướng

Gọi \mathbf{A} là ma trận côsin chỉ hướng của vật rắn B đối với hệ quy chiếu R_0 (hình 2.13). Theo (1.12) ta có

$$\mathbf{A} = \left[{}^{R_0} \mathbf{e}_1^{(1)}, {}^{R_0} \mathbf{e}_2^{(1)}, {}^{R_0} \mathbf{e}_3^{(1)} \right] \quad (1)$$

Đạo hàm biểu thức (1) theo thời gian ở trong hệ quy chiếu R_0 ta được

$$\frac{{}^{R_0} d\mathbf{A}}{dt} = \left[\frac{{}^{R_0} d\mathbf{e}_1^{(1)}}{dt}, \frac{{}^{R_0} d\mathbf{e}_2^{(1)}}{dt}, \frac{{}^{R_0} d\mathbf{e}_3^{(1)}}{dt} \right] \quad (2)$$

Do $\frac{{}^{R_0} d\vec{e}_i^{(1)}}{dt} = {}^{R_0} \vec{\omega}^B \times \vec{e}_i^{(1)}$ ($i=1,2,3$) nên ta có

$$\frac{{}^{R_0} d\mathbf{e}_i^{(1)}}{dt} = \vec{\omega}^{(0)} {}^{R_0} \mathbf{e}_i^{(1)} \quad (i=1,2,3) \quad (3)$$

Trong đó $\vec{\omega}^{(0)}$ là véctơ đại số của ${}^{R_0} \vec{\omega}^B = \vec{\omega}$ trong hệ quy chiếu R_0 . Thay (3) vào (2) ta được

$$\frac{{}^{R_0}d\mathbf{A}}{dt} = \tilde{\omega}^{(0)} \left[{}^{R_0}\mathbf{e}_1^{(1)}, {}^{R_0}\mathbf{e}_2^{(1)}, {}^{R_0}\mathbf{e}_3^{(1)} \right] = \tilde{\omega}^{(0)} \mathbf{A}$$

Từ đó ta có công thức tính đạo hàm của ma trận cosin chỉ hướng

$$\frac{{}^{R_0}d\mathbf{A}}{dt} = \tilde{\omega}^{(0)} \mathbf{A} \quad (2.5)$$

d) Định lý xác định vận tốc góc của vật rắn từ ma trận cosin chỉ hướng

Định lý 2.3. Cho \mathbf{A} là ma trận cosin chỉ hướng của vật rắn trong hệ qui chiếu $R_0 = \{x_0, y_0, z_0\}$.

Khi đó toán tử sóng của vectơ vận tốc góc của vật rắn ở trong hệ qui chiếu cố định R_0 được xác định bởi công thức

$$\tilde{\omega}_B^{(0)} = \dot{\mathbf{A}}\mathbf{A}^T \quad (2.6)$$

Trong đó $\omega_B^{(0)} = [{}^{R_0}\omega_{x_0}^B, {}^{R_0}\omega_{y_0}^B, {}^{R_0}\omega_{z_0}^B]^T$, $\dot{\mathbf{A}} = \frac{{}^{R_0}d\mathbf{A}}{dt}$.

Chứng minh. Chọn P là một điểm tùy ý thuộc vật rắn B . Từ hình 2.17 ta có

$$\vec{r}_P = \vec{r}_A + \vec{u}_P \quad (1)$$

Đạo hàm phương trình (1) theo thời gian ở trong hệ qui chiếu cố định R_0 ta được

$${}^{R_0}\frac{d\vec{r}_P}{dt} = {}^{R_0}\frac{d\vec{r}_A}{dt} + \vec{\omega} \times \vec{u}_P \Rightarrow \vec{v}_P = \vec{v}_A + \vec{\omega} \times \vec{u}_P \quad (2)$$

Trong đó $\vec{\omega} = {}^{R_0}\vec{\omega}^B$ là vận tốc góc của vật rắn.

Nếu sử dụng ký hiệu ma trận thì phương trình (2) có dạng

$$\mathbf{v}_P^{(0)} = \mathbf{v}_A^{(0)} + \tilde{\omega}_B^{(0)} \mathbf{u}_P^{(0)} \quad (3)$$

còn phương trình (1) có dạng

$$\mathbf{r}_P^{(0)} = \mathbf{r}_A^{(0)} + \mathbf{u}_P^{(0)} \quad (4)$$

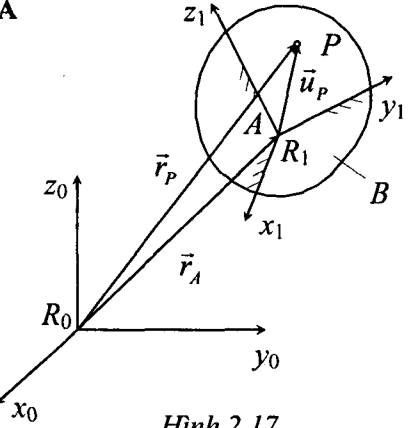
Theo công thức (1.11) ta có

$$\mathbf{u}_P^{(0)} = \mathbf{A}\mathbf{u}_P^{(1)} \quad (5)$$

Trong đó $\mathbf{u}_P^{(0)}$ là ma trận cột gồm ba thành phần là hình chiếu của vectơ \vec{u}_P trong hệ $Ox_0y_0z_0$, còn $\mathbf{u}_P^{(1)}$ là ma trận cột gồm ba thành phần là các hình chiếu của vectơ \vec{u}_P trong hệ $Ax_1y_1z_1$.

Thế (5) vào (4) ta được

$$\mathbf{r}_P^{(0)} = \mathbf{r}_A^{(0)} + \mathbf{A}\mathbf{u}_P^{(1)} \quad (6)$$



Hình 2.17

Đạo hàm phương trình (6) theo thời gian ở trong hệ R_0 ta được

$$\mathbf{v}_P^{(0)} = \mathbf{v}_A^{(0)} + \dot{\mathbf{A}}\mathbf{u}_P^{(1)} \quad (7)$$

Do ma trận côsin chỉ hướng là ma trận trực giao nên từ hệ thức (5) ta suy ra

$$\mathbf{u}_P^{(1)} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{u}_P^{(0)} = \mathbf{A}^T\mathbf{u}_P^{(0)} \quad (8)$$

Thế (8) vào (7) ta được

$$\mathbf{v}_P^{(0)} = \mathbf{v}_A^{(0)} + \dot{\mathbf{A}}\mathbf{A}^T\mathbf{u}_P^{(0)} \quad (9)$$

So sánh biểu thức (9) với (3) ta suy ra công thức

$$\tilde{\boldsymbol{\omega}}_B^{(0)} = \dot{\mathbf{A}}\mathbf{A}^T \quad (10)$$

Định lý 2.4. Cho \mathbf{A} là ma trận côsin chỉ hướng của vật rắn B đối với hệ qui chiếu $R_0 = \{x_0, y_0, z_0\}$. Khi đó toán tử sóng của véctơ vận tốc góc của vật rắn ở trong hệ qui chiếu động R_1 gắn liền vào vật rắn B được xác định bởi công thức

$$\tilde{\boldsymbol{\omega}}_B^{(1)} = \mathbf{A}^T \dot{\mathbf{A}} \quad (2.7)$$

Trong đó $\boldsymbol{\omega}_B^{(1)} = [{}^{R_0}\omega_{x_1}^B, {}^{R_0}\omega_{y_1}^B, {}^{R_0}\omega_{z_1}^B]^T$, $\dot{\mathbf{A}} = \frac{{}^{R_0}d\mathbf{A}}{dt}$.

Chứng minh. Từ phương trình (2) ta suy ra

$$\mathbf{v}_P^{(1)} = \mathbf{v}_A^{(1)} + \tilde{\boldsymbol{\omega}}_B^{(1)}\mathbf{u}_P^{(1)} \quad (11)$$

Nhân hai vế của phương trình (11) với ma trận \mathbf{A} ta được

$$\mathbf{A}\mathbf{v}_P^{(1)} = \mathbf{A}\mathbf{v}_A^{(1)} + \mathbf{A}\tilde{\boldsymbol{\omega}}_B^{(1)}\mathbf{u}_P^{(1)} \quad (12)$$

$$\text{hay} \quad \mathbf{v}_P^{(0)} = \mathbf{v}_A^{(0)} + \mathbf{A}\tilde{\boldsymbol{\omega}}_B^{(1)}\mathbf{u}_P^{(1)} \quad (13)$$

So sánh công thức (13) với công thức (7) ta suy ra

$$\dot{\mathbf{A}} = \mathbf{A}\tilde{\boldsymbol{\omega}}_B^{(1)} \Rightarrow \tilde{\boldsymbol{\omega}}_B^{(1)} = \mathbf{A}^T\dot{\mathbf{A}} \quad (14)$$

Các công thức (2.6) và (2.7) được gọi là định luật Poisson.

Chú ý. Từ các công thức (2.6) và (2.7) ta cũng có thể suy ra biểu thức tính đạo hàm theo thời gian của ma trận côsin chỉ hướng trong hệ tọa độ R_0 . Nhân bên phải phương trình (2.6) với ma trận \mathbf{A} ta được

$$\dot{\mathbf{A}} = \tilde{\boldsymbol{\omega}}_B^{(0)}\mathbf{A} \quad (2.8)$$

Nhân bên trái phương trình (2.7) với ma trận \mathbf{A} ta có

$$\dot{\mathbf{A}} = \mathbf{A}\tilde{\boldsymbol{\omega}}_B^{(1)} \quad (2.9)$$

Trong đó

$$\dot{\mathbf{A}} = \frac{{}^{R_0}d\mathbf{A}}{dt}.$$

2.3 Một số cách định nghĩa khác về vận tốc góc của vật rắn

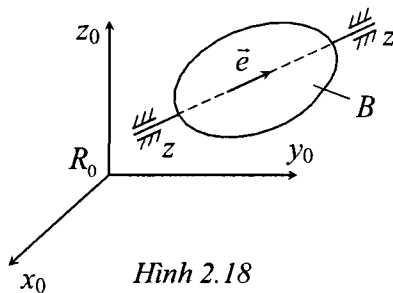
Vận tốc góc của vật rắn là một trong các đặc trưng cơ bản của vật rắn chuyển động. Trong mục 2.1 ta đã đưa ra một phương án định nghĩa vận tốc góc của vật rắn (sau này ta gọi là phương án một). Cách định nghĩa đó thuận tiện cho việc tính toán động học vật rắn, nhưng gây cho người đọc một cảm giác khó hiểu, vì nó không giống với định nghĩa vận tốc của một điểm. Ngoài phương án định nghĩa vận tốc góc của vật rắn như mục trên, người ta còn đưa ra một vài phương án khác để định nghĩa vận tốc góc của vật rắn.

2.3.1 Phương án hai

a) *Vận tốc góc đơn giản.* Xét trường hợp vật rắn quay quanh một trục zz cố định (hình 2.18). Gọi \vec{e} là véc tơ đơn vị trên trục quay zz . Ký hiệu φ là góc quay của vật rắn quanh trục zz cố định.

Định nghĩa. Vận tốc góc của vật rắn quay quanh một trục cố định được định nghĩa bởi công thức sau

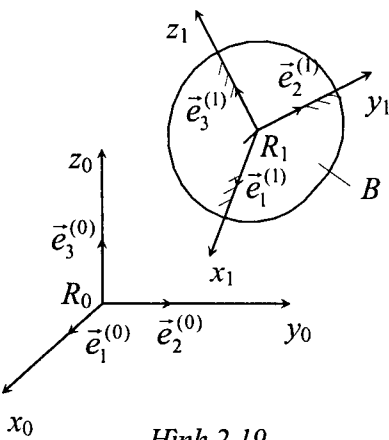
$$\vec{\omega} = \frac{d\varphi}{dt} \vec{e} = \dot{\varphi} \vec{e} \quad (2.10)$$



Hình 2.18

b) *Vận tốc góc tổng quát.* Xét trường hợp vật rắn chuyển động tổng quát trong không gian ba chiều (hình 2.19). Trong phần này ta tìm cách xác định vận tốc góc của vật rắn qua đạo hàm của một tập ba véc tơ đơn vị gắn chặt vào vật rắn. Các đạo hàm của ba véc tơ đơn vị này cho ta số đo về sự thay đổi về hướng của vật rắn.

Định nghĩa. Cho B là một vật rắn chuyển động trong hệ qui chiếu cố định R_0 . Ký hiệu $\vec{e}_1^{(1)}, \vec{e}_2^{(1)}, \vec{e}_3^{(1)}$ là ba véc tơ đơn vị của một hệ qui chiếu vuông góc R_1 gắn liền vào vật rắn B. Vận tốc góc của vật rắn B đối với hệ qui chiếu R_0 được định nghĩa bởi công thức sau



Hình 2.19

$${}^{R_0} \vec{\omega}^B = \vec{e}_1^{(1)} \left(\frac{{}^{R_0} d\vec{e}_2^{(1)}}{dt} \cdot \vec{e}_3^{(1)} \right) + \vec{e}_2^{(1)} \left(\frac{{}^{R_0} d\vec{e}_3^{(1)}}{dt} \cdot \vec{e}_1^{(1)} \right) + \vec{e}_3^{(1)} \left(\frac{{}^{R_0} d\vec{e}_1^{(1)}}{dt} \cdot \vec{e}_2^{(1)} \right) \quad (2.11)$$

c) *Định lý.* Cho \vec{c} là một véc tơ tùy ý khác không của vật rắn B. Ta có công thức

$${}^{R_0} \frac{d\vec{c}}{dt} = {}^{R_0} \vec{\omega}^B \times \vec{c} \quad (2.12)$$

Chứng minh. Lấy \vec{c} là một véctơ tùy ý khác không thuộc vật rắn B (hình 2.12). Trong hệ qui chiếu R_1 gắn liền vào vật rắn B véctơ \vec{c} có thể biểu diễn dưới dạng

$$\vec{c} = c_1 \vec{e}_1^{(1)} + c_2 \vec{e}_2^{(1)} + c_3 \vec{e}_3^{(1)} \quad (1)$$

Do $\vec{c} \in B$ nên c_1, c_2, c_3 là các hằng số. Đạo hàm biểu thức (1) theo t ở trong hệ qui chiếu R_0 ta được

$$\frac{{}^{R_0} d\vec{c}}{dt} = c_1 \frac{{}^{R_0} d\vec{e}_1^{(1)}}{dt} + c_2 \frac{{}^{R_0} d\vec{e}_2^{(1)}}{dt} + c_3 \frac{{}^{R_0} d\vec{e}_3^{(1)}}{dt} \quad (2)$$

Mặt khác từ công thức (2.11) ta suy ra

$${}^{R_0} \vec{\omega}^B \times \vec{e}_1^{(1)} = \left[\left(\frac{{}^{R_0} d\vec{e}_2^{(1)}}{dt} \cdot \vec{e}_3^{(1)} \right) \vec{e}_1^{(1)} + \left(\frac{{}^{R_0} d\vec{e}_3^{(1)}}{dt} \cdot \vec{e}_2^{(1)} \right) \vec{e}_2^{(1)} + \left(\frac{{}^{R_0} d\vec{e}_1^{(1)}}{dt} \cdot \vec{e}_2^{(1)} \right) \vec{e}_3^{(1)} \right] \times \vec{e}_1^{(1)} \quad (3)$$

Do $\vec{e}_1^{(1)}, \vec{e}_2^{(1)}, \vec{e}_3^{(1)}$ là ba véctơ đơn vị trên ba trục của một hệ tọa độ vuông góc nên ta có công thức quen biết

$$\vec{e}_1^{(1)} = \vec{e}_2^{(1)} \times \vec{e}_3^{(1)}, \quad \vec{e}_2^{(1)} = \vec{e}_3^{(1)} \times \vec{e}_1^{(1)}, \quad \vec{e}_3^{(1)} = \vec{e}_1^{(1)} \times \vec{e}_2^{(1)} \quad (4)$$

Thế các biểu thức (4) vào (3) ta được

$${}^{R_0} \vec{\omega}^B \times \vec{e}_1^{(1)} = - \left(\frac{{}^{R_0} d\vec{e}_3^{(1)}}{dt} \cdot \vec{e}_2^{(1)} \right) \vec{e}_3^{(1)} + \left(\frac{{}^{R_0} d\vec{e}_1^{(1)}}{dt} \cdot \vec{e}_2^{(1)} \right) \vec{e}_2^{(1)} \quad (5)$$

Do $\vec{e}_1^{(1)} \cdot \vec{e}_1^{(1)} = 1, \vec{e}_1^{(1)} \cdot \vec{e}_3^{(1)} = 0$, nên ta có các công thức

$$\frac{{}^{R_0} d\vec{e}_1^{(1)}}{dt} \cdot \vec{e}_1^{(1)} = 0, \quad \frac{{}^{R_0} d\vec{e}_1^{(1)}}{dt} \cdot \vec{e}_3^{(1)} = - \frac{{}^{R_0} d\vec{e}_3^{(1)}}{dt} \cdot \vec{e}_1^{(1)} \quad (6)$$

Thế (6) vào (5) ta có

$${}^{R_0} \vec{\omega}^B \times \vec{e}_1^{(1)} = \left(\frac{{}^{R_0} d\vec{e}_1^{(1)}}{dt} \cdot \vec{e}_1^{(1)} \right) \vec{e}_1^{(1)} + \left(\frac{{}^{R_0} d\vec{e}_1^{(1)}}{dt} \cdot \vec{e}_2^{(1)} \right) \vec{e}_2^{(1)} + \left(\frac{{}^{R_0} d\vec{e}_1^{(1)}}{dt} \cdot \vec{e}_3^{(1)} \right) \vec{e}_3^{(1)} \quad (7)$$

Chú ý rằng, nếu \vec{a} là một véctơ bất kỳ trong không gian ba chiều ta luôn có biểu diễn

$$\vec{a} = (\vec{a} \cdot \vec{e}_1^{(1)}) \vec{e}_1^{(1)} + (\vec{a} \cdot \vec{e}_2^{(1)}) \vec{e}_2^{(1)} + (\vec{a} \cdot \vec{e}_3^{(1)}) \vec{e}_3^{(1)} \quad (8)$$

So sánh (7) với (8) ta suy ra

$${}^{R_0} \vec{\omega}^B \times \vec{e}_1^{(1)} = \frac{{}^{R_0} d\vec{e}_1^{(1)}}{dt} \quad (9)$$

Tính toán tương tự ta có

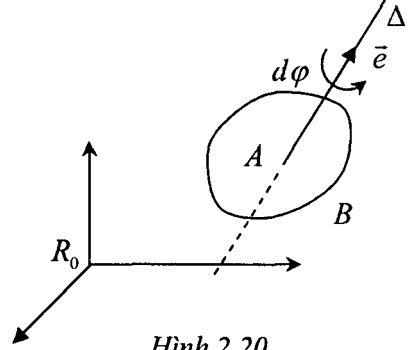
$${}^{R_0} \vec{\omega}^B \times \vec{e}_2^{(1)} = \frac{{}^{R_0} d\vec{e}_2^{(1)}}{dt}, \quad {}^{R_0} \vec{\omega}^B \times \vec{e}_3^{(1)} = \frac{{}^{R_0} d\vec{e}_3^{(1)}}{dt} \quad (10)$$

Thế các biểu thức (9), (10) vào phương trình (2) ta được

$$\frac{{}^{R_0}d\vec{c}}{dt} = {}^{R_0}\vec{\omega}^B \times (c_1\vec{e}_1^{(1)} + c_2\vec{e}_2^{(1)} + c_3\vec{e}_3^{(1)}) = {}^{R_0}\vec{\omega}^B \times \vec{c} \quad (11)$$

2.3.2 Phương án ba

Từ định lý Euler về chuyển động quay hữu hạn của vật rắn có một điểm cố định, ta suy ra hệ quả: Chuyển động quay vô cùng bé của vật rắn có một điểm cố định là chuyển động quay quanh một trục quay tức thời đi qua điểm cố định. Từ đó ta suy ra: Chuyển động vô cùng bé của vật rắn ở trong không gian ba chiều (không gian 3D) được xác định bởi di chuyển vô cùng bé $d\vec{r}_A$ của điểm qui chiếu A thuộc vật rắn và chuyển động quay vô cùng bé $d\vec{\varphi}$ quanh trục quay tức thời đi qua điểm qui chiếu A. Vectơ $d\vec{\varphi}$ là một vectơ thay đổi theo thời gian cả về phương, chiều và độ lớn. Vectơ này được xác định bởi hệ thức $d\vec{\varphi} = \vec{e}(t)d\varphi(t)$. Trong đó $\vec{e}(t)$ là véc tơ đơn vị trên trục quay tức thời Δ , $d\varphi$ là góc quay vô cùng bé của vật rắn quanh trục quay tức thời Δ . Từ đó ta có định nghĩa vận tốc góc của vật rắn như sau.



Hình 2.20

Định nghĩa. Vận tốc góc của vật rắn B đối với hệ qui chiếu R_0 được định nghĩa bởi công thức sau

$${}^{R_0}\vec{\omega}^B = \frac{{}^{R_0}d\vec{\varphi}}{dt} \quad (2.12)$$

Định nghĩa vận tốc góc của vật rắn theo công thức (2.12) rất gọn và đẹp về mặt hình thức. Trong công thức này vectơ $\vec{\varphi}$ thay đổi theo thời gian cả về phương, chiều và trị số. Do đó, nếu áp dụng công thức này để tính trực tiếp vận tốc góc của vật rắn chuyển động không gian tổng quát rất khó khăn. Trong trường hợp này người ta phải tính các thành phần của vectơ vận tốc góc của vật rắn qua ma trận cosin chỉ hướng. Chính vì lý do đó người ta thường sử dụng hai phương án một và hai để định nghĩa vận tốc góc của vật rắn.

Từ biểu thức (2.12), trong trường hợp vật rắn quay quanh một trục cố định ta có công thức quen thuộc

$${}^{R_0}\vec{\omega}^B = \frac{d\vec{\varphi}}{dt} = \frac{d}{dt}(\varphi\vec{e}) = \dot{\varphi}\vec{e}$$

2.4 Gia tốc góc của vật rắn

a) *Định nghĩa.* Gia tốc góc của vật rắn B đối với hệ qui chiếu R_0 là một đại lượng véctơ, ký hiệu là ${}^{R_0}\vec{\alpha}^B$, bằng đạo hàm theo thời gian ở trong hệ qui chiếu R_0 của véctơ vận tốc góc của vật rắn B

$${}^{R_0}\vec{\alpha}^B = \frac{{}^{R_0}d}{{}^{R_0}dt}({}^{R_0}\vec{\omega}^B) \quad (2.13)$$

Chú ý. Khi khảo sát chuyển động của một vật rắn đối với một hệ qui chiếu, ta có thể bỏ các chỉ số trên ở trong các ký hiệu vận tốc góc và gia tốc góc và viết một cách ngắn gọn là $\vec{\omega}$ và $\vec{\alpha}$.

b) *Định lý.* Trong hệ qui chiếu R_1 gắn liền vào vật rắn B, nếu véctơ vận tốc góc của vật rắn được biểu diễn dưới dạng

$${}^{R_0}\vec{\omega}^B = \omega_1^{(1)}\vec{e}_1^{(1)} + \omega_2^{(1)}\vec{e}_2^{(1)} + \omega_3^{(1)}\vec{e}_3^{(1)}$$

thì biểu thức tính gia tốc góc của vật rắn có dạng như sau

$${}^{R_0}\vec{\alpha}^B = \dot{\omega}_1^{(1)}\vec{e}_1^{(1)} + \dot{\omega}_2^{(1)}\vec{e}_2^{(1)} + \dot{\omega}_3^{(1)}\vec{e}_3^{(1)} \quad (2.14)$$

Chứng minh. Theo định nghĩa gia tốc góc (2.13) ta có

$$\begin{aligned} {}^{R_0}\vec{\alpha}^B &= \frac{{}^{R_0}d}{{}^{R_0}dt}({}^{R_0}\vec{\omega}^B) = \frac{{}^{R_0}d}{{}^{R_0}dt}(\omega_1^{(1)}\vec{e}_1^{(1)} + \omega_2^{(1)}\vec{e}_2^{(1)} + \omega_3^{(1)}\vec{e}_3^{(1)}) \\ &= \dot{\omega}_1^{(1)}\vec{e}_1^{(1)} + \dot{\omega}_2^{(1)}\vec{e}_2^{(1)} + \dot{\omega}_3^{(1)}\vec{e}_3^{(1)} + \omega_1^{(1)}\frac{{}^{R_0}d\vec{e}_1^{(1)}}{{}^{R_0}dt} + \omega_2^{(1)}\frac{{}^{R_0}d\vec{e}_2^{(1)}}{{}^{R_0}dt} + \omega_3^{(1)}\frac{{}^{R_0}d\vec{e}_3^{(1)}}{{}^{R_0}dt} \end{aligned} \quad (1)$$

Do $\frac{{}^{R_0}d\vec{e}_i^{(1)}}{{}^{R_0}dt} = {}^{R_0}\vec{\omega}^B \times \vec{e}_i^{(1)}$ ($i=1,2,3$) nên ta có

$$\begin{aligned} \omega_1^{(1)}\frac{{}^{R_0}d\vec{e}_1^{(1)}}{{}^{R_0}dt} + \omega_2^{(1)}\frac{{}^{R_0}d\vec{e}_2^{(1)}}{{}^{R_0}dt} + \omega_3^{(1)}\frac{{}^{R_0}d\vec{e}_3^{(1)}}{{}^{R_0}dt} &= {}^{R_0}\vec{\omega}^B \times (\omega_1^{(1)}\vec{e}_1^{(1)} + \omega_2^{(1)}\vec{e}_2^{(1)} + \omega_3^{(1)}\vec{e}_3^{(1)}) \\ &= {}^{R_0}\vec{\omega}^B \times {}^{R_0}\vec{\omega}^B = 0 \end{aligned} \quad (2)$$

Thế (2) vào (1) ta được

$${}^{R_0}\vec{\alpha}^B = \dot{\omega}_1^{(1)}\vec{e}_1^{(1)} + \dot{\omega}_2^{(1)}\vec{e}_2^{(1)} + \dot{\omega}_3^{(1)}\vec{e}_3^{(1)}$$

§3 CÔNG THỨC CỘNG VẬN TỐC GÓC VÀ CÔNG THỨC CỘNG GIA TỐC GÓC

3.1 Đạo hàm của vectơ trong các hệ qui chiếu khác nhau

Cho vectơ \vec{a} thay đổi theo thời gian ở trong hệ qui chiếu động R_1 . Hệ qui chiếu động R_1 lại chuyển động đối với hệ qui chiếu cố định R_0 (hình 2.21). Trong hệ qui chiếu động R_1 với $\vec{e}_1^{(1)}$, $\vec{e}_2^{(1)}$, $\vec{e}_3^{(1)}$ là ba vectơ đơn vị trên hệ trục vuông góc $x_1y_1z_1$, ta có biểu diễn

$$\vec{a} = a_1^{(1)}\vec{e}_1^{(1)} + a_2^{(1)}\vec{e}_2^{(1)} + a_3^{(1)}\vec{e}_3^{(1)} \quad (1)$$

Trong đó $a_i^{(1)}$ ($i = 1, 2, 3$) là các toạ độ của vectơ \vec{a} trong hệ qui chiếu R_1 . Đạo hàm hệ thức (1) theo thời gian ở trong hệ qui chiếu R_0 ta được

$${}^{R_0}\frac{d\vec{a}}{dt} = \frac{da_1^{(1)}}{dt}\vec{e}_1^{(1)} + \frac{da_2^{(1)}}{dt}\vec{e}_2^{(1)} + \frac{da_3^{(1)}}{dt}\vec{e}_3^{(1)} + a_1^{(1)}\frac{d\vec{e}_1^{(1)}}{dt} + a_2^{(1)}\frac{d\vec{e}_2^{(1)}}{dt} + a_3^{(1)}\frac{d\vec{e}_3^{(1)}}{dt} \quad (2)$$

Chú ý rằng

$${}^{R_0}\frac{d\vec{e}_1^{(1)}}{dt} = {}^{R_0}\vec{\omega}^{R_1} \times \vec{e}_1^{(1)}, \quad {}^{R_0}\frac{d\vec{e}_2^{(1)}}{dt} = {}^{R_0}\vec{\omega}^{R_1} \times \vec{e}_2^{(1)}, \quad {}^{R_0}\frac{d\vec{e}_3^{(1)}}{dt} = {}^{R_0}\vec{\omega}^{R_1} \times \vec{e}_3^{(1)} \quad (3)$$

Thế (3) vào (2) ta được

$${}^{R_0}\frac{d\vec{a}}{dt} = {}^{R_1}\frac{d\vec{a}}{dt} + {}^{R_0}\vec{\omega}^{R_1} \times \vec{a} \quad (3.1)$$

Công thức (3.1) cho ta mối quan hệ giữa đạo hàm của vectơ \vec{a} trong hai hệ qui chiếu R_0 và R_1 .

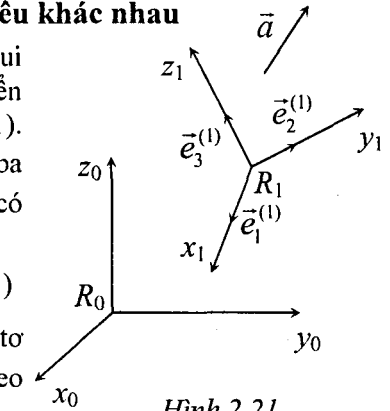
3.2 Công thức cộng vận tốc góc của vật rắn

Xét một vectơ $\vec{c} \neq 0$ tùy ý của vật rắn B . Vật rắn B chuyển động đối với hệ qui chiếu R_1 , hệ qui chiếu R_1 lại chuyển động đối với hệ qui chiếu R_0 . Theo định nghĩa vận tốc góc ta có các công thức

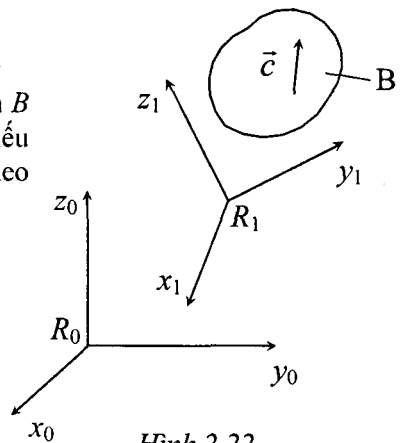
$${}^{R_0}\frac{d\vec{c}}{dt} = {}^{R_0}\vec{\omega}^B \times \vec{c} \quad (1)$$

$${}^{R_1}\frac{d\vec{c}}{dt} = {}^{R_1}\vec{\omega}^B \times \vec{c} \quad (2)$$

Mặt khác từ công thức (3.1) ta có phương trình



Hình 2.21



Hình 2.22

$${}^{R_0} \frac{d\vec{c}}{dt} = {}^{R_1} \frac{d\vec{c}}{dt} + {}^{R_0} \vec{\omega}^{R_1} \times \vec{c} \quad (3)$$

Thế các hệ thức (1) và (2) vào phương trình (3) được

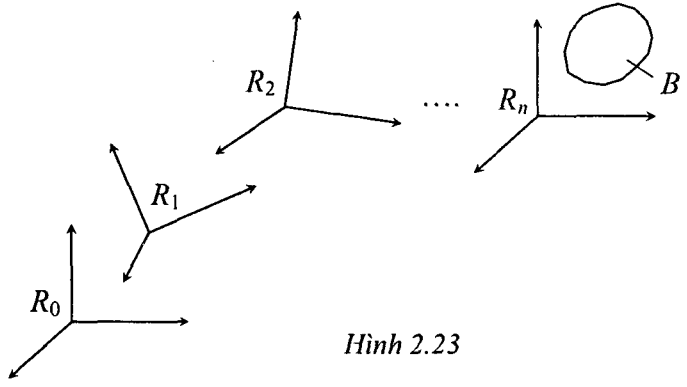
$${}^{R_0} \vec{\omega}^B \times \vec{c} = {}^{R_1} \vec{\omega}^B \times \vec{c} + {}^{R_0} \vec{\omega}^{R_1} \times \vec{c} = ({}^{R_0} \vec{\omega}^{R_1} + {}^{R_1} \vec{\omega}^B) \times \vec{c} \quad (4)$$

Từ (4) suy ra

$${}^{R_0} \vec{\omega}^B = {}^{R_0} \vec{\omega}^{R_1} + {}^{R_1} \vec{\omega}^B \quad (3.2)$$

Công thức (3.2) là công thức cộng vận tốc góc của vật rắn.

Chuyển động của vật rắn B đối với hệ qui chiếu động R_1 được gọi là chuyển động tương đối, chuyển động của vật rắn B đối với hệ qui chiếu cố định R_0 được gọi là chuyển động tuyệt đối. Chuyển động của hệ qui chiếu động R_1 đối với hệ qui chiếu cố định R_0 được gọi là chuyển động theo.



Hình 2.23

chuyển động theo. Ký hiệu ${}^{R_0} \vec{\omega}^B = \vec{\omega}_a$, (vận tốc góc tuyệt đối của vật rắn B), ${}^{R_1} \vec{\omega}^B = \vec{\omega}_r$ (vận tốc góc tương đối của vật rắn B), ${}^{R_0} \vec{\omega}^{R_1} = \vec{\omega}_e$ (vận tốc góc theo). Khi đó biểu thức (3.2) có dạng

$$\vec{\omega}_a = \vec{\omega}_e + \vec{\omega}_r \quad (3.3)$$

Định lý 2.4. Ở mỗi thời điểm, vận tốc góc tuyệt đối của vật rắn B bằng tổng hình học vận tốc góc tương đối và vận tốc góc theo của nó.

Áp dụng liên tiếp công thức (3.2) đối với $n+1$ hệ qui chiếu như hình 2.23 ta có

$${}^{R_0} \vec{\omega}^B = {}^{R_0} \vec{\omega}^{R_1} + {}^{R_1} \vec{\omega}^{R_2} + \dots + {}^{R_{n-1}} \vec{\omega}^{R_n} + {}^{R_n} \vec{\omega}^B \quad (3.4)$$

3.3 Công thức cộng gia tốc góc của vật rắn

Đạo hàm theo thời gian công thức (3.2) ở trong hệ qui chiếu R_0 ta được

$${}^{R_0} \frac{d}{{}^{R_0} dt} ({}^{R_0} \vec{\omega}^B) = {}^{R_0} \frac{d}{{}^{R_0} dt} ({}^{R_0} \vec{\omega}^{R_1}) + {}^{R_0} \frac{d}{{}^{R_0} dt} ({}^{R_1} \vec{\omega}^B) \quad (1)$$

Chú ý đến công thức (3.1) ta có

$${}^{R_0} \vec{\alpha}^B = {}^{R_0} \vec{\alpha}^{R_1} + {}^{R_0} \frac{d}{{}^{R_0} dt} ({}^{R_1} \vec{\omega}^B) + {}^{R_0} \vec{\omega}^{R_1} \times {}^{R_1} \vec{\omega}^B \quad (2)$$

Từ định nghĩa chuyển động tuyệt đối, tương đối và theo của vật rắn ta suy ra

$${}^{R_0}\vec{\alpha}^B = \vec{\alpha}_a, \quad {}^{R_1}\vec{\alpha}^B = \vec{\alpha}_r, \quad {}^{R_0}\vec{\alpha}^{R_1} = \vec{\alpha}_e \quad (3)$$

Thế (3) vào (2) ta được

$$\vec{\alpha}_a = \vec{\alpha}_e + \vec{\alpha}_r + \vec{\omega}_e \times \vec{\omega}_r \quad (3.5)$$

Định lý 2.5. ở mỗi thời điểm gia tốc góc tuyệt đối của vật rắn B bằng tổng hình học gia tốc góc tương đối, gia tốc góc theo và gia tốc góc phụ $\vec{\alpha}_p = \vec{\omega}_e \times \vec{\omega}_r$ của vật rắn.

Gia tốc phụ $\vec{\alpha}_p = \vec{\omega}_e \times \vec{\omega}_r$ còn được gọi là gia tốc góc Resal.

3.4 Cơ cấu hành tinh, vi sai nón

Trong các cơ cấu hành tinh, cơ cấu vi sai nón các trục quay giao nhau tại điểm O (hình 2.24). Theo các công thức cộng vận tốc góc, công thức cộng gia tốc góc ở trên ta có

$$\vec{\omega}_a = \vec{\omega}_e + \vec{\omega}_r \quad (1)$$

$$\vec{\alpha}_a = \vec{\alpha}_e + \vec{\alpha}_r + \vec{\omega}_e \times \vec{\omega}_r \quad (2)$$

Ta chọn tay quay làm hệ qui chiếu động, khi đó công thức truyền động có dạng

$$\frac{\vec{\omega}_{1r}}{\vec{\omega}_{2r}} = \pm \frac{r_2}{r_1} = \pm \frac{z_2}{z_1} \quad (3)$$

Trong đó ω_{1r}, ω_{2r} là vận tốc tương đối của các bánh răng 1 và 2 đối với hệ qui chiếu động là tay quay, còn z_1, z_2 là số răng, r_1, r_2 là các bán kính tương ứng với các bánh răng 1 và 2. Trong công thức (3) dấu cộng (+) lấy khi các chuyển động quay tương đối quanh các trục z_0 và z cùng ngược chiều kim đồng hồ (hoặc cùng thuận chiều kim đồng hồ), dấu trừ lấy trong trường hợp ngược lại.

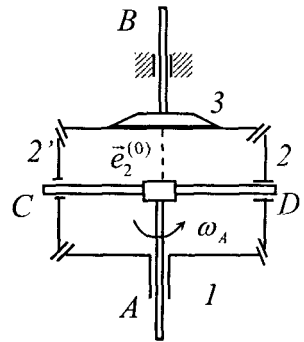
Thí dụ 2.6. Hộp truyền động như hình vẽ 2.24. Bánh răng 1 lắp trơn trên trục A , các đầu mút của trục này mang trục của cặp bánh răng 2-2. Bánh răng 3 gắn cứng với trục B . Tìm vận tốc góc và gia tốc góc của trục B trong các trường hợp:

a) Trục A có vận tốc ω_A , gia tốc góc ε_A còn bánh 1 đứng yên

b) Trục A và bánh 1 quay cùng chiều với $\omega_1 = 4\omega_A$, gia tốc góc

$$\alpha_1 = 4\varepsilon_A$$

c) Trục A có vận tốc ω_A , bánh 1 quay ngược chiều với $\omega_1 = 2\omega_A$, gia tốc góc $\alpha_1 = 2\varepsilon_A$.



Hình 2.24

Lời giải. Hệ khảo sát gồm trục ACD, các bánh răng 1, 2, 2', bánh răng 3 gắn liền với trục B. Chọn ACD làm hệ qui chiếu động. Các bánh răng 2 và 2' quay tương đối quanh trục CD. Trục CD quay quanh trục AB cố định. Hai trục AB và CD cắt nhau tại O. Do đó, chuyển động tuyệt đối của các bánh răng 2 và 2' là chuyển động quay quanh điểm O cố định. Các bánh răng 1 và 3 chuyển động quay tuyệt đối quanh trục AB.

Khi chọn tay quay ACD làm hệ qui chiếu động, công thức truyền động giữa bánh răng 1 và bánh răng 2 là

$$\frac{\bar{\omega}_{1r}}{\bar{\omega}_{2r}} = +\frac{r_2}{r_1}, \quad \frac{\bar{\omega}_{2r}}{\bar{\omega}_{3r}} = -\frac{r_3}{r_2} \Rightarrow \frac{\bar{\omega}_{1r}}{\bar{\omega}_{3r}} = -\frac{r_3}{r_1} \quad (4)$$

Ta lấy dấu cộng vì cả hai bánh răng đều quay tương đối ngược chiều kim đồng hồ.

Do $\bar{\omega}_{1r} = \bar{\omega}_1 - \bar{\omega}_{1e}$, $\bar{\omega}_{3r} = \bar{\omega}_3 - \bar{\omega}_{3e}$ nên từ (4) ta có

$$\frac{\bar{\omega}_1 - \bar{\omega}_{1e}}{\bar{\omega}_3 - \bar{\omega}_{3e}} = -\frac{r_3}{r_1} \quad (5)$$

Trong thí dụ này $\bar{\omega}_{1e} = \bar{\omega}_{3e} = \bar{\omega}_A$, $\bar{\omega}_3 = \bar{\omega}_B$, $r_3 = r_1$. Vậy biểu thức (5) có dạng

$$\frac{\bar{\omega}_1 - \bar{\omega}_A}{\bar{\omega}_B - \bar{\omega}_A} = -1 \quad (6)$$

a) Cho biết $\bar{\omega}_A, \bar{\omega}_1 = 0$, từ (6) ta suy ra

$$\frac{-\bar{\omega}_A}{\bar{\omega}_B - \bar{\omega}_A} = -1 \Rightarrow \bar{\omega}_B = 2\bar{\omega}_A \Rightarrow \bar{\alpha}_B = 2\bar{\alpha}_A.$$

b) Cho biết $\bar{\omega}_A, \bar{\omega}_1 = 4\bar{\omega}_A$, từ (6) ta có

$$\frac{\bar{\omega}_1 - \bar{\omega}_A}{\bar{\omega}_B - \bar{\omega}_A} = \frac{4\bar{\omega}_A - \bar{\omega}_A}{\bar{\omega}_B - \bar{\omega}_A} = -1 \Rightarrow \bar{\omega}_B = -2\bar{\omega}_A \Rightarrow \bar{\alpha}_B = -2\bar{\alpha}_A.$$

c) Cho biết $\bar{\omega}_A, \bar{\omega}_1 = -2\bar{\omega}_A$, từ (6) ta có hệ thức

$$\frac{\bar{\omega}_1 - \bar{\omega}_A}{\bar{\omega}_B - \bar{\omega}_A} = \frac{-2\bar{\omega}_A - \bar{\omega}_A}{\bar{\omega}_B - \bar{\omega}_A} = -1 \Rightarrow \bar{\omega}_B = 4\bar{\omega}_A \Rightarrow \bar{\alpha}_B = 4\bar{\alpha}_A.$$

§4 CÁC TOẠ ĐỘ SUY RỘNG XÁC ĐỊNH HƯỚNG CỦA VẬT RẮN

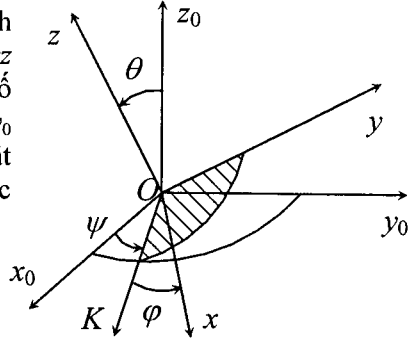
Như trong phần thứ nhất của chương này ta đã nêu rõ: Vị trí của vật rắn B đối với hệ qui chiếu R_0 được xác định bởi vị trí của một điểm A bất kỳ thuộc vật rắn và vị trí của hệ qui chiếu động R_1 gắn liền vào vật rắn. Bài toán xác định vị trí của hệ qui chiếu động R_1 được gọi là bài toán xác định hướng của vật rắn. Về thực chất đây là bài toán xác định vị trí của vật rắn quay quanh một điểm cố định.

Các tọa độ suy rộng xác định vị trí của vật rắn quay quanh một điểm cố định thường được sử dụng là: Các góc Euler, các góc Cardan, các góc Roll - Pitch - Yaw, các tham số Euler, các tham số Rodrigues. Khi sử dụng các góc quay khác nhau cần phải quan tâm đến thứ tự thực hiện các phép quay.

4.1 Các góc Euler (Euler Angles)

a) *Xác định ma trận cosin chỉ hướng từ các góc Euler*

Vị trí của vật rắn B quay quanh điểm O cố định xác định bởi vị trí của hệ qui chiếu động $Oxyz$ (gắn chặt vào vật rắn B) đối với hệ qui chiếu cố định $Ox_0y_0z_0$. Giả sử giao của mặt phẳng Ox_0y_0 (mặt phẳng qui chiếu) và mặt phẳng Oxy (mặt phẳng động) là đường OK . Trục OK này được gọi là đường nút (hình 2.25).



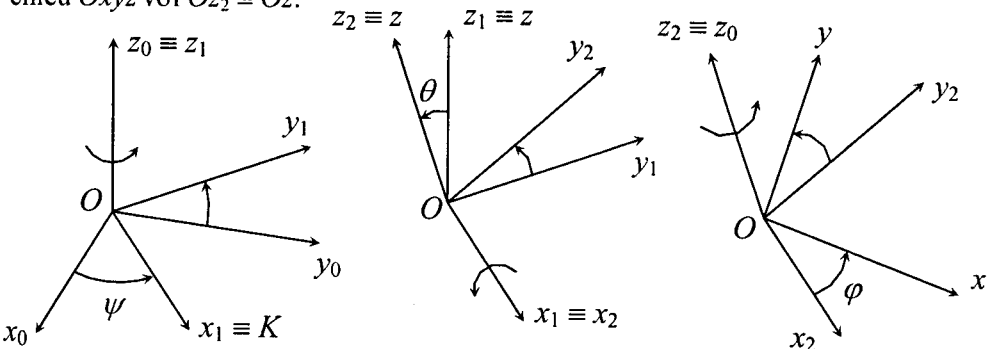
Hình 2.25

Ta đưa vào các ký hiệu sau

- Góc giữa trục Ox_0 và OK là ψ ,
- Góc giữa Oz_0 và Oz là θ ,
- Góc giữa trục OK và Ox là φ .

Ba góc ψ, θ, φ được gọi là ba góc Euler. Sử dụng các góc Euler ta có thể quay hệ qui chiếu $Ox_0y_0z_0$ sang hệ qui chiếu $Oxyz$ bằng ba phép quay như sau (hình 2.26):

- Quay hệ qui chiếu $R_0 = Ox_0y_0z_0$ quanh trục Oz_0 một góc ψ để trục Ox_0 chuyển tới đường nút OK . Với phép quay này, hệ qui chiếu $Ox_0y_0z_0$ chuyển sang hệ qui chiếu $R_1 = Ox_1y_1z_1$ với $Oz_0 \equiv Oz_1$.
- Quay hệ qui chiếu $R_1 = Ox_1y_1z_1$ quanh trục $Ox_1 \equiv OK$ một góc θ để trục Oz_1 chuyển tới trục $Oz_2 \equiv Oz$. Hệ qui chiếu $Ox_1y_1z_1$ chuyển sang hệ qui chiếu $Ox_2y_2z_2$ với $Ox_1 \equiv Ox_2 \equiv OK$.
- Quay hệ qui chiếu $R_2 = Ox_2y_2z_2$ quanh trục $Oz_2 \equiv Oz$ một góc φ để trục $Ox_2 \equiv OK$ chuyển tới trục Ox . Với phép quay này, hệ qui chiếu $Ox_2y_2z_2$ chuyển sang hệ qui chiếu $Oxyz$ với $Oz_2 \equiv Oz$.



Hình 2.26

Như thế, bằng ba phép quay Euler quanh trục Oz_0 một góc ψ , quanh trục OK một góc θ , quanh trục Oz một góc φ , hệ qui chiếu $Ox_0y_0z_0$ chuyển sang hệ qui chiếu $Oxyz$. Thứ tự của các trục quay là z-x-z. Các ma trận ứng với phép quay Euler có dạng

$$\mathbf{A}_{z_0}(\psi) = \begin{bmatrix} \cos\psi & -\sin\psi & 0 \\ \sin\psi & \cos\psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.1)$$

$$\mathbf{A}_K(\theta) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \quad (4.2)$$

$$\mathbf{A}_z(\varphi) = \begin{bmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.3)$$

Trên hình 2.25 biểu diễn đồng thời ba phép quay Euler. Ma trận quay hệ qui chiếu $Ox_0y_0z_0$ sang hệ qui chiếu $Oxyz$ bằng ba phép quay Euler gọi là ma trận quay Euler. Ký hiệu là \mathbf{A}_E . Ma trận này cũng chính là ma trận cosin chỉ hướng của hệ qui chiếu $Oxyz$ đối với hệ qui chiếu $Ox_0y_0z_0$. Ta lấy một điểm P bất kỳ thuộc vật rắn B . Theo công thức (1.11) ta có

$$\begin{bmatrix} x_p^{(0)} \\ y_p^{(0)} \\ z_p^{(0)} \end{bmatrix} = \mathbf{A}_E \begin{bmatrix} x_p \\ y_p \\ z_p \end{bmatrix} \quad (4.4)$$

Ta ký hiệu $x_p^{(i)}, y_p^{(i)}, z_p^{(i)}$ là tọa độ điểm P trong hệ qui chiếu $R_i = Ox_iy_iz_i$ ($i=1,2,3$). Theo công thức (1.11) ta có các hệ thức sau

$$\begin{bmatrix} x_p^{(2)} \\ y_p^{(2)} \\ z_p^{(2)} \end{bmatrix} = \mathbf{A}_z(\varphi) \begin{bmatrix} x_p \\ y_p \\ z_p \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} x_p^{(1)} \\ y_p^{(1)} \\ z_p^{(1)} \end{bmatrix} = \mathbf{A}_K(\theta) \begin{bmatrix} x_p^{(2)} \\ y_p^{(2)} \\ z_p^{(2)} \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} x_p^{(0)} \\ y_p^{(0)} \\ z_p^{(0)} \end{bmatrix} = \mathbf{A}_{z_0}(\psi) \begin{bmatrix} x_p^{(1)} \\ y_p^{(1)} \\ z_p^{(1)} \end{bmatrix} \quad (4.5)$$

Từ (4.5) ta suy ra

$$\begin{bmatrix} x_p^{(0)} \\ y_p^{(0)} \\ z_p^{(0)} \end{bmatrix} = \mathbf{A}_{z_0}(\psi)\mathbf{A}_K(\theta)\mathbf{A}_z(\varphi) \begin{bmatrix} x_p \\ y_p \\ z_p \end{bmatrix} \quad (4.6)$$

So sánh (4.4) với (4.6) ta suy ra

$$\mathbf{A}_E = \mathbf{A}_{z_0}(\psi)\mathbf{A}_K(\theta)\mathbf{A}_z(\varphi) \quad (4.7)$$

Thế các ma trận (4.1), (4.2) và (4.3) vào hệ thức (4.7) ta được ma trận cosin chỉ hướng (hoặc còn gọi là ma trận quay) Euler

$$\mathbf{A}_E = \begin{bmatrix} \cos\psi \cos\varphi - \sin\psi \cos\theta \sin\varphi & -\cos\psi \sin\varphi - \sin\psi \cos\theta \cos\varphi & \sin\psi \sin\theta \\ \sin\psi \cos\varphi + \cos\psi \cos\theta \sin\varphi & -\sin\psi \sin\varphi + \cos\psi \cos\theta \cos\varphi & -\cos\psi \sin\theta \\ \sin\theta \sin\varphi & \sin\theta \cos\varphi & \cos\theta \end{bmatrix} \quad (4.8)$$

b) Xác định các góc Euler từ ma trận cosin chỉ hướng

Giả sử biết được ma trận cosin chỉ hướng của hệ qui chiếu động $Oxyz$ đối với hệ qui chiếu cố định $Ox_0y_0z_0$.

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \quad (4.9)$$

So sánh các phần tử của ma trận (4.8) với các phần tử của ma trận (4.9) ta suy ra

$$\begin{aligned} \cos\theta &= a_{33}, & \sin\theta &= \pm\sqrt{1 - \cos^2\theta} \\ \cos\psi &= -\frac{a_{23}}{\sin\theta}, & \sin\psi &= \frac{a_{13}}{\sin\theta} \\ \cos\varphi &= \frac{a_{32}}{\sin\theta}, & \sin\varphi &= \frac{a_{31}}{\sin\theta} \end{aligned} \quad (4.10)$$

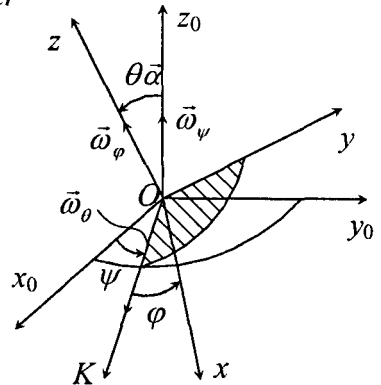
Từ các công thức (4.10) ta thấy $\theta \approx k\pi$ ($k = 0, 1, 2, \dots$) thì $\cos^2\theta \approx 1$, $\sin\theta \approx 0$. Giá trị này của góc θ được gọi là giá trị tới hạn. Khi đó việc tính toán bằng số sẽ rất khó khăn.

c) Xác định vận tốc góc của vật rắn từ các góc Euler

Nếu ta sử dụng ba góc quay Euler ψ, θ, φ để xác định vị trí của vật rắn B quay quanh một điểm O cố định, thì ta có thể quay hệ qui chiếu cố định $R_0 = Ox_0y_0z_0$ sang hệ qui chiếu động $R_1 = Oxyz$ bằng ba phép quay Euler (hình 2.27). Do đó theo định lý cộng vận tốc góc, ta có công thức

$$\vec{\omega} = \vec{\omega}_\psi + \vec{\omega}_\theta + \vec{\omega}_\varphi \quad (4.11)$$

Dưới dạng ma trận cột các vectơ vận tốc góc thành phần $\vec{\omega}_\psi, \vec{\omega}_\theta, \vec{\omega}_\varphi$ có dạng (hình 2.27)



Hình 2.27

$$\omega_{\psi}^{(0)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\psi} \end{bmatrix} \Rightarrow \omega_{\psi}^{(1)} = \mathbf{A}_E^T \omega_{\psi}^{(0)} = \begin{bmatrix} \dot{\psi} \sin \theta \sin \varphi \\ \dot{\psi} \sin \theta \cos \varphi \\ \dot{\psi} \cos \theta \end{bmatrix}$$

$$\omega_{\theta}^{(0)} = \begin{bmatrix} \dot{\theta} \cos \psi \\ \dot{\theta} \sin \psi \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \omega_{\theta}^{(1)} = \begin{bmatrix} \dot{\theta} \cos \varphi \\ -\dot{\theta} \sin \varphi \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\omega_{\varphi}^{(0)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\varphi} \end{bmatrix} \Rightarrow \omega_{\varphi}^{(1)} = \begin{bmatrix} \dot{\varphi} \sin \psi \sin \theta \\ -\dot{\varphi} \cos \psi \sin \theta \\ \dot{\varphi} \cos \theta \end{bmatrix}$$

Chiếu đẳng thức (4.11) lên các trục của hệ tọa độ cố định $R_0 = Ox_0y_0z_0$ ta được

$$\omega^{(0)} = \begin{bmatrix} \omega_x^{(0)} \\ \omega_y^{(0)} \\ \omega_z^{(0)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \cos \psi & \sin \psi \sin \theta \\ 0 & \sin \psi & -\cos \psi \sin \theta \\ 1 & 0 & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\psi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\varphi} \end{bmatrix} \quad (4.12)$$

Từ phương trình (4.12) ta có thể giải ra

$$\begin{bmatrix} \dot{\psi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\varphi} \end{bmatrix} = \frac{1}{\sin \theta} \begin{bmatrix} -\sin \psi \cos \theta & \cos \psi \cos \theta & \sin \theta \\ \cos \psi \sin \theta & \sin \psi \sin \theta & 0 \\ \sin \psi & -\cos \psi & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_x^{(0)} \\ \omega_y^{(0)} \\ \omega_z^{(0)} \end{bmatrix} \quad (4.13)$$

Phương trình (4.13) được gọi là phương trình vi phân động học. Khi $\theta = 0, \pm \pi$, biểu thức (4.13) không có nghĩa. Việc mô tả chuyển động quay của vật rắn quanh một điểm cố định là “kì dị” khi $\theta = 0, \pm \pi$.

Chiếu đẳng thức vectơ (4.11) lên các trục của hệ tọa độ động $R_1 = Oxyz$ ta được

$$\omega^{(1)} = \begin{bmatrix} \omega_x^{(1)} \\ \omega_y^{(1)} \\ \omega_z^{(1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sin \theta \sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ \sin \theta \cos \varphi & -\sin \varphi & 0 \\ \cos \theta & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\psi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\varphi} \end{bmatrix} \quad (4.14)$$

Từ phương trình này ta dễ dàng xác định được phương trình vi phân động học

$$\begin{bmatrix} \dot{\psi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\varphi} \end{bmatrix} = \frac{1}{\sin \theta} \begin{bmatrix} \sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ \sin \theta \cos \varphi & -\sin \theta \sin \varphi & 0 \\ -\cos \theta \sin \varphi & -\cos \theta \cos \varphi & \sin \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{bmatrix} \quad (4.15)$$

Chú ý:

1) Ngoài ba phép quay Euler zxz như trên, người ta còn thực hiện ba phép quay Euler zyz như sau. Đầu tiên ta quay vật rắn B quanh trục z một góc φ , sau đó quay quanh trục y một góc θ , cuối cùng quay quanh trục z một góc ψ . Khi đó ma trận quay Euler có dạng

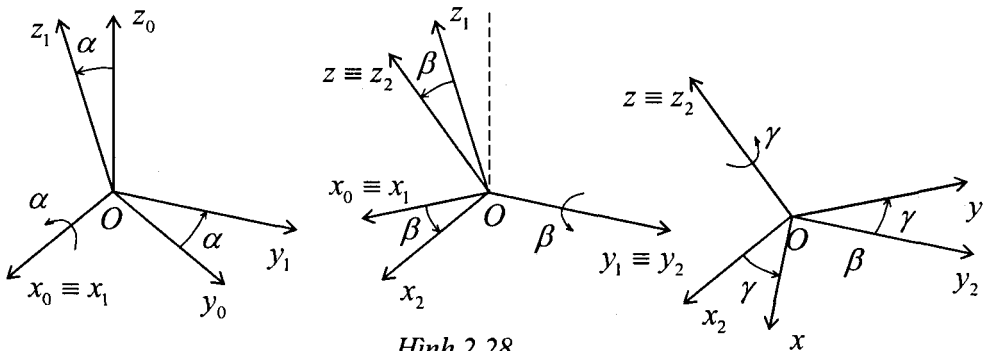
$$\begin{aligned} \mathbf{A}_E &= \mathbf{A}_{zyz}(\varphi, \theta, \psi) = \mathbf{A}_z(\varphi)\mathbf{A}_y(\theta)\mathbf{A}_z(\psi) \\ &= \begin{bmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi & 0 \\ \sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \theta & 0 & \sin \theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \theta & 0 & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \psi & -\sin \psi & 0 \\ \sin \psi & \cos \psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ \mathbf{A}_E &= \begin{bmatrix} \cos \varphi \cos \theta \cos \psi - \sin \varphi \sin \psi & -\cos \varphi \cos \theta \sin \psi - \sin \varphi \cos \psi & \cos \varphi \sin \theta \\ \sin \varphi \cos \theta \cos \psi + \cos \varphi \sin \psi & -\sin \varphi \cos \theta \sin \psi + \cos \varphi \cos \psi & \sin \varphi \sin \theta \\ -\sin \theta \cos \psi & \sin \theta \sin \psi & \cos \theta \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (4.16)$$

2) Các phép quay Euler zxz (hoặc zyz) là những thí dụ về cách tham số hoá địa phương của phép quay quanh một điểm cố định trong \mathbb{R}^3 . Các phép quay Cardan xyz , các phép quay Roll – Pitch – Yaw zyx (sẽ trình bày trong các phần sau) có thể xem là các biến thể khác của ba phép quay Euler.

4.2 Các góc Cardan (Cardan Angles)

a) Xác định ma trận cosin chỉ hướng từ các góc Cardan

Các góc Cardan (có tài liệu gọi là các góc Bryant) là các góc được xác định bởi phép quay Cardan. Ta quay hệ qui chiếu cố định $Ox_0y_0z_0$ sang hệ qui chiếu động $Oxyz$ (gắn chặt vào vật rắn B) bằng ba phép quay Cardan quanh các trục x, y, z với các góc α, β, γ như sau (hình 2.28).



Hình 2.28

- Quay hệ $R_0 = Ox_0y_0z_0$ quanh trục Ox_0 một góc α . Hệ $Ox_0y_0z_0$ chuyển thành hệ $Ox_1y_1z_1$ với $Ox_0 \equiv Ox_1$.

- Quay hệ $Ox_1y_1z_1$ quanh trục Oy_1 một góc β để trục Oz_1 chuyển tới trục $Oz_2 \equiv Oz$. Hệ $Ox_1y_1z_1$ chuyển thành hệ $Ox_2y_2z_2$ với $Oy_1 \equiv Oy_2$.
- Quay hệ $Ox_2y_2z_2$ quanh trục $Oz_2 \equiv Oz$ một góc γ sao cho trục Ox_2 chuyển tới trục Ox . Hệ $Ox_2y_2z_2$ chuyển thành hệ $Oxyz$ với $Oz_2 \equiv Oz$.

Các góc α, β, γ được gọi là các góc Cardan (hoặc các góc Bryant). Thứ tự thực hiện các trục quay là $x - y - z$. Các ma trận quay tương ứng với phép quay Cardan có dạng

$$\mathbf{A}_{x_0}(\alpha) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \alpha & -\sin \alpha \\ 0 & \sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{A}_{y_1}(\beta) = \begin{bmatrix} \cos \beta & 0 & \sin \beta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \beta & 0 & \cos \beta \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{A}_z(\gamma) = \begin{bmatrix} \cos \gamma & -\sin \gamma & 0 \\ \sin \gamma & \cos \gamma & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Ma trận quay Cardan từ hệ qui chiếu $Ox_0y_0z_0$ chuyển sang hệ qui chiếu $Oxyz$ là

$$\mathbf{A}_C = \mathbf{A}_{x_0}(\alpha)\mathbf{A}_{y_1}(\beta)\mathbf{A}_z(\gamma) \quad (4.17)$$

Thế các ma trận $\mathbf{A}_{x_0}(\alpha), \mathbf{A}_{y_1}(\beta), \mathbf{A}_z(\gamma)$ ở trên vào (4.16) ta được ma trận côsin chỉ hướng

$$\mathbf{A}_C = \begin{bmatrix} \cos \beta \cos \gamma & -\cos \beta \sin \gamma & \sin \beta \\ \cos \alpha \sin \gamma + \sin \alpha \sin \beta \cos \gamma & \cos \alpha \cos \gamma - \sin \alpha \sin \beta \sin \gamma & -\sin \alpha \cos \beta \\ \sin \alpha \sin \gamma - \cos \alpha \sin \beta \cos \gamma & \sin \alpha \cos \gamma + \cos \alpha \sin \beta \sin \gamma & \cos \alpha \cos \beta \end{bmatrix} \quad (4.18)$$

b) Xác định các góc Cardan từ ma trận côsin chỉ hướng

Tương tự phần trên, nếu biết ma trận côsin chỉ hướng của hệ qui chiếu động $Oxyz$ đối với hệ qui chiếu $Ox_0y_0z_0$, bằng cách so sánh các phần tử tương ứng của hai ma trận (4.9) và (4.18) ta suy ra

$$\begin{aligned} \sin \beta &= a_{13}, & \cos \beta &= \pm \sqrt{1 - \sin^2 \beta} \\ \sin \alpha &= -\frac{a_{23}}{\cos \beta}, & \cos \alpha &= \frac{a_{33}}{\cos \beta} \\ \sin \gamma &= -\frac{a_{12}}{\cos \beta}, & \cos \gamma &= \frac{a_{11}}{\cos \beta} \end{aligned} \quad (4.19)$$

Khi $\beta \approx (2n+1)\frac{\pi}{2}$ ($n=0,1,2,\dots$) thì $\sin^2 \beta \approx 1$, $\cos \beta \approx 0$. Giá trị này của góc β được gọi là giá trị tới hạn.

Chú ý. Khi phép quay của vật rắn đủ nhỏ, các góc α, β, γ nói chung là nhỏ. Do đó ta có thể sử dụng các xấp xỉ $\sin \alpha \approx \alpha$, $\cos \alpha \approx 1$, $\sin \beta \approx \beta$, $\cos \beta \approx 1$, $\sin \gamma \approx \gamma$, $\cos \gamma \approx 1$. Trong trường hợp này ma trận cosin chỉ hướng (4.12) có thể thay thế gần đúng bằng ma trận

$$\mathbf{A}_C = \begin{bmatrix} 1 & -\gamma & \beta \\ \gamma & 1 & -\alpha \\ -\beta & \alpha & 1 \end{bmatrix} = \mathbf{E} + \tilde{\boldsymbol{\varphi}} \quad (4.20)$$

Trong đó $\boldsymbol{\varphi} = [\alpha, \beta, \gamma]^T$, $\tilde{\boldsymbol{\varphi}}$ là toán tử sóng của $\boldsymbol{\varphi}$.

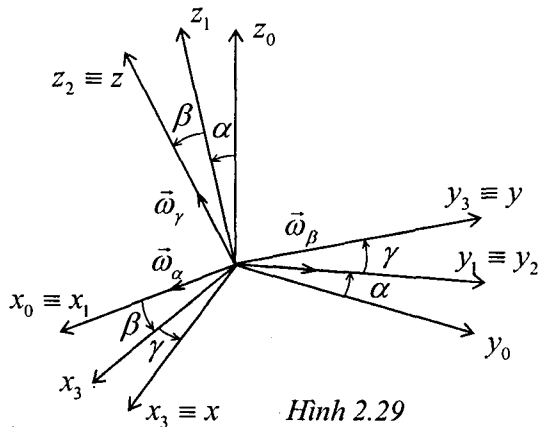
Nếu sử dụng các góc Euler, tuy phép quay nhỏ, nhưng các góc Euler ψ, φ, θ có thể không nhỏ. Vì vậy trong các bài toán dao động người ta ít khi sử dụng các góc Euler.

c) Xác định vận tốc góc của vật rắn từ các góc Cardan

Nếu ta sử dụng ba góc quay Cardan α, β, γ để xác định vị trí của vật rắn B quay quanh một điểm O cố định thì ta có thể quay hệ quy chiếu cố định $Ox_0y_0z_0$ sang hệ quy chiếu động $Oxyz$ bằng ba phép quay Cardan (hình 2.29). Theo định lý cộng vận tốc góc ta có

$$\vec{\omega} = \vec{\omega}_\alpha + \vec{\omega}_\beta + \vec{\omega}_\gamma \quad (4.21)$$

Chiếu (4.21) lên các trục của hệ quy chiếu cố định $Ox_0y_0z_0$ ta được



Hình 2.29

$${}^{R_0}\boldsymbol{\omega}_\alpha = \begin{bmatrix} \dot{\alpha} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad {}^{R_0}\boldsymbol{\omega}_\beta = \begin{bmatrix} 0 \\ \dot{\beta} \cos \alpha \\ \dot{\beta} \sin \alpha \end{bmatrix}, \quad {}^{R_0}\boldsymbol{\omega}_\gamma = \begin{bmatrix} \dot{\gamma} \sin \beta \\ -\dot{\gamma} \sin \alpha \cos \beta \\ \dot{\gamma} \cos \alpha \cos \beta \end{bmatrix}$$

Từ đó suy ra

$$\begin{bmatrix} \omega_x^{(0)} \\ \omega_y^{(0)} \\ \omega_z^{(0)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \sin \beta \\ 0 & \cos \alpha & -\sin \alpha \cos \beta \\ 0 & \sin \alpha & \cos \alpha \cos \beta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\alpha} \\ \dot{\beta} \\ \dot{\gamma} \end{bmatrix} \quad (4.22)$$

Từ (4.22) ta suy ra phương trình vi phân động học

$$\begin{bmatrix} \dot{\alpha} \\ \dot{\beta} \\ \dot{\gamma} \end{bmatrix} = \frac{1}{\cos \beta} \begin{bmatrix} \cos \beta & \sin \alpha \sin \beta & -\cos \alpha \sin \beta \\ 0 & \cos \alpha \cos \beta & \sin \alpha \cos \beta \\ 0 & -\sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_x^{(0)} \\ \omega_y^{(0)} \\ \omega_z^{(0)} \end{bmatrix} \quad (4.23)$$

Chiếu (4.21) lên các trục của hệ quy chiếu động $Oxyz$ ta được

$${}^R \omega_\gamma = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\gamma} \end{bmatrix}, \quad {}^R \omega_\beta = \begin{bmatrix} \dot{\beta} \sin \gamma \\ \dot{\beta} \cos \gamma \\ 0 \end{bmatrix}, \quad {}^R \omega_\alpha = \begin{bmatrix} \dot{\alpha} \cos \beta \cos \gamma \\ -\dot{\alpha} \cos \beta \sin \gamma \\ \dot{\alpha} \sin \beta \end{bmatrix}$$

Từ đó ta có hệ thức

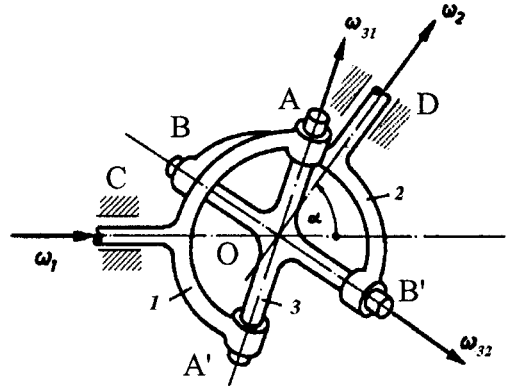
$$\begin{bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \beta \cos \gamma & \sin \gamma & 0 \\ -\sin \gamma \cos \beta & \cos \gamma & 0 \\ \sin \beta & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\alpha} \\ \dot{\beta} \\ \dot{\gamma} \end{bmatrix} \quad (4.24)$$

Từ (4.24) giải ra ta được phương trình vi phân động học

$$\begin{bmatrix} \dot{\alpha} \\ \dot{\beta} \\ \dot{\gamma} \end{bmatrix} = \frac{1}{\cos \beta} \begin{bmatrix} \cos \gamma & -\sin \gamma & 0 \\ \cos \beta \sin \gamma & \cos \beta \cos \gamma & 0 \\ -\sin \beta \cos \gamma & \sin \beta \sin \gamma & \cos \beta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{bmatrix} \quad (4.25)$$

d) Cơ cấu Cardan (Các đặng)

Cơ cấu Cardan (hay còn gọi là khớp Các đặng) là cơ cấu bốn khâu không gian (hình 2.30). Trong đó khâu 1 (khâu CAA') là vật rắn quay quanh trục 1 (trục CO) cố định, khâu 2 (khâu DBB') là vật rắn quay quanh trục 2 (trục DO) cố định. Hai trục quay 1 và 2 giao nhau tại O và tạo thành một góc α . Khâu chữ thập 3 là vật rắn quay quanh một điểm O cố định. Vì vậy cơ cấu Cardan còn được gọi là cơ cấu cầu. Cơ cấu Cardan được dùng để truyền chuyển động quay giữa 2 trục giao nhau một góc α . Cơ cấu Cardan được dùng trong các xe ô tô để nối hộp tốc độ ở trước với hộp vi sai ở phía sau (cầu sau) hoặc được dùng trong các bộ phận điều khiển hướng.



Hình 2.30

Gọi $\vec{\omega}_1$ là vận tốc góc của khâu 1, $\vec{\omega}_2$ là vận tốc góc của khâu 2, $\vec{\omega}_3$ là vận tốc góc của khâu chữ thập 3 (AA'BB'). Xét chuyển động của khâu chữ thập AA'BB'. Nếu chọn khâu 1 (CAA') làm hệ quy chiếu động, ta có

$$\vec{\omega}_3 = \vec{\omega}_{3e} + \vec{\omega}_{3r} = \vec{\omega}_1 + \vec{\omega}_{31} \quad (1)$$

Nếu chọn khâu 2 (DBB') làm hệ quy chiếu động, ta có

$$\vec{\omega}_3 = \vec{\omega}_{3e} + \vec{\omega}_{3r} = \vec{\omega}_2 + \vec{\omega}_{32} \quad (2)$$

Từ các công thức (1) và (2) ta suy ra

$$\vec{\omega}_2 + \vec{\omega}_{32} = \vec{\omega}_1 + \vec{\omega}_{31} \quad (3)$$

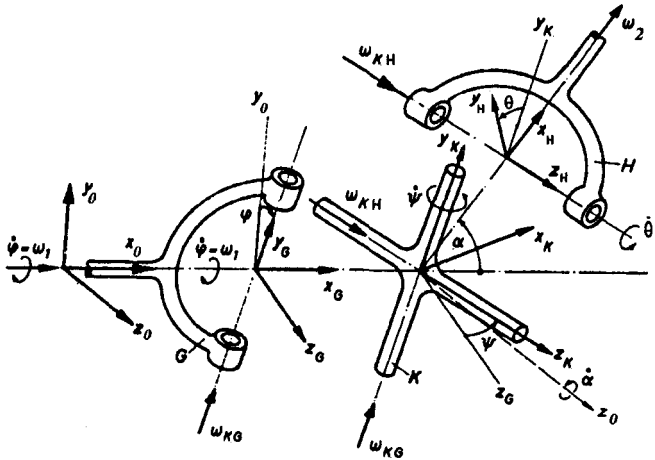
Từ đó ta có công thức liên hệ giữa các vận tốc góc của cơ cấu Cardan

$$\vec{\omega}_2 = \vec{\omega}_1 + \vec{\omega}_{31} - \vec{\omega}_{32} \quad (4)$$

Thí dụ 2.7. Hai trục 1 và 2 cùng nằm trong một mặt phẳng và nối với nhau bằng khớp Các đăng (hình 2.31). Cho biết khâu dẫn 1 có vận tốc góc ω_1 và góc quay φ .

- a) Xác định vận tốc góc $\omega_2(t)$ của khâu bị dẫn 2
- b) Xác định sự phụ thuộc giữa góc quay γ của khâu bị dẫn 2 và góc quay φ của khâu dẫn 1.

Lời giải. Ta tách cơ cấu Cardan thành ba vật rắn như hình 2.31. Chọn hệ tọa độ cố định $Ox_0y_0z_0$ có một mặt phẳng tọa độ là là mặt phẳng chứa hai trục 1 và 2.



Hình 2.31

Phương trình (4) bây giờ có dạng

$$\vec{\omega}_2 = \vec{\omega}_1 + \vec{\omega}_{KG} - \vec{\omega}_{KH} \quad (5)$$

Từ hình (2.31) ta có

$$\omega_1^{(0)} = \omega_1^{(G)} = \begin{bmatrix} \omega_1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \omega_{KG}^{(G)} = \omega_{KG}^{(K)} = \begin{bmatrix} 0 \\ \omega_{KG} \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\omega_{KH}^{(K)} = \omega_{KH}^{(H)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega_{KH} \end{bmatrix}, \quad \omega_2^{(H)} = \begin{bmatrix} \omega_2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \omega_2^{(0)} = \begin{bmatrix} \omega_2 \cos \alpha \\ \omega_2 \sin \alpha \\ 0 \end{bmatrix}$$

Với cách chọn các hệ tọa độ như hình 2.31, các ma trận quay (ma trận côsin chỉ hướng) có dạng như sau

$$\mathbf{A}^{OG} = \mathbf{A}_{x_0}(\varphi) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \varphi & -\sin \varphi \\ 0 & \sin \varphi & \cos \varphi \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{A}^{GK} = \mathbf{A}_{y_G}(\psi) = \begin{bmatrix} \cos \psi & 0 & \sin \psi \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \psi & 0 & \cos \psi \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{A}^{KH} = \mathbf{A}_{z_K}(\theta) = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Phương trình (5) được viết lại dưới dạng ma trận như sau

$$\omega_2^{(0)} = \omega_1^{(0)} + \omega_{KG}^{(0)} - \omega_{KH}^{(0)} = \omega_1^{(0)} + \mathbf{A}^{OG} \omega_{KG}^{(G)} - \mathbf{A}^{OG} \mathbf{A}^{GK} \omega_{KH}^{(K)} \quad (6)$$

Do tích hai ma trận $\mathbf{A}^{OG} \mathbf{A}^{GK}$ có dạng

$$\mathbf{A}^{OG} \mathbf{A}^{GK} = \begin{bmatrix} \cos \psi & 0 & \sin \psi \\ \sin \varphi \sin \psi & \cos \varphi & -\sin \varphi \cos \psi \\ -\cos \varphi \sin \psi & \sin \varphi & \cos \varphi \cos \psi \end{bmatrix}$$

nên từ phương trình (6) ta suy ra

$$\begin{aligned} \omega_2 \cos \alpha &= \omega_1 - \omega_{KH} \sin \psi \\ \omega_2 \sin \alpha &= \omega_{KG} \cos \varphi + \omega_{KH} \sin \varphi \cos \psi \\ 0 &= \omega_{KG} \sin \varphi - \omega_{KH} \cos \varphi \cos \psi \end{aligned} \quad (7)$$

Từ các phương trình (7) ta tìm được

$$\omega_2 = \omega_1 \frac{1}{\cos \alpha + \sin \alpha \sin \varphi \tan \psi} \quad (8)$$

Để khử số hạng $tg\psi$ trong (8) ta sử dụng hệ thức

$$\omega_2^{(0)} = \mathbf{A}^{OH} \omega_2^{(H)} = \mathbf{A}^{OG} \mathbf{A}^{GK} \mathbf{A}^{KH} \omega_2^{(H)} \quad (9)$$

Do

$$\mathbf{A}^{OG} \mathbf{A}^{GK} \mathbf{A}^{KH} = \begin{bmatrix} c\psi c\theta & -c\psi s\theta & s\psi \\ s\varphi s\psi c\theta + c\varphi s\theta & -s\varphi s\psi s\theta + c\varphi c\theta & -s\varphi c\psi \\ -c\varphi s\psi c\theta + s\varphi s\theta & c\varphi s\psi s\theta + s\varphi c\theta & c\varphi c\psi \end{bmatrix}$$

(trong đó ký hiệu $c \equiv \cos$, $s \equiv \sin$)

nên từ (9) ta suy ra

$$\begin{aligned} \omega_2 \cos \alpha &= \omega_2 \cos \psi \cos \theta \\ \omega_2 \sin \alpha &= \omega_2 (\sin \varphi \sin \psi \cos \theta + \cos \varphi \sin \theta) \\ 0 &= \omega_2 (-\cos \varphi \sin \psi \cos \theta + \sin \varphi \sin \theta) \end{aligned} \quad (10)$$

Từ phương trình thứ nhất của (10) ta rút $\cos \theta = \frac{\cos \alpha}{\cos \psi}$, sau đó thay vào phương trình thứ ba của (10) ta được

$$\sin \theta = \frac{\cos \alpha \cos \varphi \sin \psi}{\sin \varphi \cos \psi}$$

Thay $\sin \theta$ và $\cos \theta$ vừa tìm được vào phương trình thứ 2 của (10) ta có

$$tg\psi = tg\alpha \sin \varphi \quad (11)$$

Thay (11) vào (8) ta được công thức xác định ω_2

$$\omega_2 = \omega_1 \frac{1}{\cos \alpha + \sin \alpha tg\alpha \sin^2 \varphi} \quad (12)$$

Biến đổi công thức (3) về dạng khác ta được

$$i_{12} = \frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{1 - \sin^2 \alpha \cos^2 \varphi}{\cos \alpha} \quad (13)$$

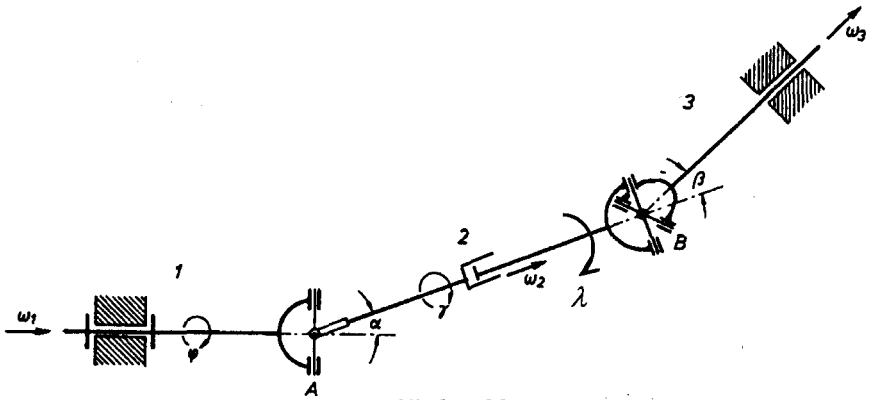
Do $\omega_2 = \dot{\gamma}$ và $\omega_1 = \dot{\varphi}$, từ phương trình (12) ta suy ra phương trình vi phân

$$d\gamma = \frac{d\varphi}{\cos \alpha + \sin \alpha tg\alpha \sin^2 \varphi} \quad (14)$$

Tích phân phương trình (12) ta được

$$\gamma = \arctg \left(\frac{tg\varphi}{\cos \alpha} \right) \quad (15)$$

Thí dụ 2.8. Xét chuyển động của cơ cấu Cardan kép như hình (2.32). Tìm quan hệ giữa vận tốc góc khâu bị dẫn ω_3 và vận tốc góc khâu dẫn ω_1 .



Hình 2.32

Lời giải. Vận tốc góc của khâu bị dẫn theo công thức (12) thí dụ trên có dạng

$$\omega_3 = \omega_2 \frac{1}{\cos \beta + \sin \beta \operatorname{tg} \beta \sin^2 \lambda} \quad (1)$$

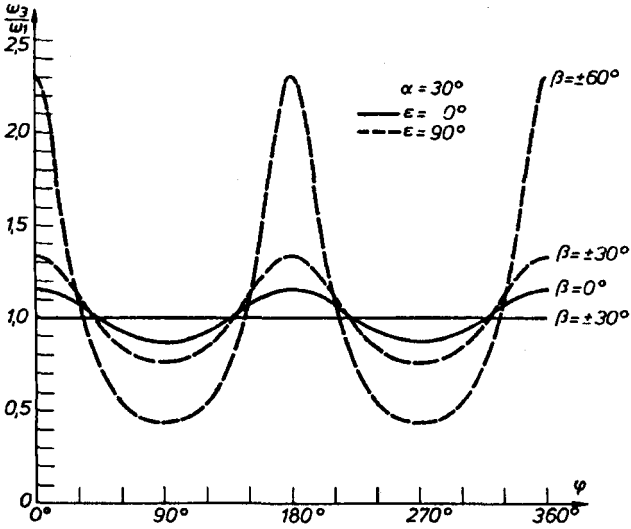
Trong đó λ là góc quay của phần trục 2b. Giả sử góc quay của phần trục 2a và góc quay của phần trục 2b khác nhau một hằng số

$$\lambda = \gamma + \frac{\pi}{2} + \varepsilon \quad (2)$$

Từ (1), (2) và công thức (12) thí dụ trên ta có quan hệ

$$\omega_3 = \frac{\omega_1}{\left(\cos \alpha + \sin \alpha \operatorname{tg} \alpha \sin^2 \varphi \right) \left\{ \cos \beta + \sin \beta \operatorname{tg} \beta \cos^2 \left[\operatorname{arctg} \left(\frac{\operatorname{tg} \varphi}{\cos \alpha} + \varepsilon \right) \right] \right\}} \quad (3)$$

Khi $\varepsilon = 0$ và $\alpha = \pm \beta$ mẫu số của (3) bằng 1. Điều kiện này các kỹ sư cần phải chú ý khi ta muốn có vận tốc góc của khâu bị dẫn là hằng số và bằng ω_1 (trong ô tô và trong máy công cụ cần quan tâm đến điều kiện này). Hình (2.33) biểu diễn đồ thị ω_3/ω_1 phụ thuộc vào góc quay φ của khâu dẫn và vào các tham số của khớp Cardan kép. Trên hình (2.33) là đồ thị ω_3/ω_1 phụ thuộc vào góc quay φ của khâu dẫn và vào các tham số của khớp Cardan kép.

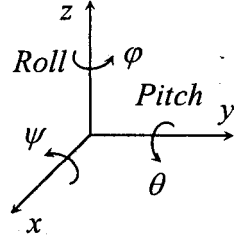


Hình 2.33

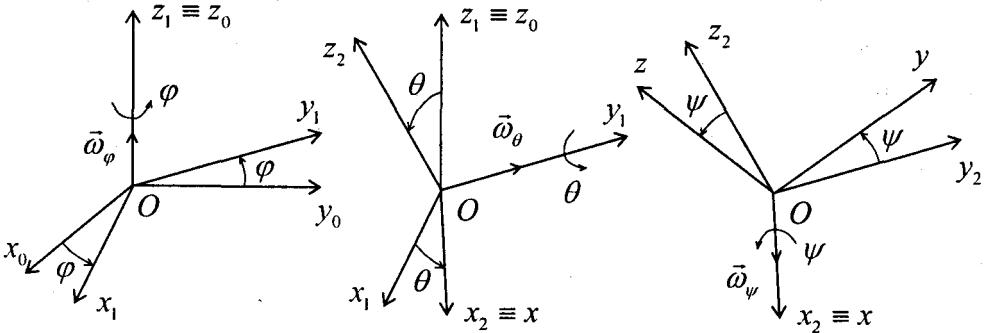
4.3 Các góc Roll - Pitch - Yaw (Roll - Pitch - Yaw Angles)

a) Xác định ma trận côsin chỉ hướng từ các góc Roll - Pitch - Yaw

Một loại các phép quay khác hay được sử dụng trong Rôbôt công nghiệp và kỹ thuật hàng hải là các phép quay Roll - Pitch - Yaw lần lượt quanh các trục $z - y - x$ (hình 2.34). Ta có thể quay hệ qui chiếu cố định $Ox_0y_0z_0$ sang hệ qui chiếu động $Oxyz$ bằng ba phép quay Roll - Pitch - Yaw như sau (hình 2.35)



Hình 2.34



Hình 2.35

- Quay hệ $Ox_0y_0z_0$ quanh trục Oz_0 một góc φ tùy ý (góc Roll). Hệ $Ox_0y_0z_0$ chuyển thành hệ $Ox_1y_1z_1$ với $Oz_0 \equiv Oz_1$.

- Quay hệ $Ox_1y_1z_1$ quanh trục Oy_1 một góc θ (góc Pitch) sao cho trục Ox_1 chuyển đến trục Ox . Hệ $Ox_1y_1z_1$ chuyển thành hệ $Ox_2y_2z_2$ với $Oy_1 \equiv Oy_2$.
- Quay hệ qui chiếu $Ox_2y_2z_2$ quanh trục $Ox_2 \equiv Ox$ một góc ψ (góc Yaw) sao cho trục Oz_2 chuyển đến trục Oz . Hệ $Ox_2y_2z_2$ chuyển thành hệ $Oxyz$.

Các ma trận quay tương ứng với các phép quay Roll, Pitch và Yaw có dạng như sau

$$A_z(\varphi) = \begin{bmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi & 0 \\ \sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A_y(\theta) = \begin{bmatrix} \cos \theta & 0 & \sin \theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \theta & 0 & \cos \theta \end{bmatrix}$$

$$A_x(\psi) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \psi & -\sin \psi \\ 0 & \sin \psi & \cos \psi \end{bmatrix}$$

Ma trận quay Roll - Pitch - Yaw chuyển hệ qui chiếu $Ox_0y_0z_0$ chuyển sang hệ qui chiếu $Oxyz$ có dạng

$$A = A_z(\varphi)A_y(\theta)A_x(\psi) \quad (4.26)$$

Thế các ma trận $A_z(\varphi)$, $A_y(\theta)$, $A_x(\psi)$ ở trên vào biểu thức (4.26) ta được ma trận côsin chỉ hướng

$$A = \begin{bmatrix} \cos \varphi \cos \theta & \cos \varphi \sin \theta \sin \psi - \sin \varphi \cos \psi & \cos \varphi \sin \theta \cos \psi + \sin \varphi \sin \psi \\ \sin \varphi \cos \theta & \sin \varphi \sin \theta \sin \psi + \cos \varphi \cos \psi & \sin \varphi \sin \theta \cos \psi - \cos \varphi \sin \psi \\ -\sin \theta & \cos \theta \sin \psi & \cos \theta \cos \psi \end{bmatrix} \quad (4.27)$$

b) Xác định các góc Roll - Pitch - Yaw từ ma trận côsin chỉ hướng

So sánh các phần tử tương ứng của hai ma trận côsin chỉ hướng (4.9) và (4.27) ta suy ra

$$\begin{aligned} \sin \theta &= -a_{31}, \quad \cos \theta = \pm \sqrt{1 - \sin^2 \theta} \\ \sin \psi &= \frac{a_{32}}{\cos \theta}, \quad \cos \psi = \frac{a_{33}}{\cos \theta} \\ \sin \varphi &= \frac{a_{21}}{\cos \theta}, \quad \cos \varphi = \frac{a_{11}}{\cos \theta} \end{aligned} \quad (4.28)$$

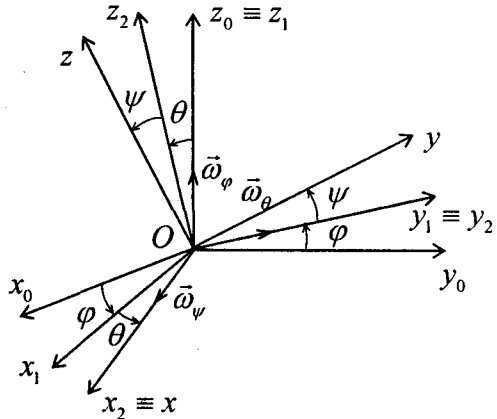
Khi $\theta \approx (2n+1)\frac{\pi}{2}$ ($n=0,1,2,\dots$) thì $\sin^2 \theta \approx 1$, $\cos \theta \approx 0$. Giá trị này của góc θ được gọi là giá trị tới hạn. Thông thường trong các bài toán kỹ thuật rôtô $-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$. Khi đó $\cos \theta > 0$.

c) *Xác định vận tốc góc của vật rắn từ các góc Roll - Pitch - Yaw*

Nếu ta sử dụng ba góc quay Roll - Pitch - Yaw để xác định vị trí của vật rắn B quay quanh một điểm O cố định thì ta có thể quay hệ quy chiếu cố định $Ox_0y_0z_0$ sang hệ quy chiếu động (gắn liền vào vật rắn) $Oxyz$ bằng ba phép quay các góc φ, θ, ψ (hình 2.36). Theo định lý cộng vận tốc góc ta có

$$\vec{\omega} = \vec{\omega}_\varphi + \vec{\omega}_\theta + \vec{\omega}_\psi \quad (4.29)$$

Chiếu (4.29) lên các trục của hệ tọa độ cố định $R_0 \equiv Ox_0y_0z_0$ ta được



Hình 2.36

$${}^{R_0}\omega_\varphi = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\varphi} \end{bmatrix}, \quad {}^{R_0}\omega_\theta = \begin{bmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi & 0 \\ \sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ \dot{\theta} \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\dot{\theta} \sin \varphi \\ \dot{\theta} \cos \varphi \\ 0 \end{bmatrix},$$

$${}^{R_0}\omega_\psi = \mathbf{A}_{YPR} \begin{bmatrix} \dot{\psi} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{\psi} \cos \varphi \cos \theta \\ \dot{\psi} \sin \varphi \cos \theta \\ -\dot{\psi} \sin \theta \end{bmatrix}$$

Từ đó suy ra

$$\begin{bmatrix} \omega_x^{(0)} \\ \omega_y^{(0)} \\ \omega_z^{(0)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -\sin \varphi & \cos \varphi \cos \theta \\ 0 & \cos \varphi & \sin \varphi \cos \theta \\ 1 & 0 & -\sin \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\varphi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \end{bmatrix} \quad (4.30)$$

Từ phương trình (4.30) ta suy ra phương trình vi phân động học

$$\begin{bmatrix} \dot{\varphi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \end{bmatrix} = \frac{1}{\cos \theta} \begin{bmatrix} \cos \varphi \sin \theta & \sin \varphi \sin \theta & \cos \theta \\ -\sin \varphi \cos \theta & \cos \varphi \cos \theta & 0 \\ \cos \varphi & \sin \varphi & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_x^{(0)} \\ \omega_y^{(0)} \\ \omega_z^{(0)} \end{bmatrix} \quad (4.31)$$

Chiếu (4.29) lên các trục của hệ quy chiếu động $R = Oxyz$ ta được

$${}^R\omega_\psi = \begin{bmatrix} \dot{\psi} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad {}^R\omega_\theta = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\psi & \sin\psi \\ 0 & -\sin\psi & \cos\psi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ \dot{\theta} \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \dot{\theta}\cos\psi \\ -\dot{\theta}\sin\psi \end{bmatrix},$$

$${}^R\omega_\varphi = \mathbf{A}_{YPR}^T \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\varphi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\dot{\varphi}\sin\theta \\ \dot{\varphi}\cos\theta\sin\psi \\ \dot{\varphi}\cos\theta\cos\psi \end{bmatrix}$$

Từ đó ta có hệ thức

$$\begin{bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\sin\theta & 0 & 1 \\ \cos\theta\sin\psi & \cos\psi & 0 \\ \cos\theta\cos\psi & -\sin\psi & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\varphi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \end{bmatrix} \quad (4.32)$$

Từ (4.32) ta suy ra phương trình vi phân động học trong hệ qui chiếu động

$$\begin{bmatrix} \dot{\varphi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \end{bmatrix} = \frac{1}{\cos\theta} \begin{bmatrix} 0 & \sin\psi & \cos\psi \\ 0 & \cos\theta\cos\psi & -\cos\theta\sin\psi \\ 1 & \sin\theta\sin\psi & \sin\theta\cos\psi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{bmatrix} \quad (4.33)$$

4.4 Các tham số Euler (Euler Parameters)

4.4.1 Xác định ma trận cosin chỉ hướng từ các tham số Euler

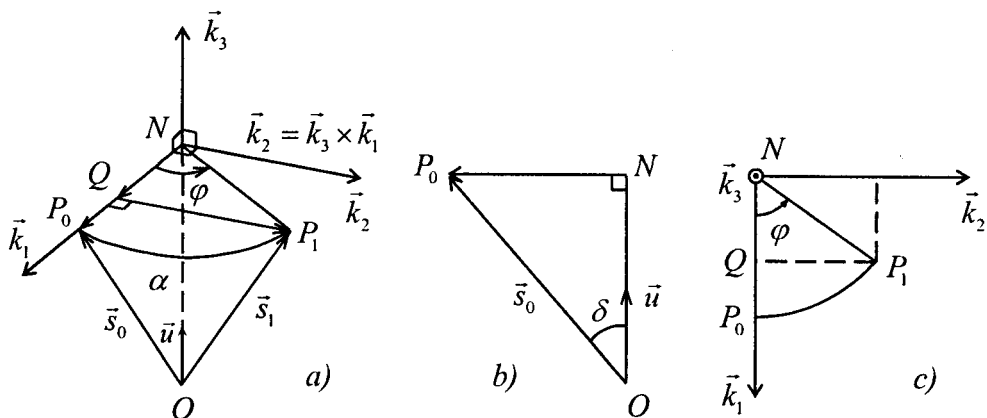
Trong đoạn này sẽ thiết lập ma trận cosin chỉ hướng của vật rắn quay quanh điểm O cố định từ các tham số Euler bằng các suy luận hình học. Cho hai hệ toạ độ $Ox_0y_0z_0$ và $Oxyz$ (gắn liền với vật rắn B). Theo định lý quay hữu hạn Euler, ta có thể quay hệ qui chiếu $R_0 = Ox_0y_0z_0$ sang hệ qui chiếu $R_1 = Oxyz$ bằng một phép quay một góc φ quanh trục quay có vectơ đơn vị là \vec{u} (hình 2.37a). Xét việc chuyển một vectơ tùy ý \vec{s} của vật rắn B từ vị trí ban đầu $\vec{s}_0 = \overline{OP_0}$ sau khi quay chuyển sang vị trí tức thời $\vec{s}_1 = \overline{OP_1}$. Gọi P_1P_0N là mặt phẳng vuông góc với trục quay \vec{u} . Tại N ta dựng một hệ toạ độ vuông góc với các vectơ đơn vị là $\vec{k}_1, \vec{k}_2, \vec{k}_3$. Trong đó \vec{k}_3 nằm trên trục \vec{u} , \vec{k}_1 nằm trên trục $\overline{NP_0}$, còn $\vec{k}_2 = \vec{k}_3 \times \vec{k}_1$ (hình 2.37a).

Từ P_1 hạ đường vuông góc xuống đường thẳng NP_0 và cắt nhau tại Q. Từ hình 2.37a ta có:

$$\vec{s}_1 = \overline{OP_1} = \overline{ON} + \overline{NQ} + \overline{QP_1} \quad (1)$$

Do mặt phẳng P_1P_0N vuông góc với ON nên ta có $ON = \vec{u} \cdot \vec{s}_0$ (hình 2.37b). Từ đó suy ra

$$\overline{ON} = \vec{u}(\vec{u} \cdot \vec{s}_0) \quad (2)$$



Hình 2.37

Từ tam giác vectơ (hình 2.37b) ta có

$$\overline{NP}_0 = \overline{s}_0 - \overline{ON} = \overline{s}_0 - \overline{u}(\overline{u} \cdot \overline{s}_0) \quad (3)$$

Do $P_1Q \perp NP_0$ nên ta có các hệ thức (hình 2.37c)

$$|\overline{NQ}| = |\overline{NP}_1| \cos \varphi = |\overline{NP}_0| \cos \varphi \quad (4)$$

$$|\overline{QP}_1| = |\overline{NP}_1| \sin \varphi = |\overline{NP}_0| \sin \varphi = |\overline{u} \times \overline{s}_0| \sin \varphi \quad (5)$$

Vectơ \overline{NQ} cùng chiều với vectơ \overline{NP}_0 . Do đó, chú ý đến (3) và (4), ta suy ra

$$\overline{NQ} = [\overline{s}_0 - \overline{u}(\overline{u} \cdot \overline{s}_0)] \cos \varphi \quad (6)$$

Vectơ \overline{QP}_1 song song với vectơ $\overline{k}_2 = \overline{k}_3 \times \overline{k}_1$. Chú ý đến (5) ta có hệ thức

$$\overline{QP}_1 = \overline{u} \times \overline{s}_0 \sin \varphi \quad (7)$$

Thế các biểu thức (2), (6) và (7) vào phương trình (1) ta được

$$\begin{aligned} \overline{s}_1 &= \overline{u}(\overline{u} \cdot \overline{s}_0) + [\overline{s}_0 - \overline{u}(\overline{u} \cdot \overline{s}_0)] \cos \varphi + \overline{u} \times \overline{s}_0 \sin \varphi \\ &= \overline{s}_0 \cos \varphi + \overline{u}(\overline{u} \cdot \overline{s}_0)(1 - \cos \varphi) + \overline{u} \times \overline{s}_0 \sin \varphi \end{aligned} \quad (8)$$

Chú ý đến các công thức lượng giác

$$1 - \cos \varphi = 2 \sin^2 \frac{\varphi}{2}, \quad \sin \varphi = 2 \sin \frac{\varphi}{2} \cos \frac{\varphi}{2}, \quad \cos \varphi = 2 \cos^2 \frac{\varphi}{2} - 1$$

ta có thể viết hệ thức (8) dưới dạng

$$\overline{s}_1 = \overline{s}_0 \left(2 \cos^2 \frac{\varphi}{2} - 1 \right) + 2 \overline{u} \sin^2 \frac{\varphi}{2} (\overline{u} \cdot \overline{s}_0) + 2 \overline{u} \times \overline{s}_0 \sin \frac{\varphi}{2} \cos \frac{\varphi}{2} \quad (9)$$

Bây giờ ta đưa vào bốn tham số q_0, q_1, q_2, q_3 xác định như sau

$$q_0 = \cos \frac{\varphi}{2}, \quad q_1 = u_1 \sin \frac{\varphi}{2}, \quad q_2 = u_2 \sin \frac{\varphi}{2}, \quad q_3 = u_3 \sin \frac{\varphi}{2} \quad (4.34)$$

Trong đó u_1, u_2, u_3 là toạ độ của vectơ \vec{u} trong hệ qui chiếu $R_0 = O x_0 y_0 z_0$. Như thế (4.34) có thể viết dưới dạng

$$q_0 = \cos \frac{\varphi}{2}, \quad \mathbf{q} = \mathbf{u} \sin \frac{\varphi}{2}, \quad (\vec{q} = \vec{u} \sin \frac{\varphi}{2}) \quad (4.35)$$

Các tham số u_1, u_2, u_3 và φ được gọi là các tham số quay.

Định nghĩa: Bốn tham số q_0, q_1, q_2, q_3 xác định bởi công thức (4.34) được gọi là các tham số Euler.

Chú ý rằng bốn tham số Euler không độc lập nhau. Từ (4.35) ta suy ra

$$\cos^2 \frac{\varphi}{2} + \mathbf{u}^T \mathbf{u} \sin^2 \frac{\varphi}{2} = \cos^2 \frac{\varphi}{2} + \sin^2 \frac{\varphi}{2} = 1$$

hay

$$q_0^2 + \mathbf{q}^T \mathbf{q} = q_0^2 + q_1^2 + q_2^2 + q_3^2 = 1 \quad (4.36)$$

Hệ thức (4.36) được gọi là phương trình liên kết chuẩn hoá các tham số Euler.

Người ta thường viết bốn tham số Euler dưới dạng vectơ như sau

$$\mathbf{p} = [q_0, q_1, q_2, q_3]^T \quad (4.37)$$

Khi đó phương trình (4.36) có dạng

$$\mathbf{p}^T \mathbf{p} = 1 \quad (4.38)$$

Sử dụng bốn tham số Euler, phương trình (9) có thể viết lại dưới dạng

$$\vec{s}_1 = (2q_0^2 - 1)\vec{s}_0 + 2\vec{q}(\vec{q} \cdot \vec{s}_0) + 2q_0\vec{q} \times \vec{s}_0 \quad (4.39)$$

Chú ý rằng $\mathbf{s}_1^{(0)} = {}^{R_0} \mathbf{s}_1$, $\mathbf{s}_1^{(1)} = {}^{R_1} \mathbf{s}_1 = {}^{R_0} \mathbf{s}_0 = \mathbf{s}_0^{(0)}$, $\mathbf{q} = {}^{R_0} \mathbf{q}$. Do đó từ phương trình (4.39) ta suy ra

$$\begin{aligned} \mathbf{s}_1^{(0)} &= (2q_0^2 - 1)\mathbf{s}_0^{(0)} + 2\mathbf{q}(\mathbf{q}^T \mathbf{s}_0^{(0)}) + 2q_0\tilde{\mathbf{q}}\mathbf{s}_0^{(0)} \\ &= [(2q_0^2 - 1)\mathbf{E} + 2\mathbf{q}\mathbf{q}^T + 2q_0\tilde{\mathbf{q}}] \mathbf{s}_1^{(1)} \end{aligned} \quad (4.40)$$

Từ đó suy ra biểu thức của ma trận côsin chỉ hướng

$$\mathbf{A} = (2q_0^2 - 1)\mathbf{E} + 2(\mathbf{q}\mathbf{q}^T + q_0\tilde{\mathbf{q}}) \quad (4.41)$$

Ma trận côsin chỉ hướng (4.41) có thể viết dưới dạng khai triển như sau

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2(q_0^2 + q_1^2) - 1 & 2(q_1q_2 - q_0q_3) & 2(q_1q_3 + q_0q_2) \\ 2(q_1q_2 + q_0q_3) & 2(q_0^2 + q_2^2) - 1 & 2(q_2q_3 - q_0q_1) \\ 2(q_1q_3 - q_0q_2) & 2(q_2q_3 + q_0q_1) & 2(q_0^2 + q_3^2) - 1 \end{bmatrix} \quad (4.42)$$

Chú ý. Ta có thể biến đổi công thức (4.41) về dạng

$$\mathbf{A} = \mathbf{E} + 2q_0\tilde{\mathbf{q}} + 2\tilde{\mathbf{q}}\tilde{\mathbf{q}} \quad (4.43)$$

4.4.2 Xác định các tham số Euler từ ma trận cosin chỉ hướng

So sánh các phần tử của ma trận (4.42) với ma trận (4.9) ta có thể đưa ra các công thức xác định các tham số Euler từ ma trận cosin chỉ hướng (4.9). Theo định nghĩa vết của ma trận (4.9) là

$$\text{tr}\mathbf{A} = a_{11} + a_{22} + a_{33} \quad (4.44)$$

Từ ma trận (4.42) ta có

$$\text{tr}\mathbf{A} = 2(3q_0^2 + q_1^2 + q_2^2 + q_3^2) - 3 = 4q_0^2 - 1$$

Từ đó ta suy ra

$$q_0^2 = \frac{\text{tr}\mathbf{A} + 1}{4} \quad (4.45)$$

Tiếp tục so sánh các phần tử của hai ma trận (4.42) và (4.9) ta có

$$a_{11} = 2q_0^2 + 2q_1^2 - 1 = 2\frac{\text{tr}\mathbf{A} + 1}{4} + 2q_1^2 - 1$$

$$\text{Do đó } q_1^2 = \frac{1 + 2a_{11} - \text{tr}\mathbf{A} + 1}{4} \quad (4.46)$$

Tính toán tương tự, ta được

$$q_2^2 = \frac{1 + 2a_{22} - \text{tr}\mathbf{A} + 1}{4} \quad (4.47)$$

$$q_3^2 = \frac{1 + 2a_{33} - \text{tr}\mathbf{A} + 1}{4} \quad (4.48)$$

Sau khi tính q_0 theo công thức (4.45), ta có thể tính q_1, q_2, q_3 theo cách khác. Từ các ma trận (4.42) và (4.9) ta suy ra

$$a_{32} - a_{23} = 4q_0q_1 \Rightarrow q_1 = \frac{a_{32} - a_{23}}{4q_0}$$

$$a_{13} - a_{31} = 4q_0q_2 \Rightarrow q_2 = \frac{a_{13} - a_{31}}{4q_0} \quad (4.49)$$

$$a_{21} - a_{12} = 4q_0q_3 \Rightarrow q_3 = \frac{a_{21} - a_{12}}{4q_0}$$

Nếu $q_0 = 0$, thì ta có thể xác định q_1, q_2, q_3 theo phương án khác. Chẳng hạn từ các hệ thức

$$a_{21} + a_{12} = 4q_1q_2, \quad a_{31} + a_{13} = 4q_1q_3, \quad a_{32} + a_{23} = 4q_2q_3$$

ta có thể giải ra q_1, q_2, q_3 .

Thí dụ 2.9. Cho biết ma trận cosin chỉ hướng của vật rắn đối với hệ tọa độ cố định là

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0,5449 & -0,5549 & 0,6285 \\ 0,3111 & 0,8299 & 0,4629 \\ -0,7785 & -0,0567 & 0,6249 \end{bmatrix}$$

Hãy tìm bốn tham số Euler tương ứng với phép biến đổi này.

Lời giải. Vết của ma trận \mathbf{A} là

$$\text{tr}\mathbf{A} = a_{11} + a_{22} + a_{33} = 0,5449 + 0,8299 + 0,6249 = 1,9997$$

Theo công thức (4.45) ta tính được

$$q_0^2 = \frac{1,9997 + 1}{4} = 0,7499 \Rightarrow q_0 = 0,866$$

Từ các công thức (4.49) ta có

$$q_1 = \frac{-0,0567 - 0,4629}{4 \cdot 0,866} = -0,15$$

$$q_2 = \frac{0,6285 + 0,7785}{4 \cdot 0,866} = 0,406$$

$$q_3 = \frac{0,3111 + 0,5549}{4 \cdot 0,866} = 0,25$$

Từ đó suy ra

$$\mathbf{p} = [0,866; -0,15; 0,406; 0,25]^T$$

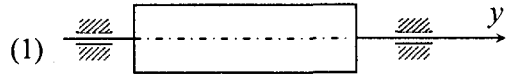
Nếu ta lấy $q_0 = -0,866$, tính toán tương tự ta nhận được

$$\mathbf{p} = [-0,866; 0,15; -0,406; -0,25]^T$$

Thí dụ 2.10. Vật rắn quay quanh trục y với góc quay φ . Xác định các trị riêng của ma trận quay và các tham số Euler.

Lời giải. Ma trận quay trong trường hợp này có dạng

$$\mathbf{A}(\varphi) = \begin{bmatrix} \cos \varphi & 0 & \sin \varphi \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \varphi & 0 & \cos \varphi \end{bmatrix}$$



Hình 2.38

Phương trình đặc trưng của ma trận \mathbf{A}

$$|\mathbf{A} - \lambda \mathbf{E}| = \begin{vmatrix} \cos \varphi - \lambda & 0 & \sin \varphi \\ 0 & 1 - \lambda & 0 \\ -\sin \varphi & 0 & \cos \varphi - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

Từ đó suy ra

$$(\cos \varphi - \lambda)^2 (1 - \lambda) + \sin^2 \varphi (1 - \lambda) = (1 - \lambda)(\lambda^2 - 2\lambda \cos \varphi + 1) = 0 \quad (2)$$

Các trị riêng của ma trận \mathbf{A}

$$1 - \lambda = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 1 \quad (3)$$

$$\lambda^2 - 2\lambda \cos \varphi + 1 = 0 \Rightarrow \lambda_{2,3} = \cos \varphi \pm i \sin \varphi = e^{\pm i\varphi} \quad (4)$$

Để xác định các tham số Euler, trước hết ta tìm véc tơ riêng ứng với trị riêng $\lambda_1 = 1$ của ma trận cosin chỉ hướng \mathbf{A} . Phương trình riêng ứng với $\lambda_1 = 1$ có dạng

$$\begin{bmatrix} \cos \varphi - 1 & 0 & \sin \varphi \\ 0 & 0 & 0 \\ -\sin \varphi & 0 & \cos \varphi - 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (5)$$

Từ (5) suy ra

$$a_1(\cos \varphi - 1) + 0 \cdot a_2 + a_3 \sin \varphi = 0 \quad (6)$$

$$-a_1 \sin \varphi + 0 \cdot a_2 + a_3(\cos \varphi - 1) = 0 \quad (7)$$

Nhân phương trình (6) với a_1 , phương trình (7) với a_3 rồi cộng lại ta được

$$(a_1^2 + a_3^2)(\cos \varphi - 1) = 0 \quad (8)$$

Do $\cos \varphi - 1 \neq 0$ (vì φ là góc quay bất kỳ nào đó) nên suy ra

$$a_1^2 + a_3^2 = 0 \Rightarrow a_1 = a_3 = 0 \quad (9)$$

Vậy véc tơ riêng có dạng $\mathbf{a} = [0, \alpha, 0]^T$. Chuẩn hoá ta được $\mathbf{u} = [0, 1, 0]^T$. Từ đó suy ra các tham số Euler

$$q_0 = \cos \frac{\varphi}{2}; \quad q_1 = 0; \quad q_2 = \sin \frac{\varphi}{2}; \quad q_3 = 0 \quad (10)$$

4.4.3 Xác định các tham số Euler từ các góc Euler

Từ công thức xác định ma trận quay Euler ta suy ra

$$\begin{aligned} \text{tr} \mathbf{A} &= \cos \psi \cos \varphi - \sin \psi \cos \theta \sin \varphi - \sin \psi \sin \varphi + \cos \psi \cos \theta \cos \varphi + \cos \theta \\ &= \cos \psi \cos \varphi (1 + \cos \theta) - \sin \psi \sin \varphi (1 + \cos \theta) + \cos \theta \\ &= (1 + \cos \theta)(\cos \psi \cos \varphi - \sin \psi \sin \varphi) + \cos \theta \\ &= 2 \cos^2 \frac{\theta}{2} \cos(\psi + \varphi) + 2 \cos^2 \frac{\theta}{2} - 1 \\ &= 2 \cos^2 \frac{\theta}{2} [1 + \cos(\psi + \varphi)] - 1 = 4 \cos^2 \frac{\theta}{2} \cos^2 \frac{\psi + \varphi}{2} - 1 \end{aligned} \quad (1)$$

So sánh (1) với (4.45) ta suy ra

$$q_0 = \cos \frac{\theta}{2} \cos \frac{\psi + \varphi}{2} \quad (4.50a)$$

Bằng cách tương tự ta suy ra

$$\begin{aligned} q_1 &= \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\psi - \varphi}{2} \\ q_2 &= \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{\psi - \varphi}{2} \\ q_3 &= \cos \frac{\theta}{2} \sin \frac{\psi + \varphi}{2} \end{aligned} \quad (4.50b)$$

Ngược lại khi biết các tham số Euler ta cũng có thể xác định được các góc Euler

$$\begin{aligned} \cos \theta &= 2(q_0^2 + q_3^2) - 1 \\ \cos \varphi &= \frac{2(q_2 q_3 + q_0 q_1)}{\sin \theta} \\ \cos \psi &= \frac{-2(q_2 q_3 - q_0 q_1)}{\sin \theta} \end{aligned} \quad (4.51)$$

4.4.4 Xác định vận tốc góc của vật rắn từ các tham số Euler

a) Phân tích ma trận côsin chỉ hướng thành tích của hai ma trận đơn giản hơn

Để thiết lập quan hệ giữa các tham số Euler và vận tốc góc của vật rắn, ta phân tích ma trận côsin chỉ hướng (4.42) thành tích của hai ma trận đơn giản hơn. Ta đưa vào hai ma trận chữ nhật cỡ 3×4 như sau

$$\mathbf{G} = [-\mathbf{q}, \quad \tilde{\mathbf{q}} + q_0 \mathbf{E}_3] = \begin{bmatrix} -q_1 & q_0 & -q_3 & q_2 \\ -q_2 & q_3 & q_0 & -q_1 \\ -q_3 & -q_2 & q_1 & q_0 \end{bmatrix} \quad (4.52)$$

$$\mathbf{L} = [-\mathbf{q}, \quad -\tilde{\mathbf{q}} + q_0 \mathbf{E}_3] = \begin{bmatrix} -q_1 & q_0 & q_3 & -q_2 \\ -q_2 & -q_3 & q_0 & q_1 \\ -q_3 & q_2 & -q_1 & q_0 \end{bmatrix} \quad (4.53)$$

Định lý. Ma trận côsin chỉ hướng \mathbf{A} của vật rắn có thể phân tích thành tích của hai ma trận \mathbf{G} và \mathbf{L}^T

$$\mathbf{A} = \mathbf{G} \mathbf{L}^T \quad (4.54)$$

Chứng minh. Do tính chất $-\tilde{\mathbf{q}}^T = \tilde{\mathbf{q}}$, ta có

$$\begin{aligned} \mathbf{G} \mathbf{L}^T &= [-\mathbf{q}, \quad \tilde{\mathbf{q}} + q_0 \mathbf{E}_3] \begin{bmatrix} -\mathbf{q}^T \\ \tilde{\mathbf{q}} + q_0 \mathbf{E}_3 \end{bmatrix} \\ &= \mathbf{q} \mathbf{q}^T + (\tilde{\mathbf{q}} + q_0 \mathbf{E}_3)(\tilde{\mathbf{q}} + q_0 \mathbf{E}_3) \end{aligned}$$

Chú ý đến công thức $\tilde{\mathbf{a}}\tilde{\mathbf{b}} = \mathbf{b}\mathbf{a}^T - \mathbf{E}\mathbf{a}^T\mathbf{b}$ biểu thức trên có dạng

$$\mathbf{GL}^T = (2q_0^2 - 1)\mathbf{E} + 2(\mathbf{q}\mathbf{q}^T + q_0\tilde{\mathbf{q}}) \quad (4.55)$$

So sánh hệ thức (4.55) với hệ thức (4.41) ta suy ra

$$\mathbf{A} = \mathbf{GL}^T$$

Chú ý. Công thức (4.54) là một công thức cơ bản. Từ công thức này ta thấy ma trận cosin chỉ hướng \mathbf{A} , mà mỗi phần tử của nó tỷ lệ bậc hai với các tham số Euler, bằng tích hai ma trận, mà mỗi phần tử của hai ma trận này tỷ lệ bậc nhất với các tham số Euler.

b) Một số tính chất của các ma trận \mathbf{G} và \mathbf{L}

Tính chất 1. Mỗi hàng của ma trận \mathbf{G} và của ma trận \mathbf{L} là một vectơ trực giao với

$$\text{vectơ } \mathbf{p} = [q_0, q_1, q_2, q_3]^T$$

$$\mathbf{G}\mathbf{p} = 0, \quad \mathbf{L}\mathbf{p} = 0 \quad (4.56)$$

Chứng minh. Theo định nghĩa (4.52) ta có

$$\mathbf{G}\mathbf{p} = [-\mathbf{q}, \quad \tilde{\mathbf{q}} + q_0\mathbf{E}_3] \begin{bmatrix} q_0 \\ \mathbf{q} \end{bmatrix} = -q_0\mathbf{q} + \tilde{\mathbf{q}}\mathbf{q} + q_0\mathbf{q} = \tilde{\mathbf{q}}\mathbf{q} = 0$$

$$(\tilde{\mathbf{q}}\mathbf{q} = 0 \text{ do } \tilde{\mathbf{q}} \times \mathbf{q} = \tilde{\mathbf{u}} \times \tilde{\mathbf{u}} \sin^2 \frac{\varphi}{2} = 0)$$

Bằng cách tương tự từ (4.53) ta chứng minh được

$$\mathbf{L}\mathbf{p} = 0$$

Tính chất 2. Các ma trận \mathbf{G} và \mathbf{L} là các ma trận trực giao theo hàng (Các véc tơ của ma trận \mathbf{G} trực giao với nhau từng đôi một, các véc tơ của ma trận \mathbf{L} trực giao với nhau từng đôi một)

$$\mathbf{G}\mathbf{G}^T = \mathbf{L}\mathbf{L}^T = \mathbf{E}_3 \quad (4.57)$$

Chứng minh. Chú ý đến phương trình (4.36) về điều kiện liên kết của các tham số Euler và định nghĩa các ma trận \mathbf{G} và \mathbf{L} ta dễ dàng chứng minh tính chất trên bằng cách tính toán trực tiếp.

Tính chất 3. Tích hai ma trận $\mathbf{G}^T\mathbf{G}$ là ma trận vuông cấp 4 có dạng

$$\mathbf{G}^T\mathbf{G} = \mathbf{E}_4 - \mathbf{p}\mathbf{p}^T, \quad \mathbf{L}^T\mathbf{L} = \mathbf{E}_4 - \mathbf{p}\mathbf{p}^T \quad (4.58)$$

Chứng minh. Tính toán trực tiếp tích hai ma trận $\mathbf{G}^T\mathbf{G}$ ta được ma trận vuông cấp 4 có dạng

$$\mathbf{G}^T\mathbf{G} = \begin{bmatrix} 1 - q_0^2 & -q_0\mathbf{q}^T \\ -q_0\mathbf{q} & -\mathbf{q}\mathbf{q}^T + \mathbf{E}_3 \end{bmatrix} = \mathbf{E}_4 - \mathbf{p}\mathbf{p}^T$$

Tính toán tương tự ta được

$$\mathbf{L}^T\mathbf{L} = \mathbf{E}_4 - \mathbf{p}\mathbf{p}^T$$

c) Đạo hàm các tham số Euler theo thời gian

Đạo hàm theo thời gian hai vế của phương trình (4.38) ta được

$$\dot{\mathbf{p}}^T \mathbf{p} + \mathbf{p}^T \dot{\mathbf{p}} = 2\dot{\mathbf{p}}^T \mathbf{p} = 2\mathbf{p}^T \dot{\mathbf{p}} = 0$$

Từ đó suy ra

$$\dot{\mathbf{p}}^T \mathbf{p} = \mathbf{p}^T \dot{\mathbf{p}} = 0 \quad (4.59)$$

$$\dot{\mathbf{p}}^T \mathbf{p} = [q_0 \quad \dot{q}_1 \quad \dot{q}_2 \quad \dot{q}_3] \begin{bmatrix} q_0 \\ q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{bmatrix} = q_0 \dot{q}_0 + q_1 \dot{q}_1 + q_2 \dot{q}_2 + q_3 \dot{q}_3 = [q_0 \quad q_1 \quad q_2 \quad q_3] \begin{bmatrix} \dot{q}_0 \\ \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \\ \dot{q}_3 \end{bmatrix}$$

Đạo hàm theo thời gian hai vế của các phương trình (4.56) và ta được

$$\mathbf{G}\dot{\mathbf{p}} = -\dot{\mathbf{G}}\mathbf{p} \quad (4.60)$$

$$\mathbf{L}\dot{\mathbf{p}} = -\dot{\mathbf{L}}\mathbf{p} \quad (4.61)$$

Sử dụng các công thức định nghĩa (4.52) và (4.53), ta dễ dàng chứng minh được hệ thức

$$\mathbf{G}\dot{\mathbf{L}}^T = \dot{\mathbf{G}}\mathbf{L}^T \quad (4.62)$$

Đạo hàm hai vế phương trình (4.54) và chú ý đến công thức (4.62) ta có

$$\dot{\mathbf{A}} = \mathbf{G}\dot{\mathbf{L}}^T + \dot{\mathbf{G}}\mathbf{L}^T = 2\mathbf{G}\dot{\mathbf{L}}^T = 2\dot{\mathbf{G}}\mathbf{L}^T \quad (4.63)$$

Tích $\mathbf{L}\dot{\mathbf{p}}$ có thể khai triển như sau

$$\mathbf{L}\dot{\mathbf{p}} = [-\mathbf{q}, \quad -\tilde{\mathbf{q}} + q_0 \mathbf{E}] \begin{bmatrix} \dot{q}_0 \\ \dot{\mathbf{q}} \end{bmatrix} = -\dot{q}_0 \mathbf{q} - \tilde{\mathbf{q}} \dot{\mathbf{q}} + q_0 \dot{\mathbf{q}} \quad (4.64)$$

Chú ý đến các công thức (4.59) và tính chất của $\tilde{\mathbf{a}}$ ta có

$$\mathbf{p}^T \dot{\mathbf{p}} = q_0 \dot{q}_0 + \mathbf{q}^T \dot{\mathbf{q}} = 0, \quad \tilde{\mathbf{a}}^T = -\tilde{\mathbf{a}},$$

$$\tilde{\mathbf{a}}\tilde{\mathbf{b}} = \tilde{\mathbf{a}}\tilde{\mathbf{b}} - \tilde{\mathbf{b}}\tilde{\mathbf{a}}, \quad \tilde{\mathbf{a}}\tilde{\mathbf{b}} = \mathbf{b}\mathbf{a}^T - \mathbf{a}^T \mathbf{b}\mathbf{E},$$

Do đó ta có thể biến đổi hai vế của phương trình vectơ (4.64) trên thành các ma trận đối xứng lệch

$$\begin{aligned} \widetilde{\mathbf{L}}\dot{\mathbf{p}} &= -\dot{q}_0 \tilde{\mathbf{q}} - \tilde{\mathbf{q}} \dot{\mathbf{q}} + q_0 \dot{\mathbf{q}} = -\dot{q}_0 \tilde{\mathbf{q}} - \tilde{\mathbf{q}} \dot{\mathbf{q}} + \tilde{\mathbf{q}} \dot{\mathbf{q}} + q_0 \dot{\mathbf{q}} \\ &= -\dot{q}_0 \tilde{\mathbf{q}} - \tilde{\mathbf{q}} \dot{\mathbf{q}} + \mathbf{q} \dot{\mathbf{q}}^T - \dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{q} \mathbf{E} + q_0 \dot{\mathbf{q}} \\ &= -\dot{q}_0 \tilde{\mathbf{q}} - \tilde{\mathbf{q}} \dot{\mathbf{q}} + \mathbf{q} \dot{\mathbf{q}}^T + q_0 \dot{q}_0 \mathbf{E} + q_0 \dot{\mathbf{q}} \\ &= [-\mathbf{q}, \quad -\tilde{\mathbf{q}} + q_0 \mathbf{E}] \begin{bmatrix} -\dot{\mathbf{q}}^T \\ \tilde{\mathbf{q}} + \dot{q}_0 \mathbf{E} \end{bmatrix} = [-\mathbf{q}, \quad -\tilde{\mathbf{q}} + q_0 \mathbf{E}] \begin{bmatrix} -\dot{\mathbf{q}}^T \\ -\tilde{\mathbf{q}}^T + \dot{q}_0 \mathbf{E}^T \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Vậy ta có

$$\widetilde{\mathbf{L}}\dot{\mathbf{p}} = \mathbf{L}\dot{\mathbf{L}}^T \quad (4.65)$$

Bằng các tương tự ta chứng minh được

$$\widetilde{\mathbf{G}}\dot{\mathbf{p}} = -\mathbf{G}\dot{\mathbf{G}}^T \quad (4.66)$$

d) Công thức xác định vận tốc góc của vật rắn

Theo công thức tính vận tốc góc của vật rắn ta có

$$\tilde{\boldsymbol{\omega}}^{(1)} = \mathbf{A}^T \dot{\mathbf{A}}$$

Thế các biểu thức (4.54), (4.63) vào biểu thức trên ta được

$$\tilde{\boldsymbol{\omega}}^{(1)} = 2\mathbf{L}\mathbf{G}^T\mathbf{G}\dot{\mathbf{L}}^T$$

Chú ý đến công thức (4.58) biểu thức trên có dạng

$$\tilde{\boldsymbol{\omega}}^{(1)} = 2\mathbf{L}(\mathbf{E}_4 - \mathbf{p}\mathbf{p}^T)\dot{\mathbf{L}}^T = 2\mathbf{L}\dot{\mathbf{L}}^T - 2\mathbf{L}\mathbf{p}\mathbf{p}^T\dot{\mathbf{L}}^T$$

Theo (4.56) $\mathbf{L}\mathbf{p} = 0$, nên ta suy ra

$$\tilde{\boldsymbol{\omega}}^{(1)} = 2\mathbf{L}\dot{\mathbf{L}}^T \quad (4.67)$$

Chú ý đến công thức (4.65) ta có

$$\tilde{\boldsymbol{\omega}}^{(1)} = 2\widetilde{\mathbf{L}}\dot{\mathbf{p}} \quad (4.68)$$

Từ (4.68) ta suy ra

$$\boldsymbol{\omega}^{(1)} = 2\mathbf{L}\dot{\mathbf{p}} \quad (4.69)$$

Sử dụng quan hệ véctơ đại số trong hai hệ qui chiếu ta có

$$\boldsymbol{\omega}^{(0)} = \mathbf{A}\boldsymbol{\omega}^{(1)} = 2\mathbf{G}\mathbf{L}^T\mathbf{L}\dot{\mathbf{p}}$$

Thế (4.58) vào biểu thức trên ta được

$$\boldsymbol{\omega}^{(0)} = 2\mathbf{G}(\mathbf{E}_4 - \mathbf{p}\mathbf{p}^T)\dot{\mathbf{p}} = 2\mathbf{G}\dot{\mathbf{p}} - 2\mathbf{G}\mathbf{p}\mathbf{p}^T\dot{\mathbf{p}}$$

Chú ý đến (4.56) $\mathbf{G}\mathbf{p} = 0$, ta có

$$\boldsymbol{\omega}^{(0)} = 2\mathbf{G}\dot{\mathbf{p}} \quad (4.70)$$

Do tính chất trực giao của các ma trận \mathbf{G} và \mathbf{L} , (các công thức 4.57), nên từ (4.69) và (4.70) ta dễ dàng suy ra các phương trình vi phân động học của các tham số Euler

$$\dot{\mathbf{p}} = \frac{1}{2}\mathbf{L}^T\boldsymbol{\omega}^{(1)}, \quad \dot{\mathbf{p}} = \frac{1}{2}\mathbf{G}^T\boldsymbol{\omega}^{(0)} \quad (4.71)$$

4.5 Các số siêu phức bốn chiều (quaternions)

Các tham số Euler có thể xem như là các số siêu phức bốn chiều (quaternions). Một số siêu phức bốn chiều Q là một số phức mở rộng có bốn thành phần, được xác định nhờ một đơn vị thực e_0 và ba đơn vị ảo là e_1 , e_2 và e_3 (phần thực q_0 , ba phần ảo là q_1, q_2, q_3)

$$Q = q_0 e_0 + q_1 e_1 + q_2 e_2 + q_3 e_3 \quad (4.72)$$

Ta thừa nhận các quy tắc sau về tích các phần tử đơn vị

$$\begin{aligned} e_0 e_0 &= e_0 = 1 \\ e_i e_i &= -e_0 = -1, \quad i = 1, 2, 3 \\ e_i e_0 &= e_0 e_i = e_i, \quad i = 1, 2, 3 \\ e_i e_j &= -e_j e_i, \quad i, j = 1, 2, 3 \text{ với } i \neq j \\ e_i e_{i+1} &= e_{i+2}, \quad i = 1, 2, 3 \text{ (có tính chu trình)} \end{aligned} \quad (4.73)$$

Từ các định nghĩa trên ta suy ra các quy tắc tính toán các số siêu phức bốn chiều như sau

a) Tổng của hai số siêu phức bốn chiều Q và R

$$\begin{aligned} S = Q + R &= (q_0 e_0 + q_1 e_1 + q_2 e_2 + q_3 e_3) + (r_0 e_0 + r_1 e_1 + r_2 e_2 + r_3 e_3) \\ &= (q_0 + r_0) e_0 + (q_1 + r_1) e_1 + (q_2 + r_2) e_2 + (q_3 + r_3) e_3 \\ &= s_0 e_0 + s_1 e_1 + s_2 e_2 + s_3 e_3 \end{aligned} \quad (4.74)$$

b) Tích của hai số siêu phức bốn chiều Q và R

$$\begin{aligned} S = QR &= (q_0 e_0 + q_1 e_1 + q_2 e_2 + q_3 e_3)(r_0 e_0 + r_1 e_1 + r_2 e_2 + r_3 e_3) \\ &= (q_0 r_0 - q_1 r_1 - q_2 r_2 - q_3 r_3) e_0 + (q_0 r_1 + q_1 r_0 + q_2 r_3 - q_3 r_2) e_1 + \\ &\quad (q_0 r_2 + q_2 r_0 + q_3 r_1 - q_1 r_3) e_2 + (q_0 r_3 + q_3 r_0 + q_1 r_2 - q_2 r_1) e_3 \\ &= s_0 e_0 + s_1 e_1 + s_2 e_2 + s_3 e_3 \end{aligned} \quad (4.75)$$

So sánh với phép tính vectơ, mỗi số siêu phức bốn chiều có thể xem như gồm hai phần: phần thực q_0 là “phần vô hướng” của số siêu phức, các phần ảo của q_1, q_2, q_3 được xem như là “phần vectơ” của số siêu phức bốn chiều. Ta có thể viết một cách hình thức

$$Q = q_0 + \mathbf{q} \quad \text{với } \mathbf{q} = [q_1, q_2, q_3]^T \quad (4.76)$$

Với cách viết hình thức này, tích (4.75) có thể viết dưới dạng

$$S = QR = (q_0 + \mathbf{q})(r + \mathbf{r}_0) = (q_0 r_0 - \mathbf{q}^T \mathbf{r}) + (q_0 \mathbf{r} + \mathbf{q} r_0 + \tilde{\mathbf{q}} r) = s_0 + \mathbf{s} \quad (4.77)$$

Do tính chất không giao hoán của tích hữu hướng hai vectơ $\tilde{\mathbf{q}} \mathbf{r} \neq -\tilde{\mathbf{r}} \mathbf{q}$, tích của hai số siêu phức bốn chiều cũng không có tính chất giao hoán $QR \neq RQ$. Cũng tương

tự như các số phức thông thường, ta đưa vào khái niệm số siêu phức bốn chiều liên hợp, được định nghĩa như sau

$$Q = q_0 + \mathbf{q} \Rightarrow \bar{Q} = q_0 - \mathbf{q} \quad (4.78)$$

Các tham số Euler (4.35) có thể viết dưới dạng số siêu phức bốn chiều như sau

$$Q = q_0 + \mathbf{q} = \cos \frac{\varphi}{2} + \mathbf{u} \sin \frac{\varphi}{2} \quad (4.79)$$

Nhờ đó ta có thể biểu diễn sự quay của vectơ \vec{s}_0 sang vectơ \vec{s}_1 bằng tích của các số siêu phức bốn chiều (vectơ \vec{s}_0 xem như một số siêu phức với phần vô hướng bằng không)

$$\mathbf{s}_1 = Q \mathbf{s}_0 \bar{Q} \quad (4.80)$$

Việc tính toán biểu thức (4.80) theo các quy tắc (4.74) và (4.75) dẫn đến biểu thức xác định ma trận cosin chỉ hướng (4.41).

Chúng ta có thể tìm được các phương trình vi phân động học qua đạo hàm của các số siêu phức bốn chiều

$$\dot{Q} = \frac{1}{2} \boldsymbol{\omega}^{(0)} Q; \quad \dot{Q} = \frac{1}{2} Q \boldsymbol{\omega}^{(1)} \quad (4.81)$$

4.6 Các tham số Rodrigues (Rodrigues Parameters)

Trong một số tài liệu, người ta đưa vào vectơ \mathbf{p} định nghĩa như sau

$$\mathbf{p} = \mathbf{u} \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2} = \frac{1}{q_0} \mathbf{q} \quad (4.82)$$

Trong đó \mathbf{u} là véc tơ đại số trong hệ quy chiếu cố định R_0 của vectơ đơn vị \vec{u} trên trục quay, φ là góc mà hệ qui chiếu cố định $Ox_0y_0z_0$ quay sang hệ qui chiếu $Oxyz$ quanh trục quay \vec{u} , q_0, \mathbf{q} là các tham số Euler.

Từ công thức (4.82) ta suy ra

$$p_1 = u_1 \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2} = \frac{q_1}{q_0}, \quad p_2 = u_2 \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2} = \frac{q_2}{q_0}, \quad p_3 = u_3 \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2} = \frac{q_3}{q_0}. \quad (4.83)$$

Ba tham số p_1, p_2, p_3 được gọi là các tham số Rodrigues.

Biến đổi biểu thức ma trận cosin chỉ hướng từ các tham số Euler (4.41) ta sẽ thu được biểu thức ma trận cosin chỉ hướng theo các tham số Rodrigues

$$\mathbf{A} = \mathbf{E}_3 + 2 \frac{\tilde{\mathbf{p}} + \tilde{\mathbf{p}}\tilde{\mathbf{p}}}{1 + \mathbf{p}^T \mathbf{p}}. \quad (4.84)$$

4.7 Các phương án chọn tọa độ suy rộng xác định hướng của vật rắn

Để kết thúc đoạn này, ta hệ thống hoá lại một số phương án chọn các tọa độ suy rộng xác định chuyển động quay của vật rắn quanh một điểm cố định

Các tọa độ suy rộng của ma trận quay	Các điều kiện ràng buộc các tọa độ suy rộng	Ba tọa độ suy rộng độc lập
9 thành phần của ma trận cosin chỉ hướng $\mathbf{A}(t)$	6 điều kiện $\mathbf{A}\mathbf{A}^T = \mathbf{E}$	Thí dụ: $a_{11}(t), a_{12}(t), a_{23}(t)$
4 tham số Euler q_0, \mathbf{q}	1 điều kiện $q_0^2 + \mathbf{q}^T \mathbf{q} = 1$	Thí dụ: $q_0(t), q_1(t), q_2(t)$
4 tham số quay $\mathbf{u}(t), \varphi(t)$	1 điều kiện $\mathbf{u}^T \mathbf{u} = 1$	Thí dụ: $u_1(t), u_2(t), \varphi(t)$
3 góc Euler $\psi(t), \theta(t), \varphi(t)$		$\psi(t), \theta(t), \varphi(t)$
3 góc Cardan $\alpha(t), \beta(t), \gamma(t)$		$\alpha(t), \beta(t), \gamma(t)$
3 góc Roll, Pitch, Yaw $\varphi(t), \theta(t), \psi(t)$		$\varphi(t), \theta(t), \psi(t)$

Chú ý rằng, để xác định vị trí của vật rắn B trong một hệ qui chiếu ta cần sáu tọa độ suy rộng. Ba tọa độ suy rộng xác định vị trí của một điểm định vị của vật rắn, và ba tọa độ xác định hướng của vật rắn.

§5 XÁC ĐỊNH VẬN TỐC, GIA TỐC MỘT ĐIỂM BẤT KỲ THUỘC VẬT RẮN

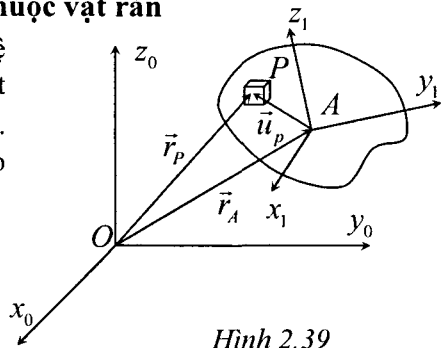
5.1 Xác định vận tốc một điểm bất kỳ thuộc vật rắn

Để xét chuyển động của vật rắn B ở trong hệ qui chiếu $R_0 = Ox_0y_0z_0$, ta lấy một điểm A bất kỳ thuộc vật rắn làm điểm định vị (điểm cực). Dựng hệ qui chiếu $R_1 = Ax_1y_1z_1$ gắn liền vào vật rắn B (hình 2.39).

Vị trí của điểm P được xác định bởi véc tơ sau

$$\vec{r}_P = \vec{r}_A + \vec{u}_P \quad (5.1)$$

Đạo hàm theo thời gian hai vế của phương trình (5.1) ở trong hệ qui chiếu R_0 ta được



Hình 2.39

$$\frac{{}^{R_0}d\vec{r}_P}{dt} = \frac{{}^{R_0}d\vec{r}_A}{dt} + \frac{{}^{R_0}d\vec{u}_P}{dt} \quad (5.2)$$

Theo định nghĩa vận tốc góc của vật rắn ta có

$$\frac{{}^{R_0}d\vec{u}_P}{dt} = {}^R\vec{\omega}^B \times \vec{u}_P = \vec{\omega} \times \vec{u}_P \quad (5.3)$$

Thế (5.3) vào phương trình (5.2) ta được

$$\frac{{}^{R_0}d\vec{r}_P}{dt} = \frac{{}^{R_0}d\vec{r}_A}{dt} + \vec{\omega} \times \vec{u}_P \quad \Rightarrow \vec{v}_P = \vec{v}_A + \vec{\omega} \times \vec{u}_P \quad (5.4)$$

Chiếu phương trình véc tơ (5.4) lên hệ quy chiếu R_0 ta có:

$$\mathbf{v}_P^{(0)} = \mathbf{v}_A^{(0)} + \vec{\omega}^{(0)} \mathbf{u}_P^{(0)} \quad (5.5)$$

Chiếu phương trình véc tơ (5.4) lên hệ quy chiếu R_1 ta được

$$\mathbf{v}_P^{(1)} = \mathbf{v}_A^{(1)} + \vec{\omega}^{(1)} \mathbf{u}_P^{(1)} \quad (5.6)$$

Chú ý rằng: $\mathbf{u}_P^{(0)} = \mathbf{A}\mathbf{u}_P^{(1)}$.

5.2 Xác định gia tốc một điểm bất kỳ thuộc vật rắn

Đạo hàm theo thời gian biểu thức (5.4) ở trong hệ quy chiếu R_0 ta được

$$\frac{{}^{R_0}d\vec{v}_P}{dt} = \frac{{}^{R_0}d\vec{v}_A}{dt} + \frac{{}^{R_0}d\vec{\omega}}{dt} \times \vec{u}_P + \vec{\omega} \times \frac{{}^{R_0}d\vec{u}_P}{dt} \quad (5.7)$$

Từ đó suy ra

$$\vec{a}_P = \vec{a}_A + \vec{\varepsilon} \times \vec{u}_P + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{u}_P) \quad (5.8)$$

Chiếu phương trình véc tơ (5.8) lên hệ quy chiếu R_0 ta có phương trình ma trận

$$\begin{aligned} \mathbf{a}_P^{(0)} &= \mathbf{a}_A^{(0)} + \vec{\varepsilon}^{(0)} \mathbf{u}_P^{(0)} + \vec{\omega}^{(0)} (\vec{\omega}^{(0)} \mathbf{u}_P^{(0)}) \\ \mathbf{a}_P^{(0)} &= \mathbf{a}_A^{(0)} + (\vec{\varepsilon}^{(0)} + \vec{\omega}^{(0)} \vec{\omega}^{(0)}) \mathbf{u}_P^{(0)} \end{aligned} \quad (5.9)$$

Chiếu phương trình véc tơ (5.8) lên hệ quy chiếu R_1 ta được

$$\begin{aligned} \mathbf{a}_P^{(1)} &= \mathbf{a}_A^{(1)} + \vec{\varepsilon}^{(1)} \mathbf{u}_P^{(1)} + \vec{\omega}^{(1)} (\vec{\omega}^{(1)} \mathbf{u}_P^{(1)}) \\ \mathbf{a}_P^{(1)} &= \mathbf{a}_A^{(1)} + (\vec{\varepsilon}^{(1)} + \vec{\omega}^{(1)} \vec{\omega}^{(1)}) \mathbf{u}_P^{(1)} \end{aligned} \quad (5.10)$$

Chương 3

ĐỘNG HỌC HỆ NHIỀU VẬT

Trong chương này ta giới thiệu một số khái niệm cơ bản như cấu trúc cây và cấu trúc mạch vòng của hệ nhiều vật, số bậc tự do và tọa độ suy rộng tối thiểu của hệ nhiều vật, các điều kiện ràng buộc trong hệ nhiều vật có cấu trúc mạch vòng. Sau đó trình bày một số phương pháp tính toán động học hệ nhiều vật: Phương pháp ma trận cosin chỉ hướng, Phương pháp ma trận *Denavit-Hartenberg*, Phương pháp ma trận *Jacobi*, Phương pháp hình chiếu vuông góc v.v...

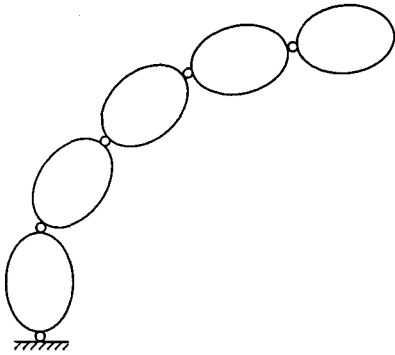
§1 CÁC MỐI QUAN HỆ ĐỘNG HỌC CƠ BẢN CỦA HỆ NHIỀU VẬT

1.1 Sự phân loại các hệ nhiều vật

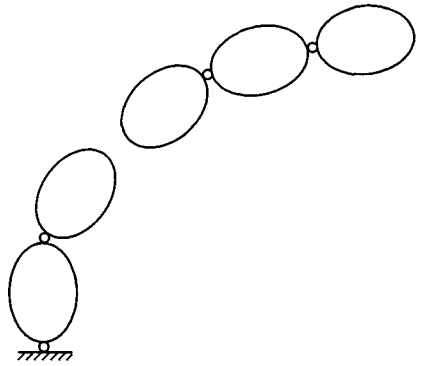
1.1.1 Định nghĩa chuỗi động

Một hệ nhiều vật liên kết với nhau bằng các khớp được gọi là một chuỗi động. Nói cách khác chuỗi động là một hệ nhiều vật chịu liên kết.

Như thế một hệ nhiều vật có thể là một chuỗi động và cũng có thể không phải là một chuỗi động. Trên hình 3.1a là sơ đồ một hệ nhiều vật chịu liên kết (chuỗi động), còn trên hình 3.1b là hệ nhiều vật không chịu liên kết (không phải là chuỗi động). Trong đó các khuyên tròn nhỏ là ký hiệu tượng trưng cho các khớp, còn các hình tựa elip là ký hiệu tượng trưng cho các vật rắn. Trong cuốn sách này ta chỉ nghiên cứu các hệ nhiều vật chịu liên kết. Một hệ nhiều vật chịu liên kết có thể là một chuỗi động và cũng có thể gồm nhiều chuỗi động.



Hình 3.1a. Hệ nhiều vật có liên kết



Hình 3.1b. Hệ nhiều vật không có liên kết

1.1.2 Sự phân loại tô pô

Về phương diện tô pô ta phân chia hệ nhiều vật chịu liên kết (chuỗi động) thành hai loại: Hệ nhiều vật có cấu trúc cây (các chuỗi động hở) và hệ nhiều vật có cấu trúc mạch vòng (các chuỗi động kín).

c) *Định nghĩa cơ cấu*. Cơ cấu là một chuỗi động kín, trong đó có một khâu cố định là giá đỡ.

Như thế cơ cấu là một hệ nhiều vật có cấu trúc mạch vòng.

1.1.3 Sự phân loại động học

Dựa trên đặc điểm chuyển động của các vật thể tạo thành chuỗi động, người ta phân các chuỗi động thành ba nhóm : các chuỗi động phẳng, các chuỗi động cầu, các chuỗi động không gian.

a) Các chuỗi động phẳng (hệ nhiều vật phẳng)

Nếu tất cả các điểm của các vật thể tạo thành chuỗi động đều chuyển động song song với một mặt phẳng quy chiếu thì chuỗi động được gọi là chuỗi động phẳng. Các chuyển động tương đối của các vật thể tại các khớp động hoặc là chuyển động tịnh tiến hoặc là chuyển động quay quanh một trục vuông góc với mặt phẳng quy chiếu.

b) Các chuỗi động cầu (hệ nhiều vật cầu)

Ở các chuỗi động cầu quỹ đạo của mỗi điểm của một vật thể nằm trên một mặt cầu xác định nào đó có tâm là điểm cố định. Mỗi vật thể trong chuỗi động cầu thực hiện ba chuyển động quay quanh các trục giao nhau và không thực hiện chuyển động tịnh tiến.

c) Các chuỗi động không gian (hệ nhiều vật không gian)

Ở các chuỗi động không gian, các vật thể có thể thực hiện các chuyển động không gian tổng quát, bao gồm ba chuyển động quay quanh các trục giao nhau và ba chuyển động tịnh tiến. Chuyển động tương đối của các vật thể ở các khớp động trong trường hợp tổng quát là các chuyển động không gian.

1.2 Các khớp động trong các hệ nhiều vật

1.2.1 Khớp động và bậc tự do của khớp động

Mỗi vật rắn tự do chuyển động trong không gian có 6 bậc tự do. Như thế nếu hai vật rắn không nối ghép với nhau, giữa chúng sẽ có 6 chuyển động tương đối. Khi hai vật rắn nối ghép với nhau bằng một khớp động, tùy theo kết cấu của khớp một số chuyển động tương đối giữa chúng sẽ bị cản trở. Số chuyển động tương đối giữa hai vật rắn bị hạn chế do nối khớp với nhau được gọi là số ràng buộc của khớp động. Trên cơ sở khái niệm số ràng buộc chuyển động tương đối giữa hai khâu nối khớp ta đưa ra công thức định nghĩa số bậc tự do của khớp động như sau

$$f_{ji} = 6 - r_i$$

Trong đó r_i là số ràng buộc chuyển động của khớp thứ i còn f_{ji} là bậc tự do của khớp thứ i . Thí dụ khớp động một bậc tự do là khớp nối hai vật rắn, chúng chỉ có thể thực hiện một chuyển động quay tương đối (hoặc chuyển động tịnh tiến tương đối) đối với nhau.

Vị trí tương đối của hai vật thể nối với nhau bằng một khớp có thể mô tả qua các tọa độ khớp β_i . Các tọa độ khớp thường là các góc quay $\beta_i = \theta_i$ hoặc các dịch chuyển dài $\beta_i = s_i$.

Khớp tổng quát là khớp đỉnh ốc (Helical). Các loại khớp khác như khớp quay (Revolute) bước $h=0$, khớp tịnh tiến (Prismatic) bước $h = \infty$ có thể xem là các trường hợp đặc biệt của khớp đỉnh ốc (hình 3.3). Khớp quay và khớp tịnh tiến được xem là hai loại khớp cơ bản.

Các khớp có số bậc tự do lớn hơn một là các khớp trụ (Cylindrical), khớp Cardan, khớp cầu (Spherical) và khớp phẳng (Eben). Các khớp này có thể xem như tổng hợp từ hai loại khớp cơ bản là khớp quay và khớp tịnh tiến (hình 3.4).

1.2.2 Sự phân loại các khớp động trong lý thuyết cơ cấu

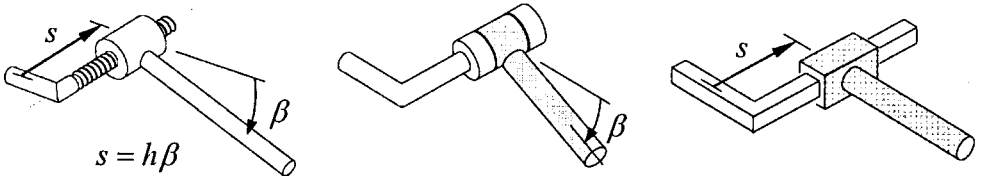
Trong lý thuyết cơ cấu người ta phân loại các khớp thành các khớp bậc thấp (lower pairs) hoặc còn gọi là các khớp chuẩn và các khớp bậc cao (higher pairs) hoặc các khớp phức tạp.

a) Các khớp bậc thấp

Các khớp bậc thấp là các khớp có tiếp xúc mặt. Người ta phân ra sáu loại khớp bậc thấp (khớp chuẩn) như sau :

Tên khớp		Mặt tiếp xúc
Khớp quay	(R)	Mặt tròn xoay
Khớp tịnh tiến	(P)	Mặt bao của hình lăng trụ
Khớp trụ	(C)	Mặt bao hình trụ
Khớp cầu	(S)	Mặt cầu
Khớp phẳng	(E)	Mặt phẳng

Trên các hình 3.3 và 3.4 giới thiệu một số loại khớp bậc thấp.

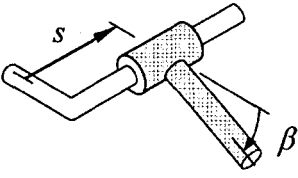
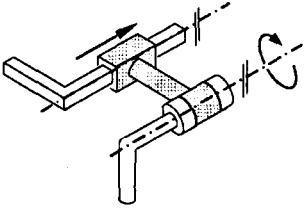
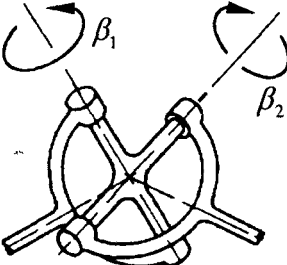
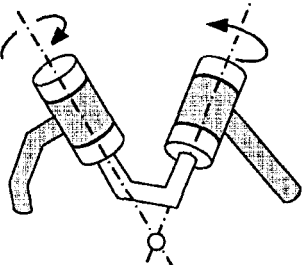
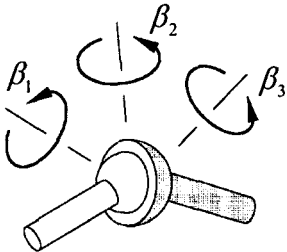
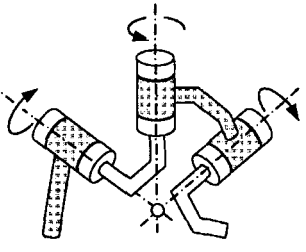
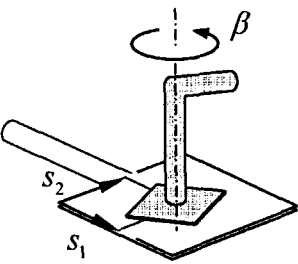
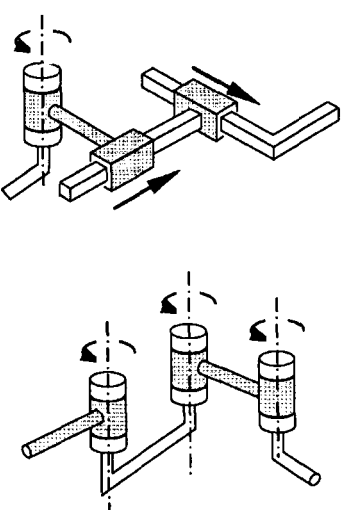


Khớp đỉnh ốc $s = h\beta$

Khớp quay ($h = 0$)

Khớp tịnh tiến ($h = \infty$)

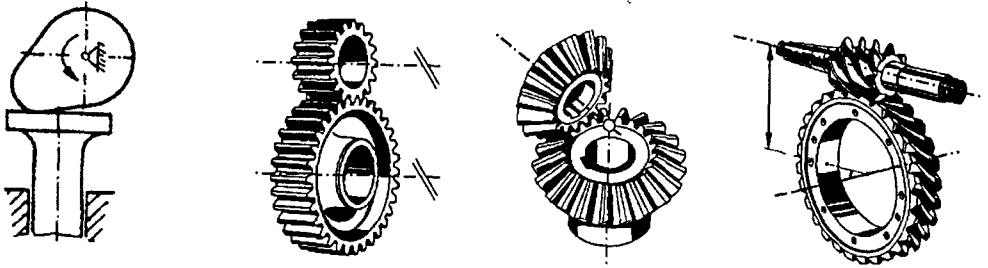
Hình 3.3. Các khớp có bậc tự do bằng một ($f_j = 1$)

<p>Khớp trụ</p> <p>$f_j = 2$</p>		
<p>Khớp Cardan</p> <p>$f_j = 2$</p>		
<p>Khớp cầu</p> <p>$f_j = 3$</p>		
<p>Khớp phẳng</p> <p>$f_j = 3$</p>		

Hình 3.4. Các khớp có bậc tự do lớn hơn một ($f_j > 1$)

b) Các khớp bậc cao

Các khớp bậc cao (hoặc còn gọi là các khớp phức hợp) là các khớp tiếp xúc đường hoặc điểm. Trên hình 3.5 giới thiệu một số loại khớp bậc cao.



Hình 3.5. Một số cơ cấu có khớp bậc cao

1.3 Số bậc tự do và các tọa độ suy rộng của hệ nhiều vật

1.3.1 Hệ nhiều vật hólônôm và hệ nhiều vật phi hólônôm

Về mặt cơ học mỗi hệ nhiều vật là một hệ cơ học. Các hệ nhiều vật được phân thành các cơ hệ tự do và cơ hệ không tự do. Các hệ nhiều vật tự do là các cơ hệ mà vị trí và vận tốc (bao gồm vận tốc góc và vận tốc một điểm qui chiếu của vật rắn) của các vật rắn thuộc hệ có thể nhận các giá trị tùy ý. Ngược lại hệ nhiều vật được gọi là không tự do (hoặc hệ nhiều vật chịu liên kết). Trong kỹ thuật ta thường gặp các hệ nhiều vật chịu liên kết.

Các cơ hệ nhiều vật chịu liên kết được phân thành cơ hệ chỉ chịu các liên kết hình học (hay còn gọi là các liên kết hólônôm) và các cơ hệ, ngoài các liên kết hình học, còn chịu các liên kết động học không khả tích (còn gọi là các liên kết phi hólônôm). Các hệ nhiều vật chỉ chịu các liên kết hình học được gọi là hệ nhiều vật hólônôm, các hệ nhiều vật, ngoài các liên kết hình học, còn chịu các liên kết động học không khả tích được gọi là các hệ nhiều vật phi hólônôm.

Trong chương này ta giới hạn chỉ xét các hệ nhiều vật hólônôm. Các hệ nhiều vật phi hólônôm sẽ được bàn đến trong chương năm. Đối với các hệ nhiều vật hólônôm việc xác định số bậc tự do và các tọa độ suy rộng tương đối đơn giản.

1.3.2 Số bậc tự do của một cơ cấu

Xét một cơ cấu không gian bất kỳ. Ta đưa vào các ký hiệu:

p : số lượng các khâu động của cơ cấu (không kể khâu cố định),

n_j : số lượng các khớp trong cơ cấu,

f_{j_i} : bậc tự do của khớp động thứ i .

Định lý Grübler: Số bậc tự do của một cơ cấu không gian gồm p khâu động và n_j khớp động có các bậc tự do tương ứng là f_{j_i} ($i=1, 2, \dots, n_j$) được xác định bởi công thức

$$f = 6p - \sum_{i=1}^{n_j} (6 - f_{ji}) - I = 6(p - n_j) + \sum_{i=1}^{n_j} f_{ji} - f_{th} \quad (1.3)$$

Trong đó f_{th} là số bậc tự do thừa của cơ cấu.

Chứng minh. Để tránh dài dòng, ta chỉ nêu ý tưởng của chứng minh. Trong mỗi cơ cấu có một khâu cố định được gọi là giá đỡ và p khâu động. Trong không gian có thể có tối đa $6p$ chuyển động riêng. Tuy nhiên các khâu được nối ghép với nhau bởi n_j khớp động. Mỗi khớp làm giảm bậc tự do tại đó từ 6 xuống $6 - f_{ji}$. Do đó mỗi khớp làm giảm số bậc tự do của hệ từ $6p$ xuống $6 - f_{ji}$. Vì vậy ta có

$$f = 6p - \sum_{i=1}^{n_j} (6 - f_{ji}) = 6(p - n_j) + \sum_{i=1}^{n_j} f_{ji}$$

Mặt khác mỗi khâu của cơ cấu có thể có những chuyển động, mà nó không làm thay đổi vị trí của cơ cấu. Số bậc tự do ứng với các chuyển động này được gọi là các bậc tự do thừa. Nếu ký hiệu tổng các bậc tự do thừa của mỗi cơ cấu là f_{th} thì công thức thức xác định số bậc tự do của cơ cấu có dạng như công thức (1.3).

Nếu gọi n_L là số vòng động học trong một cơ cấu, theo công thức (1.2) ta có

$$n_L = n_j - p$$

Thế biểu thức này vào công thức (1.3) ta được

$$f = \sum_{i=1}^{n_j} f_{ji} - 6n_L - f_{th} \quad (1.4)$$

Trong lý thuyết cơ cấu, công thức (1.3) hoặc (1.4) được gọi là tiêu chuẩn Grübler. Tiêu chuẩn này thường được dùng để xác định số bậc tự do của cơ cấu.

Người ta thường phân biệt các trường hợp sau:

$f \geq 1$: cơ cấu (cơ hệ có ràng buộc),

$f = 0$: kết cấu tĩnh định,

$f < 0$: kết cấu siêu tĩnh.

Chú ý rằng các công thức (1.3) và (1.4) cho kết quả sai đối với các kết cấu siêu tĩnh. Từ các công thức (1.3) và (1.4) ta suy ra các công thức xác định số bậc tự do của cơ cấu cầu và cơ cấu phẳng.

$$f = 3(p - n_j) + \sum_{i=1}^{n_j} f_{ji} \quad (1.5)$$

$$f = \sum_{i=1}^{n_j} f_{ji} - 3n_L \quad (1.6)$$

Thí dụ 3.1. Xác định số bậc tự do của cơ cấu bốn khâu phẳng như hình vẽ 3.6.

Lời giải. Trong thí dụ này ta có $p = 3$, $n_L = 1$, $n_j = 4$, $f_{j1} = f_{j2} = f_{j3} = f_{j4} = 1$; Theo công thức (1.5) hoặc (1.6) ta dễ dàng xác định được số bậc tự do của cơ cấu này

$$f = 3(3-4) + 4 = 1.$$



Hình 3.6

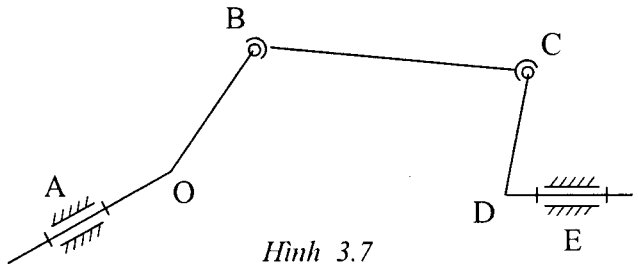
Vậy cơ cấu bốn khâu phẳng có một bậc tự do.

Thí dụ 3.2. Cho cơ cấu bốn khâu không gian như hình 3.7. Hãy xác định số bậc tự do của cơ cấu này.

Lời giải. Số khâu động là $p = 3$, số khớp động là $n_j = 4$, số vòng động học $n_L = 1$.

Trong cơ cấu này có hai khớp cầu (bậc tự do của mỗi khớp là 3) và hai khớp quay O và D (bậc tự do của mỗi khớp là 1). Theo công thức (1.4) ta có

$$f = 6(3-4) + 8 = 2$$



Hình 3.7

Trong cơ cấu này có một bậc tự do thừa (phép quay tương đối của khâu BC quanh trục BC). Do đó ta có số bậc tự do dẫn động của cơ cấu là 1.

1.3.3 Các tọa độ suy rộng

a) Khái niệm tọa độ suy rộng

Như đã biết trong các giáo trình về Cơ học giải tích hoặc Cơ học kỹ thuật, vị trí của một hình phẳng (vật rắn phẳng) được xác định bởi ba tọa độ, vị trí của một vật rắn không gian được xác định bởi sáu tọa độ. Nếu một hệ nhiều vật gồm p vật rắn không gian và giữa chúng có r điều kiện ràng buộc hình học (và giả thiết hệ chỉ có ràng buộc hình học) thì số bậc tự do của hệ là $f = 6p - r$. Để xác định vị trí của một hệ nhiều vật đối với một hệ quy chiếu nào đó ta cần phải sử dụng các tham số định vị. Các tham số dùng để xác định vị trí của một cơ hệ đối với một hệ quy chiếu được gọi là các tọa độ suy rộng. Trong cuốn sách này, ta ký hiệu các tọa độ suy rộng bằng q_1, q_2, \dots, q_n (hoặc bằng s_1, s_2, \dots, s_n). Thông thường các tọa độ suy rộng là các góc quay hoặc các độ dài. Có nhiều cách khác nhau chọn các tọa độ suy rộng. Trong thí dụ 3.3 ta đưa ra vài khả năng khác nhau lựa chọn các tọa độ suy rộng trong một hệ nhiều vật.

b) Các tọa độ suy rộng đủ và các tọa độ suy rộng có dư

Số tọa độ suy rộng độc lập ít nhất đủ để xác định vị trí của một hệ hêlônôm được gọi là các tọa độ suy rộng đủ. Như thế đối với hệ hêlônôm số các tọa độ suy rộng

đủ bằng số bậc tự do của cơ hệ. Đối với cơ hệ hêlônôm có f bậc tự do, ta ký hiệu các tọa độ suy rộng đủ bằng q_1, q_2, \dots, q_f .

Trong một số tài liệu người ta gọi các tọa độ suy rộng đủ là các *tọa độ tối thiểu*.

Đối với hệ nhiều vật có cấu trúc cây người ta thường sử dụng các tọa độ tối thiểu q_i để xác định vị trí của cơ hệ. Đối với hệ nhiều vật hêlônôm có cấu trúc mạch vòng người ta có thể sử dụng một trong hai cách sau để xác định vị trí của cơ hệ:

- Sử dụng các tọa độ suy rộng tối thiểu q_1, q_2, \dots, q_f . Số lượng các tọa độ này đúng bằng số bậc tự do của hệ.
- Sử dụng các tọa độ suy rộng có dư. Trong trường hợp này số lượng các tọa độ suy rộng lớn hơn số bậc tự do của hệ.

Nếu ta sử dụng n tọa độ suy rộng có dư ($n > f$) để xác định vị trí của cơ hệ, thì có $r = n - f$ tọa độ suy rộng phụ thuộc và f tọa độ suy rộng độc lập. Nếu cần phân biệt rõ tọa độ suy rộng độc lập và tọa độ suy rộng phụ thuộc thì ta sử dụng các kí hiệu sau :

q_1, q_2, \dots, q_f là các tọa độ suy rộng độc lập,

z_1, z_2, \dots, z_r là các tọa độ suy rộng phụ thuộc.

Nhiều khi để dễ phân biệt, ta dùng s_i ($i=1, \dots, n$) để chỉ các tọa độ suy rộng có dư. Ta ký hiệu

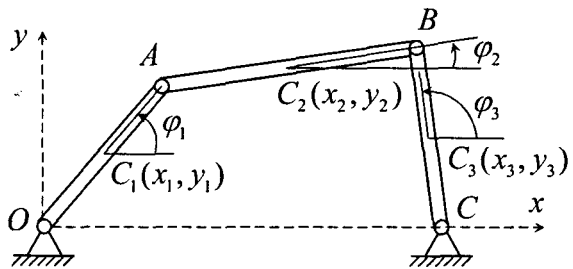
$$\mathbf{s} = [s_1, \dots, s_n]^T, \quad \mathbf{q} = [q_1, \dots, q_f]^T, \quad \mathbf{z} = [z_1, \dots, z_r]^T \quad (1.7)$$

$$\mathbf{s} = \begin{bmatrix} \mathbf{q} \\ \mathbf{z} \end{bmatrix} \quad (1.8)$$

Chú ý. Trong trường hợp không cần phân biệt tọa độ suy rộng độc lập và tọa độ suy rộng phụ thuộc ta có thể sử dụng q_i ($i=1, \dots, n$) làm các tọa độ suy rộng dư cho phù hợp với các kí hiệu đã quen dùng trước đây trong các giáo trình Cơ học kỹ thuật hoặc Cơ học giải tích.

Thí dụ 3.3. Cho cơ cấu bốn khâu phẳng như hình vẽ (hình 3.8). Hãy trình bày một vài phương án lựa chọn tọa độ suy rộng để xác định vị trí của cơ cấu này.

Lời giải. Ta trình bày ba phương án lựa chọn tọa độ suy rộng xác định vị trí của cơ cấu bốn khâu như hình vẽ.



Hình 3.8. Cơ cấu bốn khâu phẳng

a) Hệ nhiều vật có cấu trúc cây (các chuỗi động hở)

Ở các hệ nhiều vật có cấu trúc cây, con đường đi từ một vật thể này sang một vật thể khác bất kỳ được xác định một cách duy nhất. Như thế ứng với mỗi vật thể, ta có thể xác định một cách duy nhất khớp trước nó và vật thể trước nó. Nếu ta chọn một vật thể nào đó làm vật thể quy chiếu của chuỗi động và ký hiệu n_j là số khớp động, p là số vật thể động (không kể vật thể quy chiếu), ta có công thức :

$$n_j = p \quad (1.1)$$

b) Hệ nhiều vật có cấu trúc mạch vòng (các chuỗi động kín)

Nếu ta thêm vào chuỗi động hở một khớp phụ, ta sẽ được một chuỗi động kín hay một mạch vòng độc lập. Từ phương trình (1.1) ta suy ra hệ thức xác định số lượng các mạch vòng độc lập, ký hiệu là n_L , của một chuỗi động kín

$$n_L = n_j - p \quad (1.2)$$

Các chuỗi động kín được phân thành các chuỗi động kín toàn phần và các chuỗi động kín từng phần.

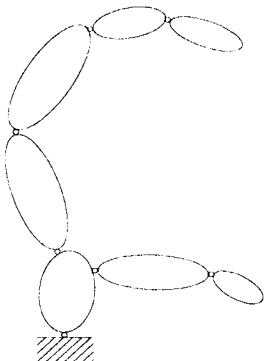
Một hệ nhiều vật có cấu trúc mạch vòng tạo thành một chuỗi động kín từng phần nếu có một trong hai đặc điểm sau:

- Có một hoặc vài hệ con là chuỗi động hở,
- Các hệ con là chuỗi động kín, nhưng lại ghép nối với nhau không kín.

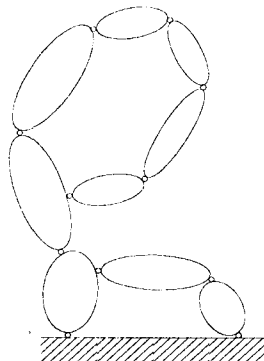
Một hệ nhiều vật có cấu trúc mạch vòng tạo thành một chuỗi động kín hoàn toàn nếu như thoả mãn cả hai điều kiện sau:

- Mỗi vật thể là một phần tử của một mạch vòng,
- Mỗi mạch vòng có ít nhất một vật thể nối với mạch vòng khác.

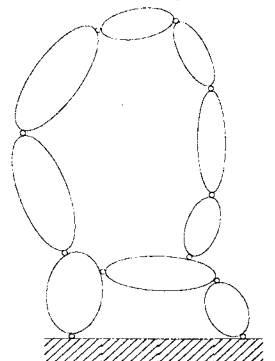
Trên các hình 3.2a, 3.2b và 3.2c là các sơ đồ biểu diễn các loại chuỗi động. Hình 3.2a là chuỗi động hở, hình 3.2b là chuỗi động kín từng phần, hình 3.2c là chuỗi động kín toàn phần.



Hình 3.2a



Hình 3.2b



Hình 3.2c

a) Phương án một

Cơ cấu khảo sát gồm ba khâu động. Mỗi khâu là một vật rắn phẳng. Vì vậy ta có thể chọn chín toạ độ sau làm các toạ độ suy rộng.

$$\mathbf{q} = [x_1, y_1, \varphi_1, x_2, y_2, \varphi_2, x_3, y_3, \varphi_3]^T \quad (1)$$

Chín toạ độ ta chọn tuy xác định được vị trí của cơ cấu, nhưng không độc lập nhau. Ta có tám điều kiện ràng buộc như sau.

Vị trí của khối tâm C_1

$$x_1 = \frac{l_1}{2} \cos(\varphi_1), \quad y_1 = \frac{l_1}{2} \sin(\varphi_1) \quad (2)$$

Vị trí khối tâm C_2

$$x_2 = l_1 \cos(\varphi_1) + \frac{l_2}{2} \cos(\varphi_2) \quad (3)$$

$$y_2 = l_1 \sin(\varphi_1) + \frac{l_2}{2} \sin(\varphi_2)$$

Vị trí khối tâm C_3

$$x_3 = l_1 \cos(\varphi_1) + l_2 \cos(\varphi_2) + \frac{l_3}{2} \cos(\varphi_3) \quad (4)$$

$$y_3 = l_1 \sin(\varphi_1) + l_2 \sin(\varphi_2) + \frac{l_3}{2} \sin(\varphi_3)$$

Ngoài ra do các khâu OA, AB, BC nối với nhau và nối với giá đỡ bằng các bản lề nên ta có hai phương trình ràng buộc chuyển động của cá khâu:

$$l_1 \cos(\varphi_1) + l_2 \cos(\varphi_2) - l_3 \cos(\varphi_3) - l_0 = 0 \quad (5)$$

$$l_1 \sin(\varphi_1) + l_2 \sin(\varphi_2) - l_3 \sin(\varphi_3) = 0 \quad (6)$$

Trong các phương trình trên ta kí hiệu $l_1 = |OA|$, $l_2 = |AB|$, $l_3 = |BC|$, $l_0 = |OC|$. Như thế chín toạ độ (1) bị ràng buộc bởi tám phương trình (2), (3), (4), (5), (6).

b) Phương án hai

Ta chọn toạ độ suy rộng tối thiểu là góc φ_1 . Với cách chọn $\mathbf{q} = \varphi_1$, ta hoàn toàn xác định được vị trí của cơ cấu bốn khâu OABC. Biết góc quay φ_1 , ta xác định được vị trí của điểm A. Lấy A làm tâm vẽ một cung tròn bán kính l_2 , lấy C làm tâm vẽ một cung tròn bán kính l_3 , giao của hai cung tròn này xác định vị trí của điểm B.

c) Phương án ba

Chọn các góc $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ làm ba toạ độ suy rộng

$$\mathbf{q} = [\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3]^T \quad (7)$$

Khi đó giữa ba tọa độ suy rộng này ta có hai phương trình ràng buộc (5) và (6).

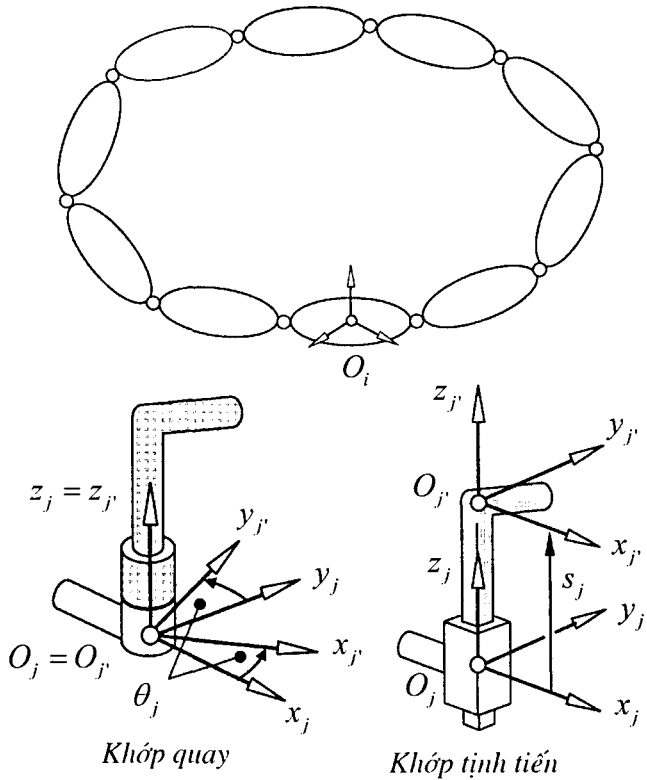
Trong giáo trình Cơ học kỹ thuật ta đã biết: số bậc tự do của một hệ holoônôm bằng số tọa độ suy rộng độc lập đủ để xác định vị trí của hệ. Trong cơ cấu bốn khâu ta chỉ cần một tọa độ suy rộng độc lập đủ để xác định vị trí của cơ cấu. Do đó cơ cấu bốn khâu phẳng có một bậc tự do.

1.4 Các điều kiện ràng buộc trong hệ nhiều vật có cấu trúc mạch vòng

Khi nghiên cứu động học hệ nhiều vật có cấu trúc mạch vòng, người ta thường sử dụng các tọa độ suy rộng dư s_i ($i=1, \dots, n$) để xác định vị trí của cơ hệ. Khi đó sẽ xuất hiện các điều kiện ràng buộc chuyển động của các vật rắn trong một cơ hệ nhiều vật. Các điều kiện ràng buộc này được mô tả bởi các phương trình liên kết. Số lượng các phương trình liên kết bằng số lượng các tọa độ suy rộng phụ thuộc.

1.4.1 Các điều kiện ràng buộc trong một mạch vòng

Ta xét một mạch vòng gồm p vật rắn nối với nhau bằng các khớp động. Để đơn giản ta xét các mạch vòng mà các vật rắn nối với nhau bằng các khớp quay (khớp R) và khớp tịnh tiến (khớp P). Các khớp nhiều bậc tự do có thể biến đổi về các khớp quay và khớp tịnh tiến bằng cách sắp xếp thích hợp (xem hình 3.4). Ta kí hiệu các tọa độ khớp bằng các chữ cái s_i . Trên hình 3.9 $s_i = \theta_i$ (đối với khớp quay), $s_i = d_i$ (đối với khớp tịnh tiến).



Hình 3.9

Khác với chuỗi động hở, các tọa độ khớp trong một mạch vòng không phải là các tọa độ suy rộng độc lập. Nếu như ta tưởng tượng tách đôi một mạch vòng bằng một mặt cắt tại một vật rắn nào đó thuộc mạch vòng, thì ta sẽ nhận được một chuỗi động hở và sáu điều kiện ràng buộc các tọa độ khớp.

Các điều kiện ràng buộc này thường được biểu hiện dưới dạng các phương trình liên kết hình học. Từ sáu điều kiện này ta suy ra : Trong mỗi mạch vòng không gian ta có thể biểu diễn tối đa sáu tọa độ khớp qua các tọa độ khớp còn lại. Trong số n tọa độ khớp của một mạch vòng s_i ($i=1, \dots, n$) ta phân ra : sáu tọa độ khớp phụ thuộc kí hiệu là (z_1, \dots, z_6) và $n-6$ tọa độ khớp độc lập, kí hiệu là q_1, \dots, q_f .

Nếu ta đưa vào các kí hiệu vectơ đại số

$$\mathbf{s} = [s_1, \dots, s_n]^T, \quad \mathbf{q} = [q_1, \dots, q_f]^T, \quad \mathbf{z} = [z_1, \dots, z_6]^T \quad (1.9)$$

thì ta có hệ thức

$$\mathbf{s} = \begin{bmatrix} \mathbf{q} \\ \mathbf{z} \end{bmatrix} \quad (1.10)$$

Chú ý. Các tọa độ khớp độc lập còn được gọi là các tọa độ khớp tối thiểu của một mạch vòng.

Giả sử các điều kiện ràng buộc có dạng

$$f_i(q_1, \dots, q_f, z_1, \dots, z_r) = 0, \quad (i=1, \dots, r) \quad \text{hay} \quad \mathbf{f}(\mathbf{z}, \mathbf{q}) = \mathbf{0} \quad (1.11)$$

Nếu từ các biểu thức (1.11) ta giải ra được

$$z_i = z_i(q_1, \dots, q_f) \quad (1.12)$$

thì biểu thức (1.10) có dạng

$$\mathbf{s} = \begin{bmatrix} \mathbf{q} \\ \mathbf{z}(\mathbf{q}) \end{bmatrix} \quad (1.13)$$

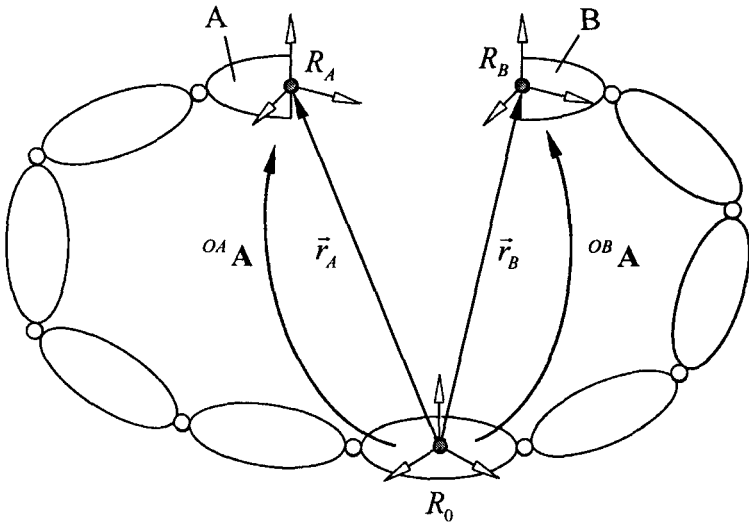
Nếu ta tìm được các biểu thức (1.13) bằng phương pháp giải tích thì việc phân tích động học hệ nhiều vật có cấu trúc mạch vòng sẽ rất thuận tiện. Việc tính toán sẽ tiết kiệm được rất nhiều thời gian và có khả năng cho ta biết tất cả các nghiệm \mathbf{z} của hệ phương trình đại số phi tuyến (1.11). Nếu không tìm được quan hệ $\mathbf{z} = \mathbf{z}(\mathbf{q})$ bằng phương pháp giải tích, ta buộc phải tìm $\mathbf{z}(\mathbf{q})$ bằng phương pháp số. Khi tính toán bằng số (chẳng hạn sử dụng phương pháp Newton-Raphson) ta thường chỉ có thể tìm được một nghiệm gần đúng với giá trị đầu đã chọn trước. Trong các bài toán kỹ thuật, việc tính toán bằng số, nói chung, cũng đạt được yêu cầu mong muốn.

Chú ý. Trong một mạch vòng phẳng ta có thể thiết lập tối đa ba phương trình liên kết.

1.4.2 Thiết lập các phương trình liên kết

Ta có thể tách một mạch vòng tại một mặt cắt hoặc bằng cách tách khớp. Khi đó ta biến một mạch vòng thành một chuỗi động hờ.

a) Phương pháp mặt cắt



Hình 3.10

Một mạch vòng có thể chuyển thành một chuỗi động hồ bằng một mặt cắt tại một vật rắn nào đó của mạch vòng (hình 3.10). Ta gọi hai nửa của vật rắn bị tương tự tách đôi là phần A và phần B.

Ta gắn chặt vào phần A hệ tọa độ $R_A = (Oxyz)_A$, vào phần B hệ tọa độ $R_B = (Oxyz)_B$. Các điều kiện ràng buộc được thiết lập từ các điều kiện tương thích: Hai nửa A và B của vật rắn phải có cùng vectơ định vị xác định điểm O_A và O_B và phải có cùng ma trận côsin chỉ hướng. Các yêu cầu đó được thể hiện bằng các hệ sau (hình 3.10)

$$\vec{r}_A = \vec{r}_B \quad (1.14)$$

$${}^{OA}A = {}^{OB}A \quad (1.15)$$

Trong đó \vec{r}_A vectơ định vị điểm O_A , \vec{r}_B vectơ định vị điểm O_B , ${}^{OA}A$ là ma trận côsin chỉ hướng hệ quy chiếu $R_A = (Oxyz)_A$ đối với hệ quy chiếu quán tính R_0 , còn ${}^{OB}A$ là ma trận côsin chỉ hướng của hệ quy chiếu $R_B = (Oxyz)_B$ đối với hệ quy chiếu quán tính R_0 .

Phương trình vectơ (1.14) tương đương với ba phương trình vô hướng ràng buộc các tọa độ suy rộng. Phương trình ma trận (1.15) tương đương với chín phương trình vô hướng. Tuy nhiên trong chín phương trình đó chỉ có ba phương trình độc lập. Như thế từ các phương trình (1.14) và (1.15) ta nhận được sáu phương trình liên kết:

$$f_i(q_1, \dots, q_f, z_1, \dots, z_6) = 0 \quad (i = 1, \dots, 6) \quad (1.16)$$

Chú ý. Khi tách đôi vật rắn bởi một mặt cắt như hình (3.10) từ một vật rắn ta tạo thành hai vật rắn mới. Như thế hệ ban đầu có p vật rắn trở thành hệ có p+1 vật rắn. Vì vậy cần phải có thêm ba tọa độ suy rộng để xác định hướng của vật rắn mới hình thành. Do đó nếu ta vẫn sử dụng các tọa độ góc, thí dụ các góc Euler, chung cho cả hai nửa vật rắn, thì ta chỉ còn lại ba phương trình liên kết (1.14).

Về phương diện vận tốc và gia tốc ta có các điều kiện ràng buộc sau:

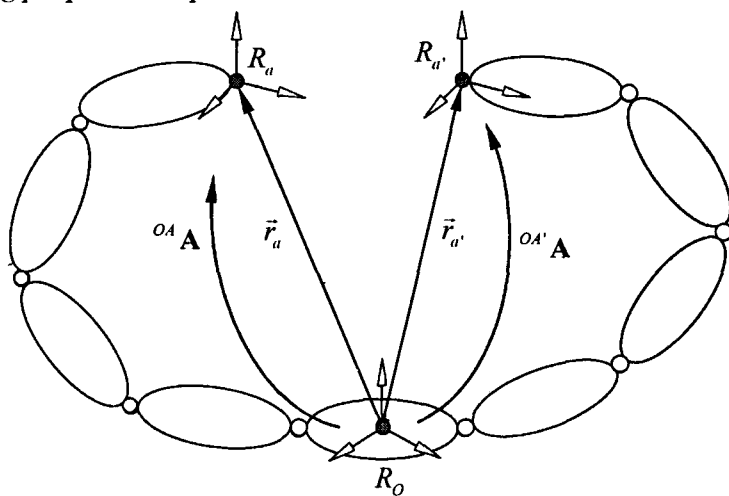
$$\begin{bmatrix} {}^{R_0} \omega^A \\ {}^{R_0} \mathbf{v}_A \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} {}^{R_0} \omega^B \\ {}^{R_0} \mathbf{v}_B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} {}^{R_0} \varepsilon^A \\ {}^{R_0} \mathbf{a}_A \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} {}^{R_0} \varepsilon^B \\ {}^{R_0} \mathbf{a}_B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad (1.17)$$

Trong đó để cho gọn ta kí hiệu

$${}^{R_0} \mathbf{v}_A = \mathbf{v}_{O_A}, \quad {}^{R_0} \mathbf{v}_B = \mathbf{v}_{O_B} \quad (1.18)$$

Như đã biết, vận tốc góc, gia tốc góc, vận tốc góc tọa độ, gia tốc góc tọa độ của các hệ quy chiếu $R_A = (Oxyz)_A$ và $R_B = (Oxyz)_B$ là các hàm của các tọa độ suy rộng. Một nhược điểm của phương pháp mặt cắt là việc xác định giải tích các tọa độ phụ thuộc z rất khó khăn, bởi vì tất cả các tọa độ phụ thuộc z đều có mặt trong sáu phương trình liên kết (1.11) (1.12).

b) Phương pháp tách khớp



Hình 3.11

Một mạch vòng trở thành một chuỗi động hờ nếu ta tách ra tại một khớp nào đó (hình 3.11). Trong hình vẽ ta gắn hệ quy chiếu $R_a = Ax_a y_a z_a$ vào phần bên trái của khớp bị tách và gắn hệ quy chiếu $R_{a'} = A'x_{a'} y_{a'} z_{a'}$ vào phần bên phải của khớp bị tách. Do khớp có bậc tự do nên hai hệ qui chiếu này khác nhau.

Giả sử số bậc tự do của khớp được tách là f_{Ja} . Khi đó các tọa độ phụ thuộc z được phân thành hai nhóm:

$$\mathbf{z} = \begin{bmatrix} \mathbf{z}_I \\ \mathbf{z}_{II} \end{bmatrix}$$

Trong đó $\mathbf{z}_I : (6 - f_{Ja})$ tọa độ khớp tại các khớp không tách,

$\mathbf{z}_{II} : f_{Ja}$ tọa độ khớp tại khớp tách.

Khác với phương pháp mặt cắt, ở đây ta chỉ cần phải giải hệ $6 - f_{Ja}$ phương trình liên kết (các phương trình đại số phi tuyến). Dạng các phương trình này phụ thuộc vào dạng của khớp tách (xem hình 3.13). Hệ các phương trình liên kết (1.11) được phân thành hai hệ con :

$$\mathbf{f}_I(\mathbf{z}_I, \mathbf{q}) = 0, \quad 6 - f_{Ja} \text{ phương trình} \quad (1.18)$$

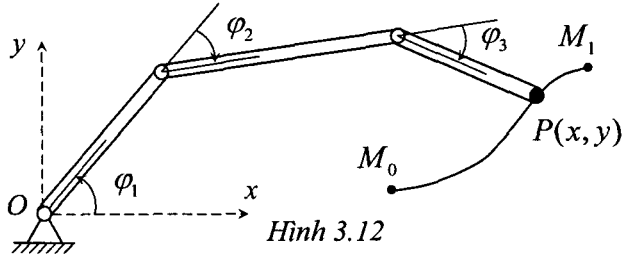
$$\mathbf{f}_{II}(\mathbf{z}_I, \mathbf{z}_{II}, \mathbf{q}) = 0, \quad f_{Ja} \text{ phương trình} \quad (1.19)$$

Hệ $6 - f_{Ja}$ phương trình phi tuyến (1.18) chứa $6 - f_{Ja}$ ẩn là các tọa độ phụ thuộc \mathbf{z}_I . Sau khi đã biết \mathbf{z}_I , ta xác định được \mathbf{z}_{II} ẩn từ các phương trình (1.19).

Ưu điểm của phương pháp tách khớp là số lượng các phương trình liên kết giảm từ 6 phương trình xuống còn $6 - f_{Ja}$ phương trình. Nhược điểm của phương pháp này là việc thiết lập các điều kiện ràng buộc phụ thuộc vào dạng của khớp tách, nên đôi khi khá phức tạp.

1.4.3 Các thí dụ áp dụng

Thí dụ 3.4. Xét mô hình rôbốt phẳng 3 khâu mà đầu P của nó chuyển động trên một đường cong cho trước như hình 3.12.



Hình 3.12

Kí hiệu (x_p, y_p) là tọa độ của điểm P trong hệ tọa độ Oxy. Giả sử phương trình của đường cong C có thể biểu diễn dưới dạng

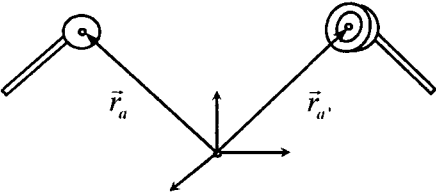
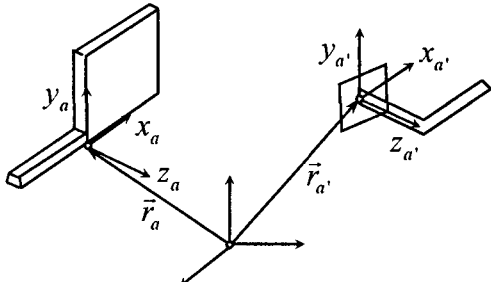
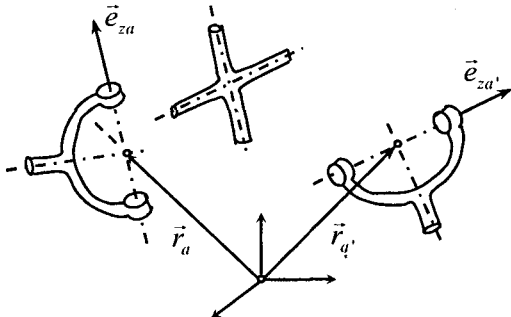
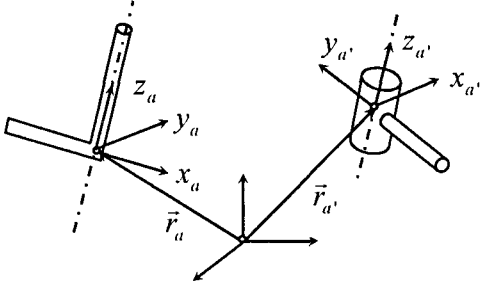
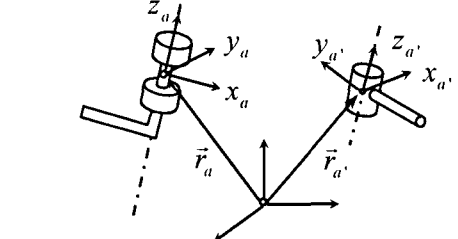
$$x_p = x_p(t), \quad y_p = y_p(t) \quad (1)$$

Trong đó t là tham số. Để đơn giản, giả thiết $l_1 = l_2 = l_3 = l$. Khi đó các phương trình liên kết có dạng

$$l[\sin \varphi_1 + \sin(\varphi_1 + \varphi_2) + \sin(\varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3)] = x_p(t) \quad (2)$$

$$-l[\cos \varphi_1 + \cos(\varphi_1 + \varphi_2) + \cos(\varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3)] = y_p(t) \quad (3)$$

Các phương trình (2) và (3) là các phương trình có dạng như phương trình (1.18). Chúng là các phương trình liên kết holoônôm. Nếu cố định P, $x_p = \text{const}$, $y_p = \text{const}$ thì rôbốt 3 khâu biến thành cơ cấu bốn khâu quen thuộc.

<p>Khớp cầu</p> <p>$f_J = 3$</p>		<p>Các điều kiện ràng buộc</p> <p>$\mathbf{r}_{a'} - \mathbf{r}_a = 0$</p>
<p>Khớp phẳng</p> <p>$f_J = 3$</p>		<p>$(\mathbf{r}_{a'} - \mathbf{r}_a)^T \mathbf{e}_{z_a} = 0$</p> <p>$\mathbf{e}_{z_a}^T \mathbf{e}_{x_a} = 0$</p> <p>$\mathbf{e}_{z_a}^T \mathbf{e}_{y_a} = 0$</p>
<p>Khớp Cardan</p> <p>$f_J = 2$</p>		<p>$\mathbf{r}_{a'} - \mathbf{r}_a = 0$</p> <p>$\mathbf{e}_{z_a}^T \mathbf{e}_{z_a'} = 0$</p>
<p>Khớp trụ</p> <p>$f_J = 2$</p>		<p>$(\mathbf{r}_{a'} - \mathbf{r}_a)^T \mathbf{e}_{x_a} = 0$</p> <p>$(\mathbf{r}_{a'} - \mathbf{r}_a)^T \mathbf{e}_{y_a} = 0$</p> <p>$\mathbf{e}_{z_a}^T \mathbf{e}_{x_a} = 0$</p> <p>$\mathbf{e}_{z_a}^T \mathbf{e}_{y_a} = 0$</p>
<p>Khớp quay</p> <p>$f_J = 1$</p>		<p>$\mathbf{r}_{a'} - \mathbf{r}_a = 0$</p> <p>$\mathbf{e}_{z_a}^T \mathbf{e}_{x_a} = 0$</p> <p>$\mathbf{e}_{z_a}^T \mathbf{e}_{y_a} = 0$</p>

Hình 3.13

§2 PHÂN TÍCH ĐỘNG HỌC HỆ NHIỀU VẬT BẰNG PHƯƠNG PHÁP MA TRẬN CÔSIN CHỈ HƯỚNG

Ma trận côsin chỉ hướng có một vai trò quan trọng trong phân tích động học và phân tích động lực học hệ nhiều vật. Trong chương hai ta đã nêu ra công thức về quan hệ giữa toán tử sóng của vận tốc góc của vật rắn và ma trận côsin chỉ hướng của nó

$$\tilde{\omega}_i^{(0)} = \dot{\mathbf{A}}_i \mathbf{A}_i^T, \quad \tilde{\omega}_i^{(i)} = \mathbf{A}_i^T \dot{\mathbf{A}}_i, \quad \dot{\mathbf{A}}_i = \frac{{}^{R_0} d\mathbf{A}_i}{dt} \quad (2.1)$$

Mặt khác từ quan hệ $\mathbf{u}_i^{(0)} = \mathbf{A}_i \mathbf{u}_i^{(i)}$, người ta đã chứng minh được hệ thức

$$\tilde{\mathbf{u}}_i^{(0)} = \mathbf{A}_i \tilde{\mathbf{u}}_i^{(i)} \mathbf{A}_i^T \quad (2.2)$$

Trong đoạn này, dựa trên cơ sở khái niệm ma trận côsin chỉ hướng, ta sẽ trình bày phương pháp truy hồi và phương pháp trực tiếp xác định vận tốc góc của các vật rắn trong một hệ nhiều vật. Sau đó xác định vị trí, vận tốc, gia tốc của một điểm thuộc vật rắn trong hệ nhiều vật có cấu trúc cây. Ta cũng có thể áp dụng phương pháp này tính toán động học hệ nhiều vật có cấu trúc mạch vòng.

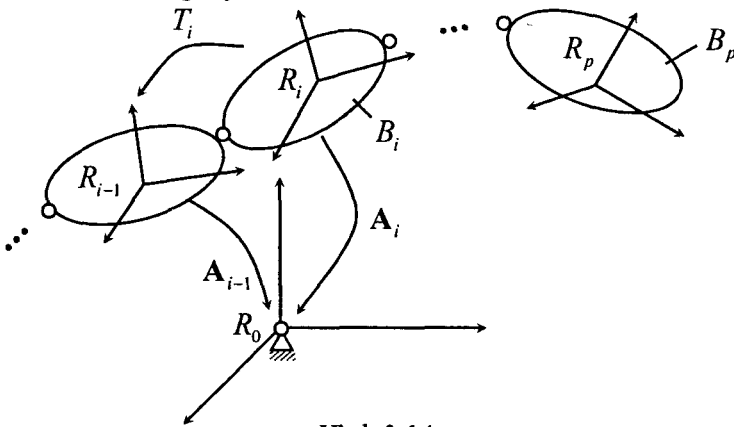
2.1 Xác định vận tốc góc của các vật rắn bằng phương pháp truy hồi

Xét hệ gồm p vật rắn (hình 3.14). Gọi \mathbf{A}_i là ma trận côsin chỉ hướng của vật rắn thứ i đối với hệ quy chiếu quán tính R_0 , \mathbf{T}_i là ma trận côsin chỉ hướng của vật rắn thứ i đối với hệ quy chiếu R_{i-1} , gắn liền vào vật rắn thứ $i-1$. Như thế ta có

$$\mathbf{A}_i = \mathbf{T}_1 \mathbf{T}_2 \dots \mathbf{T}_{i-1} \mathbf{T}_i = \mathbf{A}_{i-1} \mathbf{T}_i \quad (2.3)$$

$$\mathbf{A}_i^T = \mathbf{T}_i^T \mathbf{A}_{i-1}^T, \quad \mathbf{T}_i^T = \mathbf{A}_i^T \mathbf{A}_{i-1} \quad (2.4)$$

Để tiện phân biệt ta gọi ${}^{R_{i-1}} \mathbf{A}_i = \mathbf{T}_i$ là ma trận côsin chỉ hướng tương đối, ${}^{R_0} \mathbf{A}_i = \mathbf{A}_i$ là ma trận côsin chỉ hướng tuyệt đối.



Hình 3.14

Thế biểu thức (2.3) vào phương trình (2.1) ta được

$$\begin{aligned}\tilde{\omega}_i^{(i)} &= \mathbf{A}_i^T \dot{\mathbf{A}}_i = (\mathbf{A}_{i-1} \mathbf{T}_i)^T \frac{R_0 d}{dt} (\mathbf{A}_{i-1} \mathbf{T}_i) = \mathbf{T}_i^T \mathbf{A}_{i-1}^T \dot{\mathbf{A}}_{i-1} \mathbf{T}_i + \mathbf{T}_i^T \mathbf{A}_{i-1}^T \mathbf{A}_{i-1} \dot{\mathbf{T}}_i \\ \tilde{\omega}_i^{(i)} &= \mathbf{T}_i^T \tilde{\omega}_{i-1}^{(i-1)} \mathbf{T}_i + \mathbf{T}_i^T \dot{\mathbf{T}}_i\end{aligned}\quad (2.5)$$

Ta quy ước gọi $\tilde{\omega}_{i,rel}$ là vận tốc góc tương đối của vật rắn B_i đối với hệ quy chiếu R_{i-1} . Như thế ta có

$$\tilde{\omega}_{i,rel}^{(i)} = \mathbf{T}_i^T \dot{\mathbf{T}}_i \quad (2.6)$$

Thế (2.6) vào biểu thức (2.5) ta được

$$\tilde{\omega}_i^{(i)} = \mathbf{T}_i^T \tilde{\omega}_{i-1}^{(i-1)} \mathbf{T}_i + \tilde{\omega}_{i,rel}^{(i)} \quad (2.7)$$

Theo công thức (2.2) ta có

$$\tilde{\omega}_i^{(0)} = \mathbf{A}_i \tilde{\omega}_i^{(i)} \mathbf{A}_i^T$$

Nhân bên trái biểu thức này với \mathbf{A}_i^T , nhân bên phải với \mathbf{A}_i ta được

$$\tilde{\omega}_i^{(i)} = \mathbf{A}_i^T \tilde{\omega}_i^{(0)} \mathbf{A}_i = \mathbf{A}_i^T \left(\widetilde{\mathbf{A}_i \omega_i^{(i)}} \right) \mathbf{A}_i \quad (2.8)$$

Tương tự ta có

$$\tilde{\omega}_{i-1}^{(i-1)} = \mathbf{A}_{i-1}^T \left(\widetilde{\mathbf{A}_{i-1} \omega_{i-1}^{(i-1)}} \right) \mathbf{A}_{i-1} \quad (2.9)$$

$$\tilde{\omega}_{i,rel}^{(i)} = \mathbf{A}_i^T \left(\widetilde{\mathbf{A}_i \omega_{i,rel}^{(i)}} \right) \mathbf{A}_i \quad (2.10)$$

Thế (2.8), (2.9), (2.10) vào biểu thức (2.7) ta được

$$\mathbf{A}_i^T \left(\widetilde{\mathbf{A}_i \omega_i^{(i)}} \right) \mathbf{A}_i = \mathbf{T}_i^T \mathbf{A}_{i-1}^T \left(\widetilde{\mathbf{A}_{i-1} \omega_{i-1}^{(i-1)}} \right) \mathbf{A}_{i-1} \mathbf{T}_i + \mathbf{A}_i^T \left(\widetilde{\mathbf{A}_i \omega_{i,rel}^{(i)}} \right) \mathbf{A}_i$$

Nhân bên trái phương trình trên với \mathbf{A}_i , nhân bên phải với \mathbf{A}_i^T ta có

$$\widetilde{\mathbf{A}_i \omega_i^{(i)}} = \widetilde{\mathbf{A}_{i-1} \omega_{i-1}^{(i-1)}} + \widetilde{\mathbf{A}_i \omega_{i,rel}^{(i)}}$$

Từ đó suy ra

$$\mathbf{A}_i \omega_i^{(i)} = \mathbf{A}_{i-1} \omega_{i-1}^{(i-1)} + \mathbf{A}_i \omega_{i,rel}^{(i)} \quad (2.11)$$

Nhân bên trái phương trình (2.11) với \mathbf{A}_i^T ta được

$$\omega_i^{(i)} = \mathbf{A}_i^T \mathbf{A}_{i-1} \omega_{i-1}^{(i-1)} + \omega_{i,rel}^{(i)}$$

Chú ý đến (2.4) từ công thức trên ta suy ra công thức xác định truy hồi vận tốc góc của vật rắn B_i

$$\omega_i^{(i)} = \mathbf{T}_i^T \omega_{i-1}^{(i-1)} + \omega_{i,rel}^{(i)} \quad (2.12)$$

Từ đó suy ra quy tắc xác định truy hồi véc tơ vận tốc góc của vật rắn thuộc hệ nhiều vật có cấu trúc vòng động học như sau:

Bước 1: Xác định toán tử sóng $\tilde{\omega}_1^{(1)}$ của vật rắn B_1 theo công thức (2.6). Khâu 0 gắn liền vào hệ quy chiếu quán tính nên $\tilde{\omega}_0^{(0)} = 0$. Như thế theo (2.7) ta có

$$\tilde{\omega}_1^{(1)} = \tilde{\omega}_{1,rel}^{(1)} = \mathbf{T}_1^T \dot{\mathbf{T}}_1, \quad \left(\dot{\mathbf{T}}_i = \frac{R_0}{dt} d\mathbf{T}_i \right)$$

Bước 2: Tính ma trận $\dot{\mathbf{T}}_i$, sau đó tính toán tử sóng $\tilde{\omega}_{i,rel}^{(i)} = \mathbf{T}_i^T \dot{\mathbf{T}}_i$. Từ đó suy ra $\omega_{i,rel}^{(i)}$.

Bước 3: Tính vận tốc góc khâu thứ i theo công thức (2.12)

$$\omega_i^{(i)} = \mathbf{T}_i^T \omega_{i-1}^{(i-1)} + \omega_{i,rel}^{(i)}$$

Bước 4: Tiếp tục quá trình truy hồi tính toán từ bước (i) sang bước (i+1).

Quá trình xác định vận tốc góc theo phương pháp truy hồi khá thuận tiện nếu áp dụng công cụ tin học tự động hoá quá trình tính toán. Đối với các bài toán đơn giản ta áp dụng cách tính trực tiếp nhiều khi thuận tiện hơn.

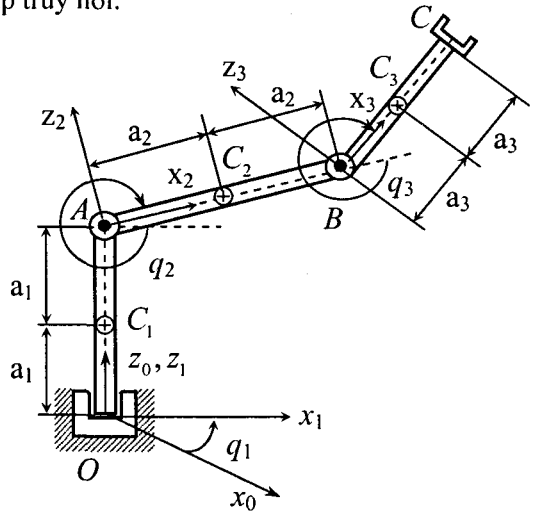
Thí dụ 3.5. Cho cơ cấu rôbốt như hình vẽ (hình 3.15). Hãy xác định vận tốc góc từng khâu của rôbốt bằng phương pháp truy hồi.

Lời giải. Các ma trận cosin chỉ hướng địa phương có dạng

$$\mathbf{T}_1 = \begin{bmatrix} \cos q_1 & -\sin q_1 & 0 \\ \sin q_1 & \cos q_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{T}_2 = \begin{bmatrix} \cos q_2 & 0 & \sin q_2 \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin q_2 & 0 & \cos q_2 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{T}_3 = \begin{bmatrix} \cos q_3 & 0 & \sin q_3 \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin q_3 & 0 & \cos q_3 \end{bmatrix}$$



Hình 3.15

Vận tốc góc tuyệt đối của khâu một là

$$\tilde{\omega}_1^{(1)} = \mathbf{T}_1^T \dot{\mathbf{T}}_1 = \dot{q}_1 \begin{bmatrix} \cos q_1 & \sin q_1 & 0 \\ -\sin q_1 & \cos q_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\sin q_1 & -\cos q_1 & 0 \\ \cos q_1 & -\sin q_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\tilde{\omega}_1^{(1)} = \dot{q}_1 \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \omega_1^{(1)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{q}_1 \end{bmatrix} \quad (1)$$

Vận tốc góc tương đối của khâu hai đối với khâu một

$$\tilde{\omega}_{2,rel}^{(2)} = \mathbf{T}_2^T \dot{\mathbf{T}}_2 = \dot{q}_2 \begin{bmatrix} \cos q_2 & 0 & -\sin q_2 \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin q_2 & 0 & \cos q_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\sin q_2 & 0 & \cos q_2 \\ 0 & 0 & 0 \\ -\cos q_2 & 0 & -\sin q_2 \end{bmatrix}$$

$$\tilde{\omega}_{2,rel}^{(2)} = \dot{q}_2 \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \omega_{2,rel}^{(2)} = \begin{bmatrix} 0 \\ \dot{q}_2 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2)$$

Vận tốc góc tương đối của khâu ba đối với khâu hai là

$$\tilde{\omega}_{3,rel}^{(3)} = \mathbf{T}_3^T \dot{\mathbf{T}}_3 = \dot{q}_3 \begin{bmatrix} \cos q_3 & 0 & -\sin q_3 \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin q_3 & 0 & \cos q_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\sin q_3 & 0 & \cos q_3 \\ 0 & 0 & 0 \\ -\cos q_3 & 0 & -\sin q_3 \end{bmatrix}$$

$$\tilde{\omega}_{3,rel}^{(3)} = \dot{q}_3 \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \omega_{3,rel}^{(3)} = \begin{bmatrix} 0 \\ \dot{q}_3 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3)$$

Áp dụng công thức (2.12) ta tính được vận tốc góc tuyệt đối của khâu hai và khâu ba

$$\omega_2^{(2)} = \mathbf{T}_2^T \omega_1^{(1)} + \omega_{2,rel}^{(2)} = \begin{bmatrix} \cos q_2 & 0 & -\sin q_2 \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin q_2 & 0 & \cos q_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{q}_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \dot{q}_2 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\dot{q}_1 \sin q_2 \\ \dot{q}_2 \\ \dot{q}_1 \cos q_2 \end{bmatrix} \quad (4)$$

$$\omega_3^{(3)} = \mathbf{T}_3^T \omega_2^{(2)} + \omega_{3,rel}^{(3)} = \begin{bmatrix} \cos q_3 & 0 & -\sin q_3 \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin q_3 & 0 & \cos q_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\dot{q}_1 \sin q_2 \\ \dot{q}_2 \\ \dot{q}_1 \cos q_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \dot{q}_3 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\omega_3^{(3)} = \begin{bmatrix} -\dot{q}_1 (\sin q_2 \cos q_3 + \sin q_3 \cos q_2) \\ \dot{q}_2 + \dot{q}_3 \\ \dot{q}_1 (\cos q_2 \cos q_3 - \sin q_2 \sin q_3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\dot{q}_1 \sin (q_2 + q_3) \\ \dot{q}_2 + \dot{q}_3 \\ \dot{q}_1 \cos (q_2 + q_3) \end{bmatrix} \quad (5)$$

2.2 Xác định vận tốc góc của các vật rắn bằng phương pháp trực tiếp

Phương pháp trực tiếp tính toán vận tốc góc dựa trên công thức tính vận tốc góc của vật rắn qua ma trận cosin chỉ hướng

$$\tilde{\omega}_i^{(0)} = \dot{\mathbf{A}}_i \mathbf{A}_i^T, \quad \tilde{\omega}_i^{(i)} = \mathbf{A}_i^T \dot{\mathbf{A}}_i \quad (2.13)$$

Do đó việc tính toán rõ ràng và sáng sủa hơn so với phương pháp truy hồi. Tuy nhiên ma trận cosin chỉ hướng \mathbf{A}_i của vật rắn B_i đối với hệ quy chiếu quán tính thường có dạng phức tạp hơn ma trận cosin chỉ hướng địa phương \mathbf{T}_i của vật rắn B_i đối với vật rắn B_{i-1} . Chú ý rằng

$$\mathbf{A}_i = \mathbf{A}_{i-1} \mathbf{T}_i \quad (2.14)$$

Nếu sử dụng các hệ chương trình có phần tính toán ký tự (MAPLE, MATCAD, MATHEMATICA) thì việc tính toán vận tốc góc theo công thức (2.13) khá thuận tiện.

Thí dụ 3.6. Tính vận tốc góc các khâu của rôbốt trong thí dụ 3.5 bằng phương pháp trực tiếp.

Lời giải. Từ các ma trận cosin chỉ hướng địa phương \mathbf{T}_i ($i=1, 2, 3$) trong thí dụ 3.5 ta dễ dàng tính được ma trận cosin chỉ hướng \mathbf{A}_i .

$$\mathbf{A}_1 = \mathbf{T}_1 = \begin{bmatrix} \cos q_1 & -\sin q_1 & 0 \\ \sin q_1 & \cos q_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (1)$$

$$\mathbf{A}_2 = \mathbf{A}_1 \mathbf{T}_2 = \begin{bmatrix} \cos q_1 & -\sin q_1 & 0 \\ \sin q_1 & \cos q_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos q_2 & 0 & \sin q_2 \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin q_2 & 0 & \cos q_2 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{A}_2 = \begin{bmatrix} \cos q_1 \cos q_2 & -\sin q_1 & \cos q_1 \sin q_2 \\ \sin q_1 \cos q_2 & \cos q_1 & \sin q_1 \sin q_2 \\ -\sin q_2 & 0 & \cos q_2 \end{bmatrix} \quad (2)$$

$$\mathbf{A}_3 = \mathbf{A}_2 \mathbf{T}_3 \quad (3)$$

Theo công thức (2.13), để xác định các vận tốc góc ω_i ta phải tính đạo hàm các ma trận cosin chỉ hướng \mathbf{A}_i theo thời gian. Nhờ các phần mềm đa năng (chẳng hạn MAPLE, MATCAD) ta dễ dàng tính được \mathbf{A}_i và đạo hàm của ma trận này. Ta ghi lại kết quả tính nhờ phần mềm MAPLE như sau

$$\tilde{\omega}_2^{(2)} = \mathbf{A}_2^T \dot{\mathbf{A}}_2 = \begin{bmatrix} 0 & -\dot{q}_1 \cos q_2 & \dot{q}_2 \\ \dot{q}_1 \cos q_2 & 0 & \dot{q}_1 \sin q_2 \\ -\dot{q}_2 & -\dot{q}_1 \sin q_2 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \omega_2^{(2)} = \begin{bmatrix} -\dot{q}_1 \sin q_2 \\ \dot{q}_2 \\ \dot{q}_1 \cos q_2 \end{bmatrix}$$

2.3 Xác định gia tốc góc của các vật rắn

Gia tốc góc của vật rắn B_i trong hệ nhiều vật có thể tìm một cách tương đối đơn giản bằng cách đạo hàm trực tiếp vận tốc góc của nó theo thời gian. Nếu sử dụng phương pháp truy hồi thường rất phức tạp. Đạo hàm theo thời gian biểu thức

$$\tilde{\omega}_i^{(i)} = \mathbf{A}_i^T \dot{\mathbf{A}}_i$$

ta được

$$\tilde{\alpha}_i^{(i)} = \dot{\tilde{\omega}}_i^{(i)} = \dot{\mathbf{A}}_i^T \dot{\mathbf{A}}_i + \mathbf{A}_i^T \ddot{\mathbf{A}}_i \quad (2.15)$$

2.4 Xác định vận tốc trọng tâm của các vật rắn

Bên cạnh việc xác định các vận tốc góc, ta cũng cần phải xác định vận tốc các điểm của vật rắn trong hệ nhiều vật. Trong mục này giới hạn xét bài toán xác định vận tốc trọng tâm của vật rắn. Để tính vận tốc trọng tâm của vật rắn người ta có thể sử dụng phương pháp truy hồi. Để đơn giản, trong đoạn này ta chỉ xét các hệ nhiều vật liên kết với nhau bởi các khớp quay và khớp tịnh tiến, và giữa hai vật chỉ có một khớp nối.

a) Phương pháp truy hồi đối với khớp quay

Trên hình 3.16 biểu diễn sơ đồ hai vật rắn thứ $i-1$ và thứ i của một hệ nhiều vật nối với nhau bằng khớp quay. Các ký hiệu cho trên hình vẽ. Vị trí trọng tâm của vật rắn B_i được xác định bởi công thức

$$\vec{r}_i = \vec{r}_{i-1} + \vec{u}_{i-1} - \vec{s}_i \quad (2.16)$$

Biểu thức (2.16) có thể viết lại dưới dạng ma trận như sau

$$\mathbf{r}_i^{(0)} = \mathbf{r}_{i-1}^{(0)} + \mathbf{A}_{i-1} \mathbf{u}_{i-1}^{(i-1)} - \mathbf{A}_i \mathbf{s}_i^{(i)} \quad (2.17)$$

Đạo hàm phương trình (2.17) theo thời gian ở trong hệ quy chiếu cố định R_O ta được

$$\dot{\mathbf{r}}_i^{(0)} = \dot{\mathbf{r}}_{i-1}^{(0)} + \dot{\mathbf{A}}_{i-1} \mathbf{u}_{i-1}^{(i-1)} - \dot{\mathbf{A}}_i \mathbf{s}_i^{(i)} \quad (2.18)$$

Chú ý đến công thức (2.9) trong chương 2 ta có hệ thức

$$\dot{\mathbf{A}}_i = \mathbf{A}_i \tilde{\boldsymbol{\omega}}_i^{(i)} \quad (2.19)$$

Thế (2.19) vào (2.18) ta được công thức xác định vận tốc trọng tâm vật rắn theo quy tắc truy hồi

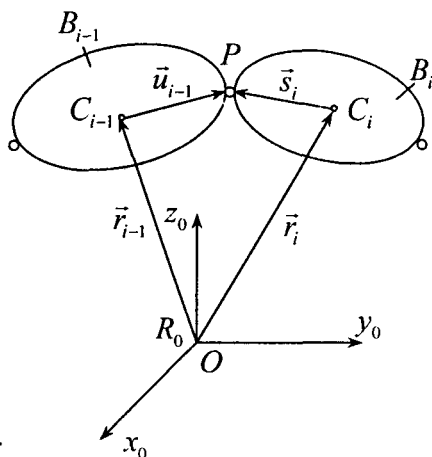
$$\dot{\mathbf{r}}_i^{(0)} = \dot{\mathbf{r}}_{i-1}^{(0)} + \mathbf{A}_{i-1} \tilde{\boldsymbol{\omega}}_{i-1}^{(i-1)} \mathbf{u}_{i-1}^{(i-1)} - \mathbf{A}_i \tilde{\boldsymbol{\omega}}_i^{(i)} \mathbf{s}_i^{(i)} \quad (2.20)$$

Thí dụ 3.7. Áp dụng phương pháp truy hồi tìm vận tốc trọng tâm các khâu của rôbốt xét trong thí dụ 3.5.

Lời giải. Các ma trận cosin chỉ hướng \mathbf{A}_1 , \mathbf{A}_2 và \mathbf{A}_3 đã tìm được trong thí dụ 3.6

$$\mathbf{A}_1 = \mathbf{T}_1 = \begin{bmatrix} \cos q_1 & -\sin q_1 & 0 \\ \sin q_1 & \cos q_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{A}_2 = \begin{bmatrix} \cos q_1 \cos q_2 & -\sin q_1 & \cos q_1 \sin q_2 \\ \sin q_1 \cos q_2 & \cos q_1 & \sin q_1 \sin q_2 \\ -\sin q_2 & 0 & \cos q_2 \end{bmatrix}$$



Hình 3.16

$$\mathbf{A}_3 = \mathbf{A}_2 \mathbf{T}_3 = \mathbf{A}_2 \begin{bmatrix} \cos q_3 & 0 & \sin q_3 \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin q_3 & 0 & \cos q_3 \end{bmatrix}$$

Theo (2.20) ta có

$$\dot{\mathbf{r}}_1^{(0)} = -\mathbf{A}_1 \tilde{\boldsymbol{\omega}}_1^{(1)} \mathbf{s}_1^{(1)} = - \begin{bmatrix} \cos q_1 & -\sin q_1 & 0 \\ \sin q_1 & \cos q_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -\dot{q}_1 & 0 \\ \dot{q}_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -a_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (1)$$

Kết quả này là đương nhiên, vì trọng tâm C_1 nằm trên trục quay z_0 của hệ quy chiếu cố định nên vận tốc của nó phải bằng không. Để tính vận tốc trọng tâm của khâu thứ hai, từ hình vẽ 3.16 ta suy ra

$$\mathbf{u}_1^{(1)} = [0, 0, a_1]^T, \quad \mathbf{s}_2^{(2)} = [-a_2, 0, 0]^T.$$

Từ đó sử dụng công thức (2.20) ta có

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{r}}_2^{(0)} &= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \cos q_1 & -\sin q_1 & 0 \\ \sin q_1 & \cos q_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -\dot{q}_1 & 0 \\ \dot{q}_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ a_1 \end{bmatrix} - \\ &\begin{bmatrix} \cos q_1 \cos q_2 & -\sin q_1 & \cos q_1 \sin q_2 \\ \sin q_1 \cos q_2 & \cos q_1 & \sin q_1 \sin q_2 \\ -\sin q_2 & 0 & \cos q_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -\dot{q}_1 \cos q_2 & \dot{q}_2 \\ \dot{q}_1 \cos q_2 & 0 & \dot{q}_1 \sin q_2 \\ -\dot{q}_2 & -\dot{q}_1 \sin q_2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -a_2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\ &= - \begin{bmatrix} \cos q_1 \cos q_2 & -\sin q_1 & \cos q_1 \sin q_2 \\ \sin q_1 \cos q_2 & \cos q_1 & \sin q_1 \sin q_2 \\ -\sin q_2 & 0 & \cos q_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ -a_2 \dot{q}_1 \cos q_2 \\ a_2 \dot{q}_2 \end{bmatrix} \\ \dot{\mathbf{r}}_2^{(0)} &= \begin{bmatrix} -a_2 \dot{q}_1 \sin q_1 \cos q_2 - a_2 \dot{q}_2 \cos q_1 \sin q_2 \\ a_2 \dot{q}_1 \cos q_1 \cos q_2 - a_2 \dot{q}_2 \sin q_1 \sin q_2 \\ -a_2 \dot{q}_2 \cos q_2 \end{bmatrix} \quad (2) \end{aligned}$$

Bằng cách tương tự chúng ta có thể tính được $\dot{\mathbf{r}}_3$.

b) Phương pháp truy hồi đối với khớp tịnh tiến

Nếu hai vật rắn B_{i-1} và B_i được nối với nhau bằng khớp tịnh tiến (hình 3.17) thì chuyển động tương đối của B_i đối với B_{i-1} là chuyển động tịnh tiến. Chọn hai hệ quy chiếu động gắn vào hai vật rắn này có cùng hướng, khi đó công thức xác định vận tốc trọng tâm phụ thuộc vào tọa độ suy rộng có dạng tương đối đơn giản. Do ma trận cosin chỉ hướng địa phương T_i là ma trận đơn vị, nên ta có

$$\mathbf{A}_i = \mathbf{A}_{i-1} \mathbf{T}_i = \mathbf{A}_{i-1} \mathbf{E} = \mathbf{A}_{i-1} \quad (2.21)$$

Véc tơ xác định đoạn C_{i-1} đến C_i là

$$\vec{d}_i = \overrightarrow{C_{i-1}C_i} \quad (2.22)$$

Từ hình vẽ 3.17 ta có công thức xác định vị trí trọng tâm của vật rắn B_i biểu diễn qua vị trí trọng tâm vật rắn B_{i-1}

$$\vec{r}_i = \vec{r}_{i-1} + \vec{d}_i \quad (2.23)$$

Biểu thức (2.23) có thể viết dưới dạng ma trận như sau

$$\mathbf{r}_i^{(0)} = \mathbf{r}_{i-1}^{(0)} + \mathbf{A}_{i-1} \mathbf{d}_i^{(i)} \quad (2.24)$$

Đạo hàm theo thời gian hệ thức (2.24) ở trong hệ quy chiếu cố định R_0 ta được

$$\dot{\mathbf{r}}_i^{(0)} = \dot{\mathbf{r}}_{i-1}^{(0)} + \dot{\mathbf{A}}_{i-1} \mathbf{d}_i^{(i)} + \mathbf{A}_{i-1} \dot{\mathbf{d}}_i^{(i)} \quad (2.25)$$

Thế (2.19) vào (2.25) ta được công thức xác định vận tốc trọng tâm vật rắn B_i theo quy tắc truy hồi như sau

$$\dot{\mathbf{r}}_i^{(0)} = \dot{\mathbf{r}}_{i-1}^{(0)} + \mathbf{A}_{i-1} \dot{\mathbf{d}}_i^{(i)} + \mathbf{A}_{i-1} \tilde{\omega}_{i-1}^{(i-1)} \mathbf{d}_i^{(i)} \quad (2.26)$$

Chú ý. Thông thường tại khớp tịnh tiến ta chọn tọa độ suy rộng q_i là độ dời dọc theo trục x_{i-1} như hình vẽ. Khi đó ta có

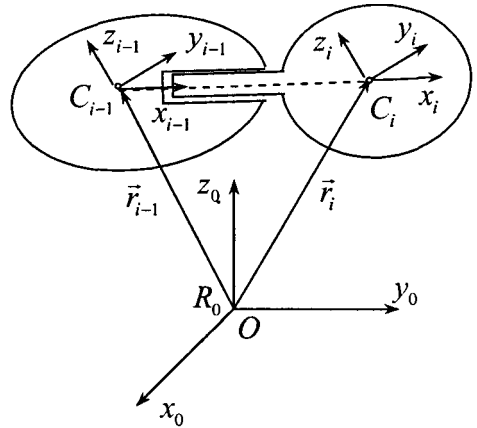
$$\mathbf{d}_i^{(i)} = \begin{bmatrix} q_i \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \dot{\mathbf{d}}_i^{(i)} = \begin{bmatrix} \dot{q}_i \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2.27)$$

Thí dụ 3.8. Xác định vận tốc trọng tâm các khâu rôbốt cực như hình vẽ 3.18.

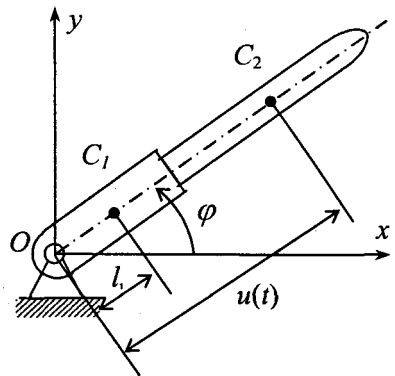
Lời giải. Ta ký hiệu $\varphi = q_1$, $u = q_2$. Từ hình vẽ 3.18 ta có

$$\mathbf{r}_1^{(0)} = \begin{bmatrix} l_1 \cos \varphi \\ l_1 \sin \varphi \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{A}_1 = \mathbf{A}_2 = \begin{bmatrix} \cos \varphi_1 & -\sin \varphi_1 & 0 \\ \sin \varphi_1 & \cos \varphi_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$



Hình 3.17



Hình 3.18

Từ đó dễ dàng tính được vận tốc góc và vận tốc trọng tâm C_1 . Do khớp tại O là khớp quay, ta có

$$\dot{\mathbf{r}}_1^{(0)} = \begin{bmatrix} -l_1 \dot{q}_1 \sin q_1 \\ l_1 \dot{q}_1 \cos q_1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{\omega}_1^{(1)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{q}_1 \end{bmatrix} \quad (1)$$

Ta xác định vận tốc trọng tâm C_2 theo công thức (2.26)

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{r}}_2^{(0)} &= \begin{bmatrix} -l_1 \dot{q}_1 \sin q_1 \\ l_1 \dot{q}_1 \cos q_1 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \cos q_1 & -\sin q_1 & 0 \\ \sin q_1 & \cos q_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{q}_2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\ &+ \begin{bmatrix} \cos q_1 & -\sin q_1 & 0 \\ \sin q_1 & \cos q_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -\dot{q}_1 & 0 \\ \dot{q}_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\ \dot{\mathbf{r}}_2^{(0)} &= \begin{bmatrix} -l_1 \dot{q}_1 \sin q_1 + \dot{q}_2 \cos q_1 - \dot{q}_1 q_2 \sin q_1 \\ l_1 \dot{q}_1 \cos q_1 + \dot{q}_2 \sin q_1 + \dot{q}_1 q_2 \cos q_1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2) \end{aligned}$$

2.5 Xác định gia tốc trọng tâm của các vật rắn

Khi đã biết vận tốc trọng tâm các vật rắn của hệ nhiều vật, bằng cách đạo hàm vận tốc trọng tâm của vật rắn theo thời gian ở trong hệ quy chiếu cố định ta dễ dàng xác định được gia tốc trọng tâm của vật rắn. Đó là cách nhanh nhất và thuận tiện nhất.

Với mục tiêu trình bày một cách trọn vẹn, trong đoạn này ta nêu ra các công thức xác định gia tốc trọng tâm vật rắn của một hệ nhiều vật bằng phương pháp truy hồi. Cũng như đoạn trên ta giả thiết các vật rắn được ghép nối với nhau bằng các khớp quay hoặc khớp tịnh tiến.

a) Phương pháp truy hồi đối với khớp quay

Đạo hàm theo thời gian biểu thức (2.20) ở trong hệ quy chiếu cố định R_0 ta nhận được công thức

$$\ddot{\mathbf{r}}_i^{(0)} = \ddot{\mathbf{r}}_{i-1}^{(0)} + \mathbf{A}_{i-1} \dot{\tilde{\boldsymbol{\omega}}}_{i-1}^{(i-1)} \mathbf{u}_{i-1}^{(i-1)} + \dot{\mathbf{A}}_{i-1} \tilde{\boldsymbol{\omega}}_{i-1}^{(i-1)} \mathbf{u}_{i-1}^{(i-1)} - \mathbf{A}_i \dot{\tilde{\boldsymbol{\omega}}}_i^{(i)} \mathbf{s}_i^{(i)} - \dot{\mathbf{A}}_i \tilde{\boldsymbol{\omega}}_i^{(i)} \mathbf{s}_i^{(i)} \quad (2.28)$$

Thế biểu thức (2.19) vào (2.28) ta nhận được công thức truy hồi tính gia tốc trọng tâm của vật rắn B_i trong một hệ nhiều vật

$$\ddot{\mathbf{r}}_i^{(0)} = \ddot{\mathbf{r}}_{i-1}^{(i-1)} + \mathbf{A}_{i-1} \dot{\tilde{\boldsymbol{\omega}}}_{i-1}^{(i-1)} \mathbf{u}_{i-1}^{(i-1)} + \dot{\mathbf{A}}_{i-1} \tilde{\boldsymbol{\omega}}_{i-1}^{(i-1)} \tilde{\boldsymbol{\omega}}_{i-1}^{(i-1)} \mathbf{u}_{i-1}^{(i-1)} - \mathbf{A}_i \dot{\tilde{\boldsymbol{\omega}}}_i^{(i)} \mathbf{s}_i^{(i)} - \dot{\mathbf{A}}_i \tilde{\boldsymbol{\omega}}_i^{(i)} \tilde{\boldsymbol{\omega}}_i^{(i)} \mathbf{s}_i^{(i)} \quad (2.29)$$

Công thức (2.29) tuy rất rõ ràng nhưng khá phức tạp. Nếu ta sử dụng các phần mềm tính toán ký tự (MAPLE, MATCAD, MATHEMATICA) thì sử dụng phương pháp này khá thuận tiện.

b) Phương pháp truy hồi đối với khớp tịnh tiến

Tương tự như trên, đạo hàm theo thời gian biểu thức (2.26) ở trong hệ R_0 ta được

$$\ddot{\mathbf{r}}_{i-1}^{(0)} = \ddot{\mathbf{r}}_{i-1}^{(0)} + \dot{\mathbf{A}}_{i-1} \dot{\mathbf{d}}_i^{(i)} + \mathbf{A}_{i-1} \ddot{\mathbf{d}}_i^{(i)} + \mathbf{A}_{i-1} \dot{\tilde{\omega}}_{i-1}^{(i-1)} \mathbf{d}_i^{(i)} + \dot{\mathbf{A}}_{i-1} \tilde{\omega}_{i-1}^{(i-1)} \mathbf{d}_i^{(i)} - \mathbf{A}_{i-1} \tilde{\omega}_{i-1}^{(i-1)} \dot{\mathbf{d}}_i^{(i-1)} \quad (2.30)$$

Thế biểu thức (2.19) vào (2.30) ta được công thức truy hồi tính gia tốc trọng tâm của vật rắn B_i trong hệ nhiều vật

$$\begin{aligned} \ddot{\mathbf{r}}_i^{(0)} &= \ddot{\mathbf{r}}_{i-1}^{(0)} + \mathbf{A}_{i-1} \tilde{\omega}_{i-1}^{(i-1)} \dot{\mathbf{d}}_i^{(i)} + \mathbf{A}_{i-1} \ddot{\mathbf{d}}_i^{(i)} + \mathbf{A}_{i-1} \dot{\tilde{\omega}}_{i-1}^{(i-1)} \mathbf{d}_i^{(i)} + \mathbf{A}_{i-1} \tilde{\omega}_{i-1}^{(i-1)} \tilde{\omega}_{i-1}^{(i)} \mathbf{d}_i^{(i)} - \mathbf{A}_{i-1} \tilde{\omega}_{i-1}^{(i-1)} \dot{\mathbf{d}}_i^{(i)} \\ \ddot{\mathbf{r}}_i^{(0)} &= \ddot{\mathbf{r}}_{i-1}^{(0)} + \mathbf{A}_{i-1} \left(\dot{\tilde{\omega}}_{i-1}^{(i-1)} + \tilde{\omega}_{i-1}^{(i-1)} \tilde{\omega}_{i-1}^{(i-1)} \right) \mathbf{d}_i^{(i)} + 2\mathbf{A}_{i-1} \tilde{\omega}_{i-1}^{(i-1)} \dot{\mathbf{d}}_i^{(i)} + \mathbf{A}_{i-1} \ddot{\mathbf{d}}_i^{(i)} \end{aligned} \quad (2.31)$$

Công thức này cũng rất phức tạp. Nói chung ta chỉ nên sử dụng (2.31) khi lập trình tính toán.

§3 PHÂN TÍCH ĐỘNG HỌC HỆ NHIỀU VẬT BẰNG PHƯƠNG PHÁP MA TRẬN DENAVIT-HARTENBERG

Một trong các phương pháp hay được sử dụng để phân tích động học và động lực học hệ nhiều vật rắn ghép nối với nhau bằng các khớp, chủ yếu là các khớp quay và khớp tịnh tiến, là phương pháp ma trận *Denavit-Hartenberg*. Phương pháp này có ưu điểm là tương đối đơn giản, dễ lập trình trong phần phân tích động học. Tuy nhiên khi tính toán động lực học phương pháp này không thuận tiện bằng một số phương pháp khác. Trong hầu hết các sách về Kỹ thuật rôbốt, người ta hay trình bày phương pháp này.

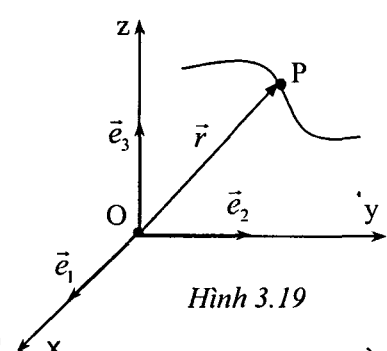
3.1 Các tọa độ thuần nhất và các ma trận biến đổi tọa độ thuần nhất

Ý tưởng cơ bản của việc đưa vào các tọa độ thuần nhất và các phép biến đổi thuần nhất là nhằm mục tiêu kết hợp hai phép biến đổi tịnh tiến và phép biến đổi quay thành một phép biến đổi mới, mà ma trận của phép biến đổi này có cấp lớn hơn một.

a) Định nghĩa các tọa độ thuần nhất

Định nghĩa. Vị trí của điểm P ở trong hệ tọa độ ba chiều Oxyz được xác định bởi véc tơ sau

$$\vec{r} = x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2 + z\vec{e}_3 \quad (3.1)$$



Hình 3.19

Giả sử σ là một đại lượng vô hướng khác không tùy ý. Tọa độ thuần nhất của điểm P được định nghĩa bởi hệ thức sau

$$\mathbf{r} = [\sigma x \quad \sigma y \quad \sigma z \quad \sigma]^T \quad (3.2)$$

Trong kỹ thuật, người ta thường chọn $\sigma = 1$. Khi đó tọa độ thuần nhất bốn chiều của điểm P được mở rộng từ các tọa độ vật lý ba chiều của điểm P bằng cách thêm vào thành phần thứ tư như sau

$$\mathbf{r} = [x \quad y \quad z \quad 1]^T \quad (3.3)$$

Chú ý. Trong trường hợp điểm P chuyển động trên một mặt phẳng, tọa độ vật lý của điểm P là

$$\vec{r} = x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2.$$

Khi đó tọa độ thuần nhất của điểm P có dạng

$$\mathbf{r} = [\sigma x \quad \sigma y \quad \sigma]^T$$

b) Ý nghĩa của khái niệm tọa độ thuần nhất

♦ Giả sử các tọa độ của điểm P trong một mặt phẳng là (x,y). Gọi $\sigma = \zeta$ là một số thực bất kỳ khác không. Ta thực phép biến đổi sau

$$x = \frac{\xi}{\zeta}, \quad y = \frac{\eta}{\zeta} \quad (1)$$

Khi đó tọa độ thuần nhất của điểm P là (ξ, η, ζ) . Thí dụ một điểm P có tọa độ vật lý là (x=1,y=2). Tọa độ thuần nhất của điểm P có thể là (1,2,1), hoặc (2,4,2), hoặc (6,12,6), v.v...

Bằng cách đó ta có thể chuyển một đa thức bất kỳ của hai biến (x,y) thành một đa thức thuần nhất của các biến (ξ, η, ζ) .

Thí dụ 3.9. Cho đa thức

$$f(x, y) = x^3 y + 3x^2 y - 2xy + 5y = 0 \quad (2)$$

Đa thức (2) không phải là một đa thức thuần nhất. Thực hiện phép đổi biến số (1) ta có

$$\begin{aligned} x^3 y &= \frac{\xi^3 \eta}{\zeta^4}, \quad 3x^2 y = 3 \frac{\xi^2 \eta}{\zeta^3} \\ -2xy &= -2 \frac{\xi \eta}{\zeta^2}, \quad 5y = 5 \frac{\eta}{\zeta} \end{aligned} \quad (3)$$

Thế (3) vào (2) rồi nhân cả hai vế với ζ^4 ta được

$$f(\xi, \eta, \zeta) = \xi^3 \eta + 3\xi^2 \eta \zeta - 2\xi \eta \zeta^2 + 5\eta \zeta^3 = 0 \quad (4)$$

Đa thức (4) là một đa thức thuần nhất bậc 4 của các tọa độ thuần nhất.

Như thế bằng cách đưa vào khái niệm tọa độ thuần nhất, ta có thể biến đổi một đa thức không thuần nhất của các tọa độ vật lý về một đa thức thuần nhất của các tọa độ thuần nhất.

♦ Nhờ khái niệm tọa độ thuần nhất trong không gian bốn chiều ta có thể chuyển bài toán cộng hai ma trận cột trong không gian ba chiều thành bài toán nhân ma

trên trong không gian bốn chiều. Cho \vec{a} và \vec{b} là hai véc tơ trong không gian ba chiều, ta có

$$\mathbf{a} + \mathbf{b} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 + b_1 \\ a_2 + b_2 \\ a_3 + b_3 \end{bmatrix} \quad (3.4)$$

Ta chuyển phép tính cộng (3.4) sang phép tính nhân hai ma trận như sau

$$\begin{bmatrix} a_1 + b_1 \\ a_2 + b_2 \\ a_3 + b_3 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & a_1 \\ 0 & 1 & 0 & a_2 \\ 0 & 0 & 1 & a_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (3.5)$$

c) Ma trận biến đổi tọa độ thuận nhất và phép biến đổi thuận nhất

Xét vật rắn B chuyển động trong hệ qui chiếu cố định $R_O \equiv O x_0 y_0 z_0$. Lấy một điểm A nào đó của vật rắn B làm điểm định vị, và gắn chặt vào vật rắn hệ qui chiếu $R_A \equiv A x y z$ (hình 3.20). Lấy P là một điểm bất kỳ thuộc vật rắn B. Trong hệ tọa độ vật lý $O x_0 y_0 z_0$ ta có

$$\vec{r}_P = \vec{r}_A + \vec{u}_P \quad (3.6)$$

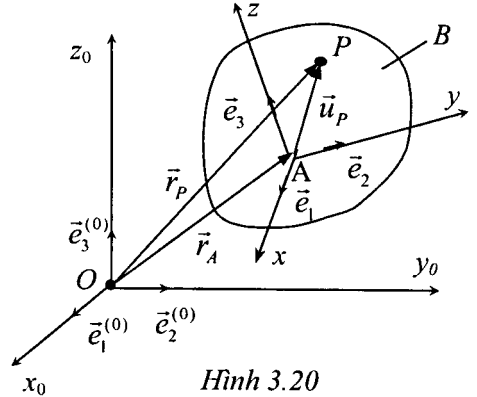
Phương trình (3.6) có thể viết lại dưới dạng ma trận như sau

$$\begin{bmatrix} x_P^{(0)} \\ y_P^{(0)} \\ z_P^{(0)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_A^{(0)} \\ y_A^{(0)} \\ z_A^{(0)} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{Px}^{(1)} \\ u_{Py}^{(1)} \\ u_{Pz}^{(1)} \end{bmatrix} \quad (3.7)$$

Trong đó \mathbf{A} là ma trận cosin chỉ hướng của vật rắn B, $u_{Px}^{(1)}, u_{Py}^{(1)}, u_{Pz}^{(1)}$ là tọa độ của điểm P trong hệ qui chiếu $A x_1 y_1 z_1$. Nếu sử dụng các tọa độ thuận nhất, phương trình (3.7) có thể được viết lại dưới dạng

$$\begin{bmatrix} x_P^{(0)} \\ y_P^{(0)} \\ z_P^{(0)} \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & x_A^{(0)} \\ a_{21} & a_{21} & a_{21} & y_A^{(0)} \\ a_{31} & a_{31} & a_{31} & z_A^{(0)} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{Px}^{(1)} \\ u_{Py}^{(1)} \\ u_{Pz}^{(1)} \\ 1 \end{bmatrix} \quad (3.8)$$

Nếu ta đưa vào ký hiệu ma trận



Hình 3.20

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & x_A^{(0)} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & y_A^{(0)} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & z_A^{(0)} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & {}^{R_0}\mathbf{r}_A \\ \mathbf{0}^T & 1 \end{bmatrix} \quad (3.9)$$

thì phương trình (3.8) có thể viết lại dưới dạng

$$\begin{bmatrix} {}^{R_0}\mathbf{r}_P \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & {}^{R_0}\mathbf{r}_A \\ \mathbf{0}^T & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} {}^{R_0}\mathbf{u}_P \\ 1 \end{bmatrix} \quad (3.10)$$

Định nghĩa. Ma trận (3.9) được gọi là ma trận biến đổi thuần nhất, còn phép biến đổi (3.10) được gọi là phép biến đổi thuần nhất

Chú ý. Phương trình (3.7) là một ánh xạ tuyến tính không thuần nhất. Phương trình (3.8) là một ánh xạ tuyến tính thuần nhất.

d) Một vài tính chất của ma trận biến đổi thuần nhất

- Ma trận biến đổi thuần nhất \mathbf{T} chứa thông tin về hướng của vật rắn, mô tả bởi ma trận cosin chỉ hướng \mathbf{A} , và thông tin về điểm định vị (điểm cực) của vật rắn, mô tả bởi véc tơ đại số ${}^{R_0}\mathbf{r}_A$.

- Định thức của ma trận thuần nhất bằng 1

$$\det \mathbf{T} = \det \mathbf{A} = 1. \quad (3.11)$$

- Ma trận nghịch đảo của ma trận thuần nhất được xác định bởi công thức

$$\mathbf{T}^{-1} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}^T & -\mathbf{A}^T {}^{R_0}\mathbf{r}_A \\ \mathbf{0}^T & 1 \end{bmatrix} \quad (3.12)$$

Việc chứng minh công thức tính ma trận nghịch đảo (3.21) tương đối đơn giản. Giả sử ma trận \mathbf{T}^{-1} có dạng

$$\mathbf{T}^{-1} = \begin{bmatrix} \mathbf{B} & \mathbf{b} \\ \mathbf{0}^T & 1 \end{bmatrix}$$

Thực hiện phép nhân ma trận ta được

$$\mathbf{T}\mathbf{T}^{-1} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & {}^{R_0}\mathbf{r}_A \\ \mathbf{0}^T & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{B} & \mathbf{b} \\ \mathbf{0}^T & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{AB} & \mathbf{Ab} + {}^{R_0}\mathbf{r}_A \\ \mathbf{0}^T & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{E} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0}^T & 1 \end{bmatrix}$$

Từ đó suy ra

$$\mathbf{AB} = \mathbf{E} \Rightarrow \mathbf{B} = \mathbf{A}^{-1} = \mathbf{A}^T$$

$$\mathbf{Ab} + {}^{R_0}\mathbf{r}_A = \mathbf{0} \Rightarrow \mathbf{b} = -\mathbf{A}^{-1} {}^{R_0}\mathbf{r}_A = -\mathbf{A}^T {}^{R_0}\mathbf{r}_A$$

e) Các ma trận quay cơ bản thuần nhất và ma trận tịnh tiến thuần nhất

Các ma trận quay cơ bản (1.14), (1.15) và (1.16) ở trong chương 2 mở rộng ra trong hệ tọa độ thuần nhất bốn chiều và có dạng như sau

$$\mathbf{T}_x(\varphi) = Rot(x, \varphi) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \varphi & -\sin \varphi & 0 \\ 0 & \sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.13)$$

$$\mathbf{T}_y(\psi) = Rot(y, \psi) = \begin{bmatrix} \cos \psi & 0 & \sin \psi & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\sin \psi & 0 & \cos \psi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.14)$$

$$\mathbf{T}_z(\theta) = Rot(z, \theta) = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.15)$$

Ngoài ra ta đưa vào khái niệm ma trận tịnh tiến thuần nhất có dạng

$$\text{Trans}(a, b, c) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & a \\ 0 & 1 & 0 & b \\ 0 & 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.16)$$

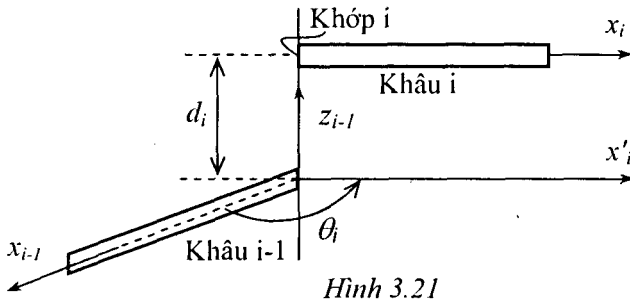
Trong đó ta thực hiện chuyển động tịnh tiến theo hướng trục tọa độ x một đoạn là a, theo hướng trục tọa độ y một đoạn là b, theo hướng trục tọa độ z một đoạn là c.

3.2 Các tham số động học Denavit-Hartenberg và ma trận Denavit-Hartenberg

a) Các tham số động học Denavit-Hartenberg

Trong đoạn này ta chỉ xét hệ các vật rắn nối ghép với nhau bằng các khớp quay và các khớp tịnh tiến. Khi đó quan hệ vị trí giữa hai khâu kế tiếp nhau có thể được xác định bởi hai tham số khớp. Trên hình 3.21 khâu $i-1$ nối với khâu thứ i bằng khớp i . Trục z_{i-1} được chọn là trục của khớp thứ i . Tham số thứ nhất θ_i , được gọi là góc khớp, là góc quay trục x_{i-1} quanh trục z_{i-1} đến trục $x'_i \parallel x_i$. Tham số thứ hai d_i , là khoảng cách giữa trục x'_i và trục x_i . Nếu khớp i là khớp quay thì θ_i là biến còn d_i là hằng số. Nếu khớp i là khớp tịnh tiến thì khoảng cách d_i là biến, còn θ_i là hằng số.

Đối với các rôbot công nghiệp, Denavit-Hartenberg (1955) đã đưa ra cách chọn các hệ trục tọa độ có gốc tại khớp thứ i như sau (xem hình 3.22)



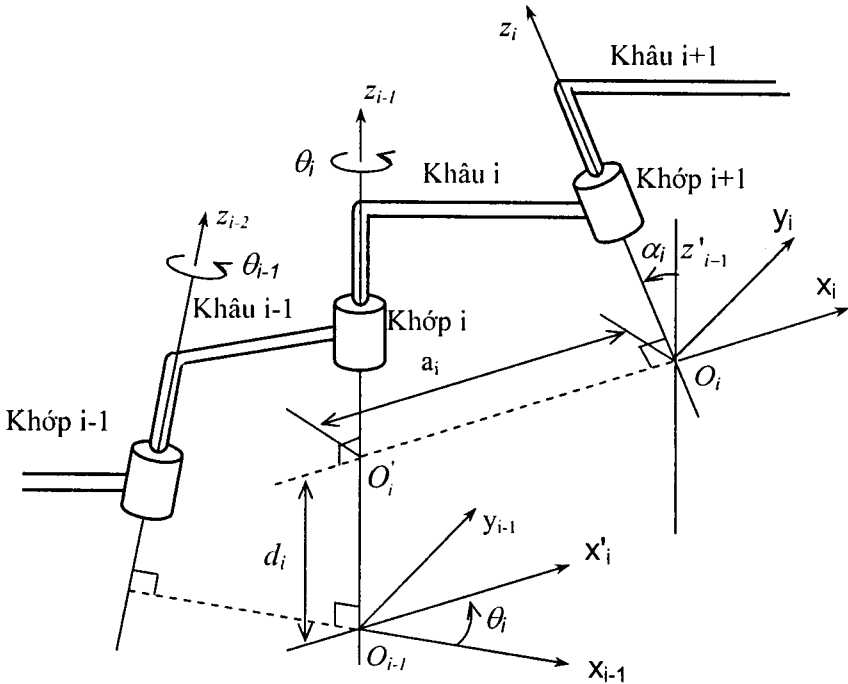
Hình 3.21

1. Trục z_{i-1} được chọn dọc theo hướng của trục khớp động thứ i .
 2. Trục x_{i-1} được chọn dọc theo đường vuông góc chung của hai trục z_{i-2} và z_{i-1} , hướng đi từ trục z_{i-2} sang trục z_{i-1} . Nếu trục z_{i-1} cắt trục z_{i-2} thì hướng của trục x_{i-1} được chọn tùy ý.
 3. Góc tọa độ O_{i-1} được chọn tại giao điểm của trục x_{i-1} và trục z_{i-1} .
 4. Trục y_{i-1} được chọn sao cho hệ $(Oxyz)_{i-1}$ là hệ qui chiếu thuận.
- Hệ tọa độ $(Oxyz)_{i-1}$ được xác định như trên trong một số tài liệu được qui ước gọi là hệ tọa độ khớp. Với cách chọn hệ tọa độ như trên, đôi khi hệ tọa độ khớp $(Oxyz)_{i-1}$ không được xác định một cách duy nhất. Vì vậy ta cần có một số bổ xung thích hợp như sau.
5. Đối với hệ tọa độ $(Oxyz)_0$ theo qui ước trên ta mới chỉ chọn được trục z_0 , còn trục x_0 chưa có trong qui ước trên. Ta có thể chọn trục x_0 một cách tùy ý, miễn là x_0 vuông góc với z_0 .
 6. Đối với hệ tọa độ $(Oxyz)_n$, do không có khớp $n+1$, nên theo qui ước trên ta không xác định được trục z_n . Trục z_n không được xác định duy nhất, trong khi trục x_n lại được chọn theo pháp tuyến của trục z_{n-1} . Trong trường hợp này, nếu khớp n là khớp quay ta có thể chọn trục z_n song song với trục z_{n-1} . Ngoài ra ta có thể chọn tùy ý sao cho hợp lý.
 7. Khi hai trục z_{i-2} và z_{i-1} song song với nhau, giữa hai trục này có nhiều đường pháp tuyến chung, ta có thể chọn trục x_{i-1} hướng theo pháp tuyến chung nào cũng được.
 8. Khi khớp thứ i là khớp tịnh tiến, về nguyên tắc ta có thể chọn trục z_{i-1} một cách tùy ý. Tuy nhiên trong nhiều trường hợp người ta thường chọn trục z_{i-1} dọc theo trục của khớp tịnh tiến này.

Hình 3.22 minh họa cách chọn các hệ tọa độ khớp theo ý tưởng của Denavit-Hartenberg.

Vị trí của hệ tọa độ khớp $(Oxyz)_i$ đối với hệ tọa độ khớp $(Oxyz)_{i-1}$ được xác định bởi bốn tham số Denavit-Hartenberg θ_i , d_i , a_i và α_i như sau:

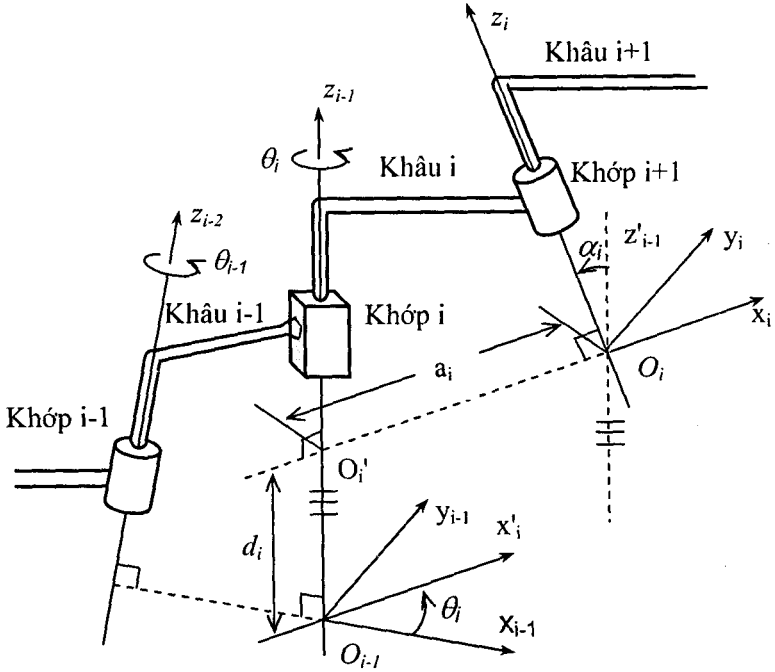
- θ_i : góc quay quanh trục z_{i-1} để trục x_{i-1} chuyển đến trục x'_i ($x'_i // x_i$)
- d_i : dịch chuyển tịnh tiến dọc theo trục z_{i-1} để gốc tọa độ O_{i-1} chuyển đến O'_i , giao điểm của trục x_i và trục z_{i-1} .
- a_i : dịch chuyển tịnh tiến dọc theo trục x_i để điểm O'_i chuyển đến điểm O_i .
- α_i : góc quay quanh trục x_i sao cho trục z'_{i-1} ($z'_{i-1} // z_{i-1}$) chuyển đến trục z_i .



Hình 3.22: Biểu diễn các thông số Denavit Hartenberg của khớp quay

Trong bốn tham số trên, các tham số a_i và α_i luôn luôn là các hằng số, độ lớn của chúng phụ thuộc vào hình dáng và sự ghép nối các khâu thứ $i-1$ và thứ i . Hai tham số còn lại θ_i và d_i , một là hằng số, một là biến số phụ thuộc vào khớp i là khớp quay hay khớp tịnh tiến. Khi khớp i là khớp quay thì θ_i là biến, còn d_i là hằng số. Khi khớp i là khớp tịnh tiến thì d_i là biến, còn θ_i là hằng số.

b) *Chú ý về việc xác định hệ tọa độ khớp tại khớp tịnh tiến.* Trong trường hợp khớp i là khớp tịnh tiến, về nguyên tắc ta có thể chọn trục z_{i-1} một cách tùy ý, do đó việc xác định các tham số Denavit-Hartenberg phụ thuộc vào việc chọn hệ tọa độ. Trên hình 3.23 đưa ra một phương án chọn hệ tọa độ khớp. Tuy nhiên ta có thể lựa chọn các phương án khác.



Hình 3.23 Biểu diễn các thông số Denavit- Hartenberg của khớp tịnh tiến

c) Ma trận Denavit-Hartenberg

Ta có thể chuyển hệ tọa độ khớp $(Oxyz)_{i-1}$ sang hệ tọa độ khớp $(Oxyz)_i$ bằng bốn phép biến đổi cơ bản nh sau:

- quay quanh trục z_{i-1} một góc θ_i
- dịch chuyển tịnh tiến dọc trục z_{i-1} một đoạn d_i
- dịch chuyển tịnh tiến dọc trục x_i một đoạn a_i
- quay quanh trục x_i một góc α_i

Ma trận của phép biến đổi, ký hiệu là H_i , là tích của bốn ma trận biến đổi cơ bản và có dạng như sau

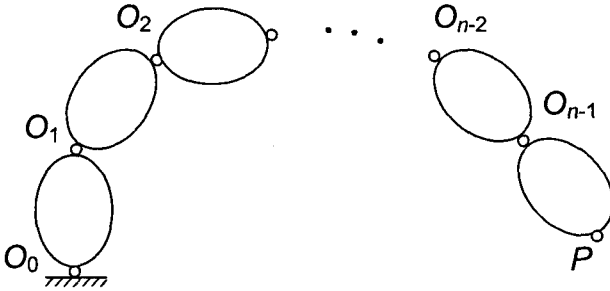
$$H_i = \begin{bmatrix} \cos \theta_i & -\sin \theta_i & 0 & 0 \\ \sin \theta_i & \cos \theta_i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & a_i \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \alpha_i & -\sin \alpha_i & 0 \\ 0 & \sin \alpha_i & \cos \alpha_i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{H}_i = \begin{bmatrix} \cos \theta_i & -\sin \theta_i \cos \alpha_i & \sin \theta_i \sin \alpha_i & a_i \cos \theta_i \\ \sin \theta_i & \cos \theta_i \cos \alpha_i & -\cos \theta_i \sin \alpha_i & a_i \sin \theta_i \\ 0 & \sin \alpha_i & \cos \alpha_i & d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.17)$$

Định nghĩa. Ma trận \mathbf{H}_i được xác định bởi công thức (3.17) được gọi là ma trận Denavit-Hartenberg.

Ma trận Denavit-Hartenberg \mathbf{H}_i là ma trận chuyển tọa độ một điểm từ hệ qui chiếu $(Oxyz)_{i-1}$ sang hệ qui chiếu $(Oxyz)_i$. Chính xác hơn ta phải ký hiệu ma trận này bằng ${}^{i-1}\mathbf{H}_i$. Để đơn giản cách viết sau này ta sử dụng ký hiệu \mathbf{H}_i với nghĩa ${}^{i-1}\mathbf{H}_i$, còn ký hiệu \mathbf{D}_i được dùng với nghĩa ${}^0\mathbf{H}_i$.

3.3 Phương trình xác định vị trí khâu thao tác (bàn kẹp) của rôbốt



Hình 3.24. Rôbốt n khâu

Xét mô hình cơ học của một rôbốt n khâu động như hình 3.24. Theo trên, ma trận Denavit-Hartenberg \mathbf{H}_i cho ta biết:

- Vị trí điểm O_1 trong hệ qui chiếu R_0 ,
- Hướng của vật rắn B_1 đối với hệ qui chiếu R_0 .

Từ đó suy ra khi biết ma trận Denavit-Hartenberg \mathbf{H}_i , ta biết được vị trí của hệ qui chiếu $R_i = (Oxyz)_i$ đối với hệ qui chiếu $R_{i-1} = (Oxyz)_{i-1}$.

Áp dụng liên tiếp các phép biến đổi (3.17) đối với rôbốt n khâu ta có

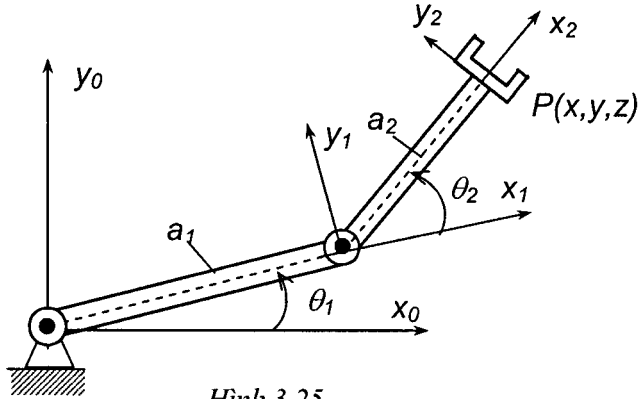
$$\mathbf{D}_n = {}^0\mathbf{H}_n = {}^0\mathbf{H}_1 {}^1\mathbf{H}_2 \cdots {}^{n-1}\mathbf{H}_n = \mathbf{H}_1 \mathbf{H}_2 \cdots \mathbf{H}_n \quad (3.18)$$

Ma trận \mathbf{D}_n cho biết vị trí của điểm P và hướng của khâu thao tác (bàn kẹp) của Rôbốt đối với hệ qui chiếu cố định R_0 .

3.4 Các thí dụ áp dụng

a) *Thí dụ 3.10.* Hình 3.25 là sơ đồ rôbot phẳng hai khâu. Hãy thiết lập ma trận Denavit-Hartenberg \mathbf{D}_2 và phương trình xác định điểm P của bàn kẹp.

Lời giải. Từ hình vẽ 3.25 ta dễ dàng thiết lập bảng các tham số động học Denavit-Hartenberg cho thí dụ này. Trong đó ký hiệu $q_1 = \theta_1, q_2 = \theta_2$.



Hình 3.25

Trục	θ_i	d_i	a_i	α_i
1	q_1	0	a_1	0
2	q_2	0	a_2	0

Áp dụng công thức (3.18) ta tính được ma trận \mathbf{D}_2

$$\mathbf{D}_2 = \mathbf{H}_1 \mathbf{H}_2 = \begin{bmatrix} C_1 & -S_1 & 0 & a_1 C_1 \\ S_1 & C_1 & 0 & a_1 S_1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_2 & -S_2 & 0 & a_2 C_2 \\ S_2 & C_2 & 0 & a_2 S_2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{D}_2 = \begin{bmatrix} C_{12} & -S_{12} & 0 & a_1 C_1 + a_2 C_{12} \\ S_{12} & C_{12} & 0 & a_1 S_1 + a_2 S_{12} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Ba thành phần đầu tiên của cột cuối cùng của ma trận \mathbf{D}_2 chính là các tọa độ của các điểm P. Vậy ta có

$$x_p^{(0)} = a_1 C_1 + a_2 C_{12},$$

$$y_p^{(0)} = a_1 S_1 + a_2 S_{12}$$

Trong thí dụ này cũng như các dụ sau để đơn giản cách viết ta sử dụng các ký hiệu sau

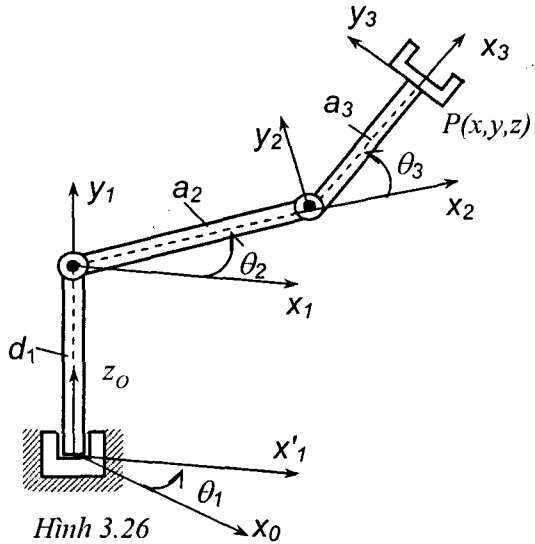
$$C_i = \cos q_i, S_i = \sin q_i,$$

$$C_{12} = \cos(q_1 + q_2), S_{12} = \sin(q_1 + q_2)$$

b) *Thí dụ 3.11.* Phân tích động học rôbốt không gian ba bậc tự do. Hình 3.26 là sơ đồ một loại rôbốt không gian ba bậc tự do. Hãy thiết lập ma trận D_3 và phương trình xác định các tọa độ điểm thao tác P.

Lời giải. Từ hình vẽ ta dễ dàng xác định bảng các tham số động học Denavit-Hartenberg cho thí dụ này

Trục	θ_i	d_i	a_i	α_i
1	q_1	d_1	0	$\pi/2$
2	q_2	0	a_2	0
3	q_3	0	a_3	0



Hình 3.26

Áp dụng công thức (3.18) ta tính được ma trận

$$D_3 = H_1 H_2 H_3 = \begin{bmatrix} C_1 C_{23} & -C_1 S_{23} & S_1 & C_1 (a_3 C_{23} + a_2 C_2) \\ S_1 C_{23} & -S_1 S_{23} & -C_1 & S_1 (a_3 C_{23} + a_2 C_2) \\ S_{23} & C_{23} & 0 & a_3 S_{23} + a_2 S_2 + d_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Vậy tọa độ điểm P có dạng

$$x_p^{(0)} = C_1 (a_3 C_{23} + a_2 C_2)$$

$$y_p^{(0)} = S_1 (a_3 C_{23} + a_2 C_2)$$

$$z_p^{(0)} = a_3 S_{23} + a_2 S_2 + d_1$$

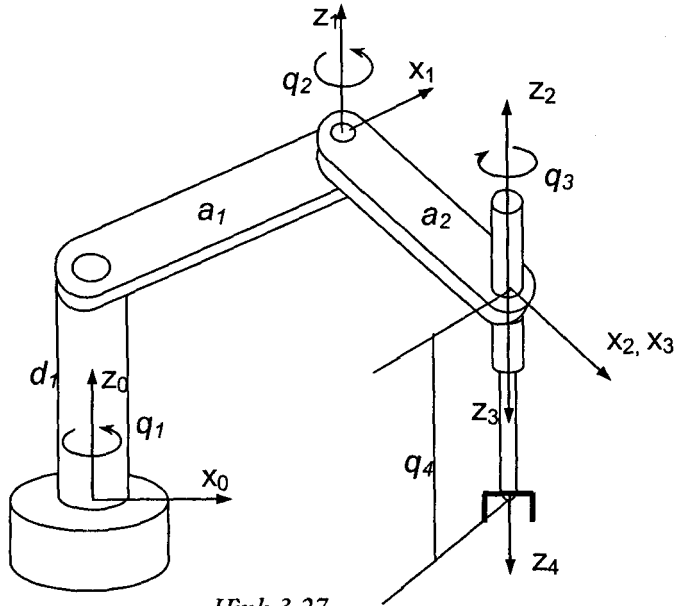
Thí dụ 3.12. Cho mô hình rôbốt Scara 4 bậc tự do như hình 3.27. Các kích thước cho trên hình vẽ. Xác định vận tốc trọng tâm các khâu và vận tốc góc các khâu.

Lời giải. Chọn tọa độ suy rộng như sau

$$\mathbf{q} = [\theta_1, \theta_2, \theta_3, d_4]^T = [q_1, q_2, q_3, q_4]^T \quad (1)$$

Từ hình vẽ ta suy ra bảng tham số động học Denavit-Hartenberg

link	θ	d	a	α
1	q_1	d_1	a_1	0
2	q_2	0	a_2	0
3	q_3	0	0	π
4	0	q_4	0	0



Hình 3.27

Các phép biến đổi thuần nhất

$$D_1 = \begin{bmatrix} C_1 & -S_1 & 0 & a_1 C_1 \\ S_1 & C_1 & 0 & a_1 S_1 \\ 0 & 0 & 1 & d_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$D_2 = \begin{bmatrix} C_{12} & -S_{12} & 0 & a_1 C_1 + a_2 C_{12} \\ S_{12} & C_{12} & 0 & a_1 S_1 + a_2 S_{12} \\ 0 & 0 & 1 & d_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$D_3 = \begin{bmatrix} C_{123} & -S_{123} & 0 & a_1 C_1 + a_2 C_{12} \\ S_{123} & C_{123} & 0 & a_1 S_1 + a_2 S_{12} \\ 0 & 0 & -1 & d_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$D_4 = \begin{bmatrix} C_{123} & -S_{123} & 0 & a_1 C_1 + a_2 C_{12} \\ S_{123} & C_{123} & 0 & a_1 S_1 + a_2 S_{12} \\ 0 & 0 & -1 & d_1 - q_4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Chú ý đến cột thứ ba của các ma trận trên ta suy ra vị trí trọng tâm khâu thứ nhất

$$\mathbf{r}_{C_1} = \begin{bmatrix} a_1 C_1 \\ a_1 S_1 \\ d_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} C_1 & -S_1 & 0 \\ S_1 & C_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -(a_1 - l_1) \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_1 C_1 \\ l_1 S_1 \\ d_1 \end{bmatrix} \quad (2)$$

Đạo hàm biểu thức trên trong hệ qui chiếu cố định ta được vận tốc trọng tâm của khâu thứ nhất

$$\mathbf{v}_{C_1} = \dot{\mathbf{r}}_{C_1} = \begin{bmatrix} -l_1 \dot{\theta}_1 \sin \theta_1 \\ l_1 \dot{\theta}_1 \cos \theta_1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3)$$

Tương tự ta xác định được vị trí trọng tâm khâu thứ hai

$$\mathbf{r}_{C_2} = \begin{bmatrix} a_1 C_1 + a_2 C_{12} \\ a_1 S_1 + a_2 S_{12} \\ d_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} C_{12} & -S_{12} & 0 \\ S_{12} & C_{12} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -(a_2 - l_2) \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 C_1 + l_2 C_{12} \\ a_1 S_1 + l_2 S_{12} \\ d_1 \end{bmatrix} \quad (4)$$

và vận tốc trọng tâm khâu thứ hai

$$\mathbf{v}_{C_2} = \dot{\mathbf{r}}_{C_2} = \begin{bmatrix} -a_1 \dot{\theta}_1 S_1 - l_2 \dot{\theta}_2 S_{12} \\ a_1 \dot{\theta}_1 C_1 + l_2 \dot{\theta}_2 C_{12} \\ 0 \end{bmatrix} \quad (5)$$

Vị trí trọng tâm khâu thứ ba

$$\mathbf{r}_{C_3} = \begin{bmatrix} a_1 C_1 + a_2 C_{12} \\ a_1 S_1 + a_2 S_{12} \\ d_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} C_{12} & -S_{12} & 0 \\ S_{12} & C_{12} & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 C_1 + a_2 C_{12} \\ a_1 S_1 + a_2 S_{12} \\ d_1 \end{bmatrix} \quad (6)$$

Vận tốc trọng tâm của khâu thứ ba.

$$\mathbf{v}_{C_3} = \dot{\mathbf{r}}_{C_3} = \begin{bmatrix} -a_1 \dot{\theta}_1 S_1 - l_2 \dot{\theta}_2 S_{12} \\ a_1 \dot{\theta}_1 C_1 + l_2 \dot{\theta}_2 C_{12} \\ 0 \end{bmatrix} \quad (7)$$

Vị trí trọng tâm khâu thứ tư

$$\mathbf{r}_{C_4} = \begin{bmatrix} a_1 C_1 + a_2 C_{12} \\ a_1 S_1 + a_2 S_{12} \\ d_1 - q_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} C_{12} & -S_{12} & 0 \\ S_{12} & C_{12} & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -l_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 C_1 + a_2 C_{12} \\ a_1 S_1 + a_2 S_{12} \\ d_1 - q_4 + l_4 \end{bmatrix} \quad (8)$$

Vận tốc trọng tâm của khâu thứ tư

$$\mathbf{v}_{C_1} = \dot{\mathbf{r}}_{C_1} = \begin{bmatrix} -a_1\dot{\theta}_1 S_1 - l_2\dot{\theta}_2 S_{12} \\ a_1\dot{\theta}_1 C_1 + l_2\dot{\theta}_2 C_{12} \\ 0 \end{bmatrix} \quad (9)$$

Từ các ma trận *Denavit-Hartenberg* ta suy ma trận côsin chỉ hướng của khâu thứ nhất. Đó là ma trận vuông cấp ba ở góc trên bên phải của ma trận \mathbf{D}_1

$$\mathbf{A}_1 = \begin{bmatrix} C_1 & -S_1 & 0 \\ S_1 & C_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (10)$$

Tương tự ta có ma trận côsin chỉ hướng của khâu thứ hai

$$\mathbf{A}_2 = \begin{bmatrix} C_{12} & -S_{12} & 0 \\ S_{12} & C_{12} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (11)$$

và ma trận côsin chỉ hướng của khâu thứ ba và khâu thứ tư

$$\mathbf{A}_3 = \mathbf{A}_4 = \begin{bmatrix} C_{123} & -S_{123} & 0 \\ S_{123} & C_{123} & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \quad (12)$$

Từ các ma trận côsin chỉ hướng, ta dễ dàng xác định được các toán tử sóng của các vectơ vận tốc góc của khâu thứ nhất

$$\begin{aligned} \tilde{\boldsymbol{\omega}}_1^{(1)} &= \mathbf{A}_1^T \dot{\mathbf{A}}_1 \\ &= \begin{bmatrix} C_1 & S_1 & 0 \\ -S_1 & C_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\dot{\theta}_1 S_1 & -\dot{\theta}_1 C_1 & 0 \\ \dot{\theta}_1 C_1 & -\dot{\theta}_1 S_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -\dot{\theta}_1 & 0 \\ \dot{\theta}_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (13)$$

Từ đó suy ra vận tốc góc khâu thứ nhất

$$\boldsymbol{\omega}_1^{(1)} = [0 \quad 0 \quad \dot{\theta}_1]^T \quad (14)$$

Toán tử sóng của vectơ vận tốc góc của khâu thứ hai

$$\begin{aligned} \tilde{\boldsymbol{\omega}}_2^{(2)} &= \mathbf{A}_2^T \dot{\mathbf{A}}_2 \\ &= \begin{bmatrix} C_{12} & S_{12} & 0 \\ -S_{12} & C_{12} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\dot{\theta}_2 S_{12} & -\dot{\theta}_2 C_{12} & 0 \\ \dot{\theta}_2 C_{12} & -\dot{\theta}_2 S_{12} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -\dot{\theta}_2 & 0 \\ \dot{\theta}_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (15)$$

Từ đó suy ra vận tốc góc khâu thứ hai

$$\boldsymbol{\omega}_2^{(2)} = [0 \quad 0 \quad \dot{\theta}_2]^T \quad (16)$$

Toán tử sóng của véctơ vận tốc góc của khâu thứ ba và khâu thứ tư

$$\begin{aligned} \tilde{\omega}_3^{(3)} = \tilde{\omega}_4^{(4)} = \mathbf{A}_3^T \dot{\mathbf{A}}_3 \\ = \begin{bmatrix} C_{123} & S_{123} & 0 \\ -S_{123} & C_{123} & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\dot{\theta}_{123} S_{123} & -\dot{\theta}_{123} C_{12} & 0 \\ \dot{\theta}_{123} C_{123} & -\dot{\theta}_{123} S_{123} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -\dot{\theta}_{123} & 0 \\ \dot{\theta}_{123} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (17)$$

Suy ra vận tốc góc khâu thứ ba và khâu thứ tư

$$\omega_3^{(3)} = \omega_4^{(4)} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dot{\theta}_{123} \end{bmatrix}^T \quad (18)$$

§4 PHÂN TÍCH ĐỘNG HỌC HỆ NHIỀU VẬT BẰNG PHƯƠNG PHÁP MA TRẬN JACOBI

4.1 Hệ nhiều vật có cấu trúc cây

Xét hệ p vật rắn và có f bậc tự do. Ký hiệu tập các tọa độ suy rộng tối thiểu là

$$\mathbf{q} = [q_1, q_2, \dots, q_f]^T \quad (4.1)$$

Vị trí của mỗi vật rắn được xác định bởi các véctơ định vị khối tâm $\mathbf{r}_i^{(0)} = \mathbf{r}_i$ và ma trận cosin chỉ hướng \mathbf{A}_i .

$$\mathbf{r}_i = \mathbf{r}_i(\mathbf{q}, t) \quad , \quad \mathbf{A}_i = \mathbf{A}_i(\mathbf{q}, t) \quad (4.2)$$

Đạo hàm véctơ \mathbf{r}_i theo thời gian ở trong hệ quy chiếu cố định R_0 ta được vận tốc khối tâm của vật rắn

$$\mathbf{v}_i = \frac{d\mathbf{r}_i}{dt} = \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial \mathbf{q}} \dot{\mathbf{q}} + \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial t} \quad (4.3)$$

Ta đưa vào các ký hiệu

$$\mathbf{J}_{r_i}^{(0)}(\mathbf{q}, t) = \mathbf{J}_{r_i}(\mathbf{q}, t) = \frac{\partial \mathbf{r}_i^{(0)}}{\partial \mathbf{q}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial r_{ix}}{\partial q_1} & \frac{\partial r_{ix}}{\partial q_2} & \dots & \frac{\partial r_{ix}}{\partial q_f} \\ \frac{\partial r_{iy}}{\partial q_1} & \frac{\partial r_{iy}}{\partial q_2} & \dots & \frac{\partial r_{iy}}{\partial q_f} \\ \frac{\partial r_{iz}}{\partial q_1} & \frac{\partial r_{iz}}{\partial q_2} & \dots & \frac{\partial r_{iz}}{\partial q_f} \end{bmatrix} \quad (4.4)$$

$$\bar{\mathbf{v}}_i^{(0)}(\mathbf{q}, t) = \frac{\partial \mathbf{r}_i^{(0)}}{\partial t} \quad (4.5)$$

Biểu thức (4.3) bây giờ có dạng

$$\mathbf{v}_i = \mathbf{v}_i^{(0)} = \mathbf{J}_{T_i}^{(0)}(\mathbf{q}, t) \dot{\mathbf{q}} + \bar{\mathbf{v}}_i^{(0)}(\mathbf{q}, t) \quad (4.6)$$

Ma trận $\mathbf{J}_{T_i}^{(0)}$ là ma trận chữ nhật cỡ $3 \times f$ và được gọi là ma trận Jacôbi tịnh tiến của vật rắn B_i .

Ta gọi $\boldsymbol{\varphi}_i = \boldsymbol{\varphi}_i^{(0)}$ là véctor đại số của véctor quay $\bar{\boldsymbol{\varphi}}_i$. Khi đó vận tốc góc của vật rắn B_i có dạng

$$\boldsymbol{\omega}_i^{(0)} = \frac{d\boldsymbol{\varphi}_i}{dt} = \frac{\partial \boldsymbol{\varphi}_i}{\partial \mathbf{q}} \dot{\mathbf{q}} + \frac{\partial \boldsymbol{\varphi}_i}{\partial t} \quad (4.7)$$

cũng tương tự như phần trên, ta đưa vào các ký hiệu

$$\mathbf{J}_{R_i}^{(0)}(\mathbf{q}, t) = \mathbf{J}_{R_i}(\mathbf{q}, t) = \frac{\partial \boldsymbol{\varphi}_i}{\partial \mathbf{q}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \varphi_{ix}}{\partial q_1} & \frac{\partial \varphi_{ix}}{\partial q_2} & \dots & \frac{\partial \varphi_{ix}}{\partial q_f} \\ \frac{\partial \varphi_{iy}}{\partial q_1} & \frac{\partial \varphi_{iy}}{\partial q_2} & \dots & \frac{\partial \varphi_{iy}}{\partial q_f} \\ \frac{\partial \varphi_{iz}}{\partial q_1} & \frac{\partial \varphi_{iz}}{\partial q_2} & \dots & \frac{\partial \varphi_{iz}}{\partial q_f} \end{bmatrix} \quad (4.8)$$

$$\bar{\boldsymbol{\omega}}_i^{(0)}(\mathbf{q}, t) = \frac{\partial \boldsymbol{\varphi}_i}{\partial t} \quad (4.9)$$

Khi đó biểu thức vận tốc góc của vật rắn B_i có dạng

$$\boldsymbol{\omega}_i^{(0)} = \mathbf{J}_{R_i}^{(0)}(\mathbf{q}, t) \dot{\mathbf{q}} + \bar{\boldsymbol{\omega}}_i^{(0)}(\mathbf{q}, t) \quad (4.10)$$

Ma trận $\mathbf{J}_{R_i}^{(0)}$ là ma trận chữ nhật cỡ $3 \times f$ và được gọi là ma trận Jacôbi quay của vật rắn B_i .

Do $\boldsymbol{\varphi}_i$ là véctor mà các thành phần của nó là các tọa độ, tức là bản thân $\boldsymbol{\varphi}_i$ trong trường hợp tổng quát có thể không xác định được, nhưng đạo hàm của nó theo thời gian luôn có thể xác định được. Chính vì vậy ma trận Jacôbi quay thường được xác định theo cách khác với định nghĩa ở trên. Từ biểu thức (4.10) ta suy ra công thức xác định ma trận Jacôbi quay

$$\mathbf{J}_{R_i}^{(0)}(\mathbf{q}, t) = \frac{\partial \boldsymbol{\omega}_i^{(0)}}{\partial \dot{\mathbf{q}}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \omega_{ix}^{(0)}}{\partial \dot{q}_1} & \frac{\partial \omega_{ix}^{(0)}}{\partial \dot{q}_2} & \dots & \frac{\partial \omega_{ix}^{(0)}}{\partial \dot{q}_n} \\ \frac{\partial \omega_{iy}^{(0)}}{\partial \dot{q}_1} & \frac{\partial \omega_{iy}^{(0)}}{\partial \dot{q}_2} & \dots & \frac{\partial \omega_{iy}^{(0)}}{\partial \dot{q}_n} \\ \frac{\partial \omega_{iz}^{(0)}}{\partial \dot{q}_1} & \frac{\partial \omega_{iz}^{(0)}}{\partial \dot{q}_2} & \dots & \frac{\partial \omega_{iz}^{(0)}}{\partial \dot{q}_n} \end{bmatrix} \quad (4.11)$$

Chú ý. Để thuận tiện tính toán sau này ta đưa vào các ký hiệu

$$\mathbf{J}_{T_i}^{(i)}(\mathbf{q}, t) = \frac{\partial \mathbf{r}_i^{(i)}}{\partial \dot{\mathbf{q}}}, \quad \mathbf{J}_{T_i}^{(0)}(\mathbf{q}, t) = \frac{\partial \mathbf{r}_i^{(0)}}{\partial \dot{\mathbf{q}}}, \quad (i=1, \dots, p) \quad (4.12)$$

$$\mathbf{J}_{R_i}^{(i)}(\mathbf{q}, t) = \frac{\partial \boldsymbol{\omega}_i^{(i)}}{\partial \dot{\mathbf{q}}}, \quad \mathbf{J}_{R_i}^{(0)}(\mathbf{q}, t) = \frac{\partial \boldsymbol{\omega}_i^{(0)}}{\partial \dot{\mathbf{q}}}, \quad (i=1, \dots, p) \quad (4.13)$$

Theo công thức (1.9) chương 1 ta có hệ thức

$$\mathbf{J}_{T_i}^{(0)}(\mathbf{q}, t) = \mathbf{A}_i \mathbf{J}_{T_i}^{(i)}(\mathbf{q}, t) \quad (4.14)$$

$$\mathbf{J}_{R_i}^{(0)}(\mathbf{q}, t) = \mathbf{A}_i \mathbf{J}_{R_i}^{(i)}(\mathbf{q}, t) \quad (4.15)$$

Chú ý. Khi không sợ nhầm lẫn ta có thể viết tắt $\mathbf{J}_{T_i}^{(0)} = \mathbf{J}_{T_i}$, $\mathbf{J}_{R_i}^{(0)} = \mathbf{J}_{R_i}$.

Thí dụ 3.13. Xác định các ma trận Jacôbi quay và các ma trận Jacôbi tịnh tiến của các khâu của rôbốt trong thí dụ 3.5.

Lời giải. Theo thí dụ 3.5 ta có

$$\boldsymbol{\omega}_1^{(1)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{q}_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \\ \dot{q}_3 \end{bmatrix} = \mathbf{J}_{R_1}^{(1)} \dot{\mathbf{q}}$$

$$\boldsymbol{\omega}_2^{(2)} = \begin{bmatrix} -\dot{q}_1 \sin q_2 \\ \dot{q}_2 \\ \dot{q}_1 \cos q_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\sin q_2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \cos q_2 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \\ \dot{q}_3 \end{bmatrix} = \mathbf{J}_{R_2}^{(2)} \dot{\mathbf{q}}$$

$$\boldsymbol{\omega}_3^{(3)} = \begin{bmatrix} -\dot{q}_1 \sin(q_2 + q_3) \\ \dot{q}_2 + \dot{q}_3 \\ \dot{q}_1 \cos(q_2 + q_3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\sin(q_2 + q_3) & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ \cos(q_2 + q_3) & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \\ \dot{q}_3 \end{bmatrix} = \mathbf{J}_{R_3}^{(3)} \dot{\mathbf{q}}$$

Từ trên ta suy ra

$$\mathbf{J}_{R_1}^{(1)} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{J}_{R_2}^{(2)} = \begin{bmatrix} -\sin q_2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \cos q_2 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{J}_{R_3}^{(3)} = \begin{bmatrix} -\sin(q_2 + q_3) & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ \cos(q_2 + q_3) & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Theo công thức (4.15) ta có

$$\mathbf{J}_{R_1} = \mathbf{A}_1 \mathbf{J}_{R_1}^{(1)} = \begin{bmatrix} \cos q_1 & -\sin q_1 & 0 \\ \sin q_1 & \cos q_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{J}_{R_2} = \mathbf{A}_2 \mathbf{J}_{R_2}^{(2)} = \begin{bmatrix} \cos q_1 \cos q_2 & -\sin q_1 & \cos q_1 \sin q_2 \\ \sin q_1 \cos q_2 & \cos q_1 & \sin q_1 \sin q_2 \\ -\sin q_2 & 0 & \cos q_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\sin q_2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \cos q_2 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & -\sin q_1 & 0 \\ 0 & \cos q_1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Tính toán tương tự ta sẽ có

$$\mathbf{J}_{R_3} = \mathbf{A}_3 \mathbf{J}_{R_3}^{(3)}$$

Theo hình vẽ ta suy ra

$$\dot{\mathbf{r}}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \dot{\mathbf{r}}_2 = \begin{bmatrix} -a_2 \sin q_1 \cos q_2 & -a_2 \cos q_1 \sin q_2 & 0 \\ a_2 \cos q_1 \cos q_2 & -a_2 \sin q_1 \sin q_2 & 0 \\ 0 & -a_2 \cos q_2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \\ \dot{q}_3 \end{bmatrix}$$

Từ đó suy ra

$$\mathbf{J}_{T_1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{J}_{T_2} = \begin{bmatrix} -a_2 \sin q_1 \cos q_2 & -a_2 \cos q_1 \sin q_2 & 0 \\ a_2 \cos q_1 \cos q_2 & -a_2 \sin q_1 \sin q_2 & 0 \\ 0 & -a_2 \cos q_2 & 0 \end{bmatrix}$$

Tính toán tương tự ta được \mathbf{J}_{T_r} .

4.2 Hệ nhiều vật có cấu trúc mạch vòng

Xét hệ nhiều vật hólônôm có cấu trúc mạch vòng gồm p vật rắn và f bậc tự do. Ký hiệu các tọa độ suy rộng độc lập đủ (các tọa độ tối thiểu) là q_1, q_2, \dots, q_f , các tọa độ suy rộng phụ thuộc (các tọa độ dư) là z_1, z_2, \dots, z_r ($f+r=n$). Ta đưa vào các ký hiệu sau

$$\mathbf{q} = [q_1, q_2, \dots, q_f]^T, \quad \mathbf{z} = [z_1, z_2, \dots, z_r]^T \quad (4.16)$$

Vị trí của mỗi vật rắn B_i thuộc hệ được xác định bởi véc tơ định vị khối tâm \mathbf{r}_i (hoặc véc tơ xác định một điểm định vị nào đó) và ma trận côsin chỉ hướng \mathbf{A}_i (hoặc véc tơ quay $\vec{\varphi}_i$)

$$\mathbf{r}_i = \mathbf{r}_i(\mathbf{q}, \mathbf{z}, t), \quad i=1, \dots, p. \quad (4.17)$$

$$\mathbf{A}_i = \mathbf{A}_i(\mathbf{q}, \mathbf{z}, t), \quad i=1, \dots, p. \quad (4.18)$$

Trong đó véc tơ các tọa độ suy rộng phụ thuộc \mathbf{z} thường là hàm ẩn của các tọa độ tối thiểu \mathbf{q} và thời gian t

$$\mathbf{z} = \mathbf{z}(\mathbf{q}, t) \quad (4.19)$$

Đạo hàm biểu thức (4.19) theo thời gian t ở trong hệ qui chiếu cố định R_0 ta được

$$\dot{\mathbf{z}} = \frac{\partial \mathbf{z}}{\partial \mathbf{q}} \dot{\mathbf{q}} + \frac{\partial \mathbf{z}}{\partial t} = \mathbf{J}_s \dot{\mathbf{q}} + \bar{\dot{\mathbf{z}}} \quad (4.20)$$

Trong đó ta đưa vào ký hiệu

$$\mathbf{J}_s = \frac{\partial \mathbf{z}}{\partial \mathbf{q}} \quad (4.21)$$

Ma trận \mathbf{J}_s được gọi là ma trận *Jacôbi* mạch vòng. Ma trận \mathbf{J}_s là ma trận cỡ $r \times f$. Đạo hàm biểu thức (4.20) theo t ở trong hệ qui chiếu cố định R_0 ta có

$$\ddot{\mathbf{z}} = \mathbf{J}_s \ddot{\mathbf{q}} + \dot{\mathbf{J}}_s \dot{\mathbf{q}} + \bar{\ddot{\mathbf{z}}} \quad (4.22)$$

Trong đó

$$\bar{\ddot{\mathbf{z}}} = \frac{{}^{R_0} d}{dt} \bar{\dot{\mathbf{z}}}$$

Vận tốc khối tâm của vật rắn thứ i của hệ được xác định bởi công thức

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_i &= \frac{d\mathbf{r}_i}{dt} = \left[\frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial \mathbf{q}} + \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial \mathbf{z}} \frac{\partial \mathbf{z}}{\partial \mathbf{q}} \right] \dot{\mathbf{q}} + \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial \mathbf{z}} \frac{\partial \mathbf{z}}{\partial t} \\ &= \left[\frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial \mathbf{q}} + \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial \mathbf{z}} \mathbf{J}_s \right] \dot{\mathbf{q}} + \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial \mathbf{z}} \frac{\partial \mathbf{z}}{\partial t} \\ &= \mathbf{J}_{r_i}(\mathbf{q}, \mathbf{z}, \mathbf{J}_s) \dot{\mathbf{q}} + \bar{\mathbf{v}}_i(\mathbf{q}, \mathbf{z}, \bar{\dot{\mathbf{z}}}, t) \end{aligned} \quad (4.23)$$

Vận tốc góc của vật rắn thứ i của hệ có dạng

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\omega}_i &= \frac{d\boldsymbol{\varphi}_i}{dt} = \left[\frac{\partial \boldsymbol{\varphi}_i}{\partial \mathbf{q}} + \frac{\partial \boldsymbol{\varphi}_i}{\partial \mathbf{z}} \frac{\partial \mathbf{z}}{\partial \mathbf{q}} \right] \dot{\mathbf{q}} + \frac{\partial \boldsymbol{\varphi}_i}{\partial t} + \frac{\partial \boldsymbol{\varphi}_i}{\partial \mathbf{z}} \frac{\partial \mathbf{z}}{\partial t} \\ &= \left[\frac{\partial \boldsymbol{\varphi}_i}{\partial \mathbf{q}} + \frac{\partial \boldsymbol{\varphi}_i}{\partial \mathbf{z}} \mathbf{J}_s \right] \dot{\mathbf{q}} + \frac{\partial \boldsymbol{\varphi}_i}{\partial t} + \frac{\partial \boldsymbol{\varphi}_i}{\partial \mathbf{z}} \frac{\partial \mathbf{z}}{\partial t} \\ &= \mathbf{J}_{R_i}(\mathbf{q}, \mathbf{z}, \mathbf{J}_s) \dot{\mathbf{q}} + \bar{\boldsymbol{\omega}}_i(\mathbf{q}, \mathbf{z}, \bar{\dot{\mathbf{z}}}, t) \end{aligned} \quad (4.24)$$

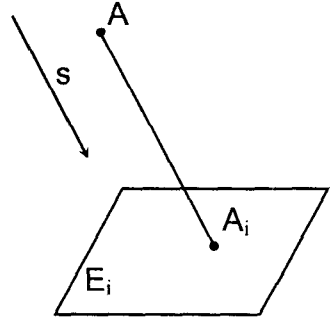
Đạo hàm tiếp tục biểu thức (4.23) và biểu thức (4.24) theo t ở trong hệ qui chiếu cố định R_0 ta được các biểu thức xác định gia tốc khối tâm \mathbf{a}_i và gia tốc góc $\boldsymbol{\alpha}_i$ của vật rắn thứ i .

§5 PHÂN TÍCH ĐỘNG HỌC HỆ NHIỀU VẬT BẰNG PHƯƠNG PHÁP CHIẾU VUÔNG GÓC

5.1. Nội dung cơ bản của phương pháp chiếu vuông góc

5.1.1 Phép chiếu song song

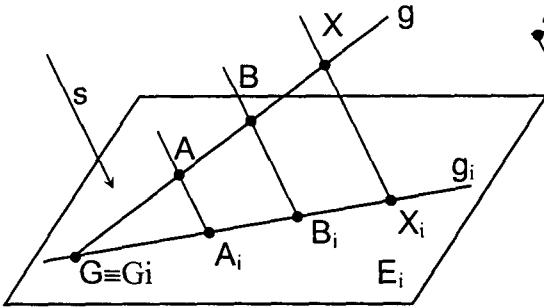
a) *Định nghĩa.* Cho một đường thẳng s gọi là phương chiếu, một mặt phẳng E_i gọi là mặt phẳng hình chiếu. Qua điểm A trong không gian, vẽ một đường thẳng song song với s , cắt E_i tại A_i ; A_i gọi là hình chiếu song song của A theo phương s lên mặt phẳng E_i (hình 3.28).



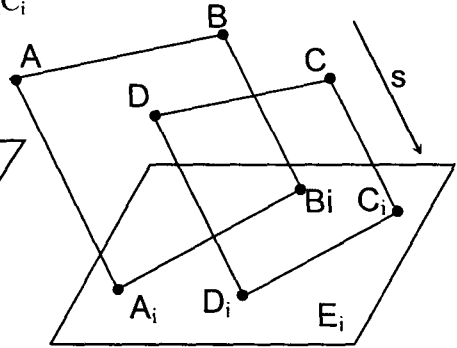
Hình 3.28

b) *Tính chất.* Phép chiếu song song có các tính chất sau:

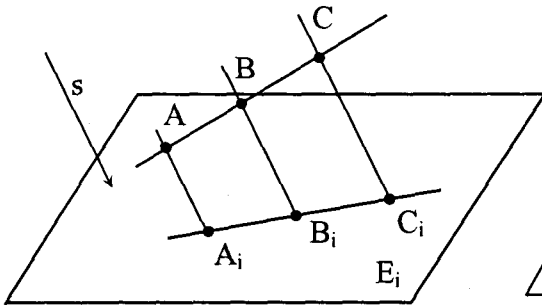
- Hình chiếu song song của một đường thẳng không song song với phương chiếu là một đường thẳng (hình 3.29).
- Trong một phép chiếu song song, hai đường thẳng song song chiếu thành hai đường thẳng song song (hình 3.30): $AB // CD \Rightarrow A_i B_i // C_i D_i$.
- Trong phép chiếu song song, tỉ số đơn của 3 điểm bằng tỉ số của 3 điểm hình chiếu của chúng (hình 3.31). $AB:BC = A_i B_i : B_i C_i$



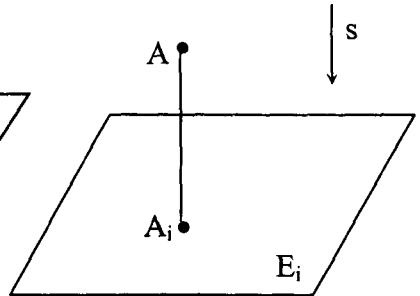
Hình 3.29



Hình 3.30



Hình 3.31



Hình 3.32

5.1.2 Phép chiếu vuông góc

Trong phép chiếu song song, nếu hướng chiếu s vuông góc với mặt phẳng hình chiếu E_i thì phép chiếu được gọi là phép chiếu vuông góc (hình 3.32).

Phép chiếu vuông góc là một trường hợp đặc biệt của phép chiếu song song. Do đó phép chiếu vuông góc có mọi tính chất của phép chiếu song song. Ngoài ra phép chiếu vuông góc còn có những tính chất riêng. Ta đặc biệt chú ý tới 4 tính chất quan trọng sau đây:

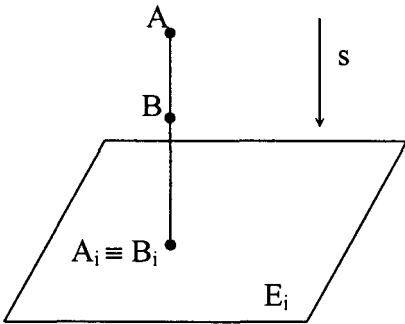
- Hình chiếu vuông góc của một đường thẳng vuông góc với mặt phẳng hình chiếu là một điểm (hình 3.33).
- Hình chiếu vuông góc của một mặt phẳng vuông góc với mặt phẳng hình chiếu là một đường thẳng (hình 3.34).
- Hình chiếu của một đoạn thẳng không vuông góc với mặt phẳng hình chiếu là một đoạn thẳng

$$A_i B_i = AB \cos \beta.$$

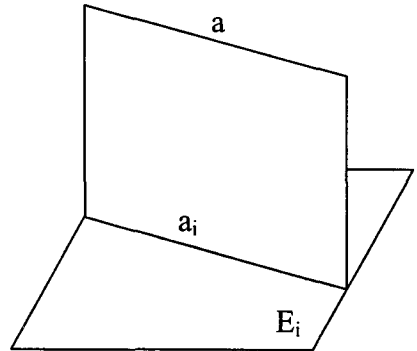
Trong đó β là góc giữa AB và mặt phẳng hình chiếu (hình 3.35).

- Hình chiếu của một góc vuông có ít nhất một cạnh song song với mặt phẳng hình chiếu, cạnh kia không vuông góc với mặt phẳng hình chiếu, là một góc vuông (hình 3.36).

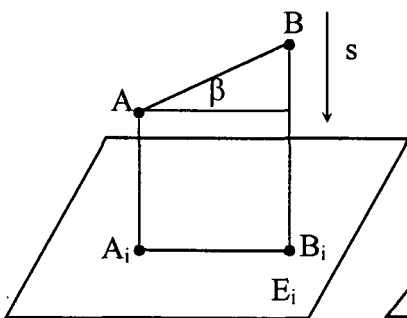
Góc $ABC=90^\circ$ và $AB \parallel E_i$ thì $A_i B_i C_i = 90^\circ$.



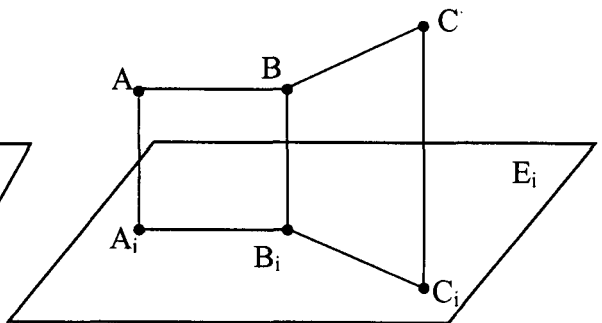
Hình 3.33



Hình 3.34



Hình 3.35



Hình 3.36

5.1.3. Dùng phép chiếu vuông góc để giải bài toán phân tích động học cơ cấu

Sử dụng định nghĩa và những tính chất của phép chiếu, có thể đạt được mục đích:

- Chọn bao nhiêu tọa độ suy rộng và những tọa độ suy rộng nào để có thể viết được phương trình liên kết và biểu diễn các đặc trưng động học dưới dạng giải tích một cách dễ dàng.
- Chỉ với những kiến thức đơn giản nhất của phép chiếu, có thể giảm bớt các tọa độ suy rộng, do đó có thể giảm bớt mức độ phức tạp của bài toán phân tích động học.

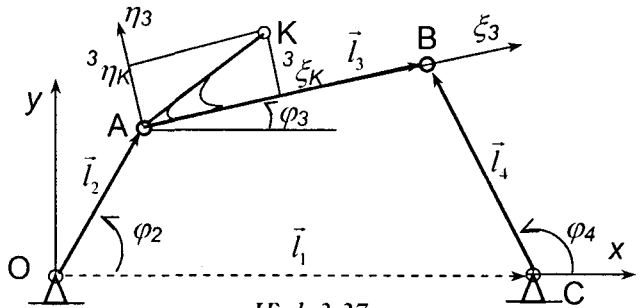
Qui trình như sau:

- Mô hình hoá cơ hệ (bằng mô hình cơ học)
- Chọn hệ trục tọa độ Descartes cố định Oxyz (bất kỳ hoặc có chủ ý giảm các tọa độ suy rộng dư).
- Chiếu toàn bộ cơ cấu lên mặt phẳng xy.
- Chọn tọa độ suy rộng phẳng là các góc trong mặt phẳng xy và các góc định vị của các khâu của cơ cấu so với trục z và các tọa độ dài (nếu có).
- Thiết lập các phương trình liên kết.
- Xác định các ma trận cosin chỉ hướng.
- Viết các biểu thức xác định vị trí các trọng tâm của các vật rắn.

Từ đó, giải bài toán phân tích động học một cách dễ dàng.

5.2 Phân tích động học cơ cấu bốn khâu bản lề phẳng

Thí dụ 3.14. Cho cơ cấu bốn khâu OABC với các kích thước và các ký hiệu như hình 3.37. Cho biết chiều dài của các khâu là l_2, l_3, l_4 . Cho K là một điểm của khâu AB. Tay quay OA quay quanh O theo qui luật $\varphi_2(t)$. Hãy xác định:



Hình 3.37

- Các góc φ_3, φ_4 và các vận tốc góc của các khâu AB và CB,
- Tọa độ điểm K và vận tốc, gia tốc của điểm đó.

Lời giải. Ta khảo sát động học cơ cấu bốn khâu OABC. Cơ hệ gồm ba vật rắn: khâu OA và khâu CB chuyển động quay quanh một trục cố định. Khâu AB chuyển động phẳng. Trước hết ta xác định các phương trình liên kết của cơ hệ. Từ hình 3.37 ta có hệ thức véc tơ

$$\vec{l}_2 + \vec{l}_3 - \vec{l}_1 - \vec{l}_4 = \vec{0}. \quad (1)$$

Chiếu phương trình véc tơ (1) lên trục Ox và Oy ta được các phương trình liên kết

$$\begin{aligned} f_1 &= l_2 \cos \varphi_2 + l_3 \cos \varphi_3 - l_4 \cos \varphi_4 - l_1 = 0 \\ f_2 &= l_2 \sin \varphi_2 + l_3 \sin \varphi_3 - l_4 \sin \varphi_4 = 0 \end{aligned} \quad (2)$$

Đạo hàm các phương trình (2) theo biến φ_2 , ta được

$$\begin{aligned} -l_3 \sin \varphi_3 \cdot \dot{\varphi}_3 + l_4 \sin \varphi_4 \cdot \dot{\varphi}_4 &= l_2 \sin \varphi_2 \\ l_3 \cos \varphi_3 \cdot \dot{\varphi}_3 - l_4 \cos \varphi_4 \cdot \dot{\varphi}_4 &= -l_2 \cos \varphi_2 \end{aligned} \quad (3)$$

Hệ phương trình (3) là hệ hai phương trình đại số tuyến tính dạng

$$\begin{bmatrix} -l_3 \sin \varphi_3 & l_4 \sin \varphi_4 \\ l_3 \cos \varphi_3 & -l_4 \cos \varphi_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\varphi}_3 \\ \dot{\varphi}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_2 \sin \varphi_2 \\ -l_2 \cos \varphi_2 \end{bmatrix} \quad (4)$$

Từ (4) ta dễ dàng tính được $\dot{\varphi}_3, \dot{\varphi}_4$. Sau đó ta tính $\ddot{\varphi}_3, \ddot{\varphi}_4$ theo công thức

$$\dot{\varphi}_3 = \varphi_3' \dot{\varphi}_2, \quad \dot{\varphi}_4 = \varphi_4' \dot{\varphi}_2, \quad (5)$$

Ta lại đạo hàm hệ phương trình (3) theo biến φ_2 , sau đó sắp xếp lại ta được hệ phương trình đại số tuyến tính

$$\begin{bmatrix} -l_3 \sin \varphi_3 & l_4 \sin \varphi_4 \\ l_3 \cos \varphi_3 & -l_4 \cos \varphi_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\varphi}_3 \\ \ddot{\varphi}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \end{bmatrix} \quad (6)$$

Trong đó

$$\begin{aligned} d_1 &= l_2 \cos \varphi_2 + l_3 \cos \varphi_3 \cdot \varphi_3'^2 - l_4 \cos \varphi_4 \cdot \varphi_4'^2 \\ d_2 &= l_2 \sin \varphi_2 + l_3 \sin \varphi_3 \cdot \varphi_3'^2 - l_4 \sin \varphi_4 \cdot \varphi_4'^2 \end{aligned}$$

Giải hệ phương trình đại số tuyến tính (6) ta được $\ddot{\varphi}_3, \ddot{\varphi}_4$. Sau đó ta tính $\ddot{\varphi}_3, \ddot{\varphi}_4$ theo công thức

$$\ddot{\varphi}_i = \varphi_i' \cdot \ddot{\varphi}_2 + \varphi_i'' \cdot \dot{\varphi}_2^2, \quad (i=3, 4) \quad (7)$$

Các góc φ_3, φ_4 có thể xác định gần đúng theo công thức khai triển Taylor

$$\varphi_i \left[(\varphi_2)_0 + \Delta \varphi_2 \right] = (\varphi_i)_0 + (\varphi_i')_0 \Delta \varphi_2 + \frac{1}{2} (\varphi_i'')_0 \Delta \varphi_2^2 + \dots \quad (i=3,4) \quad (8)$$

Nếu cần tính toán chính xác hơn, ta có thể lấy các giá trị của các hàm φ_3, φ_4 xác định bởi công thức (8) làm các giá trị đầu để giải các phương trình đại số phi tuyến (2) bằng phương pháp Newton-Raphson. Việc xác định $\dot{\varphi}_3, \dot{\varphi}_4, \ddot{\varphi}_3, \ddot{\varphi}_4, \varphi_3, \varphi_4$ tương đối đơn giản nếu sử dụng các phần mềm MATLAB, MAPLE, MATCAD.

Bây giờ ta chuyển sang bài toán xác định tọa độ, vận tốc, gia tốc điểm K. Từ hình (3.37) ta có

$$\begin{bmatrix} x_K \\ y_K \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_2 \cos \varphi_2 \\ l_2 \sin \varphi_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \cos \varphi_3 & -\sin \varphi_3 \\ \sin \varphi_3 & \cos \varphi_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi_K \\ \eta_K \end{bmatrix} \quad (9)$$

Nếu sử dụng ký hiệu ma trận cosin chỉ hướng

$$\mathbf{A}_3 = \begin{bmatrix} \cos \varphi_3 & -\sin \varphi_3 \\ \sin \varphi_3 & \cos \varphi_3 \end{bmatrix}$$

thì phương trình (9) có dạng

$$\begin{bmatrix} x_K \\ y_K \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -l_2 \cos \varphi_2 \\ l_2 \sin \varphi_2 \end{bmatrix} + \mathbf{A}_3 \begin{bmatrix} {}^3\xi_K \\ {}^3\eta_K \end{bmatrix} \quad (10)$$

Đạo hàm phương trình (10) theo thời gian ta được

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_K \\ \dot{y}_K \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -l_2 \sin \varphi_2 \\ l_2 \cos \varphi_2 \end{bmatrix} \dot{\varphi}_2 + \dot{\varphi}_3 \mathbf{I}^* \mathbf{A}_3 \begin{bmatrix} {}^3\xi_K \\ {}^3\eta_K \end{bmatrix} \quad (11)$$

Trong đó ta đưa vào ma trận

$$\mathbf{I}^* = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Đạo hàm phương trình (11) theo thời gian ta có

$$\begin{bmatrix} \ddot{x}_K \\ \ddot{y}_K \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -l_2 \sin \varphi_2 \\ l_2 \cos \varphi_2 \end{bmatrix} \ddot{\varphi}_2 + \begin{bmatrix} -l_2 \cos \varphi_2 \\ l_2 \sin \varphi_2 \end{bmatrix} \dot{\varphi}_2^2 + (\ddot{\varphi}_3 \mathbf{I}^* - \dot{\varphi}_3^2 \mathbf{E}) \mathbf{A}_3 \begin{bmatrix} {}^3\xi_K \\ {}^3\eta_K \end{bmatrix} \quad (12)$$

5.3 Phân tích động học cơ cấu tay quay con trượt không gian

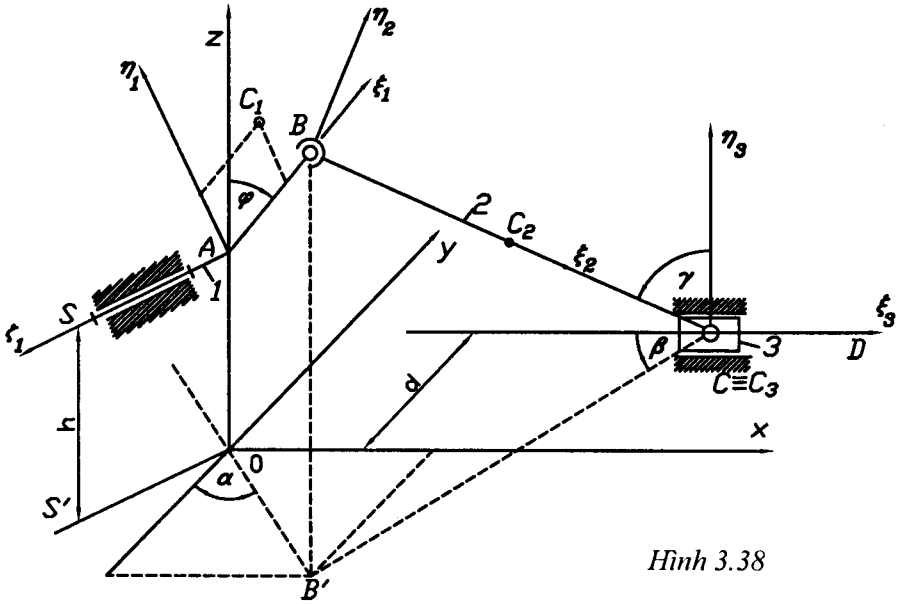
Trong việc phân tích động học cơ cấu không gian, bài toán đầu tiên là xác định vị trí của cơ cấu đối với một hệ qui chiếu cố định nào đó. Vị trí của cơ cấu hoàn toàn xác định bởi các tọa độ suy rộng đủ với số lượng bằng số bậc tự do của cơ cấu. Tuy nhiên để dễ dàng thiết lập các phương trình động học cũng như các phương trình động lực học của cơ cấu không gian dưới dạng biểu thức giải tích, ta đưa thêm vào các tọa độ suy rộng dư. Khi đó bên cạnh các phương trình chuyển động, sẽ có thêm các phương trình liên kết. Số lượng các phương trình liên kết đúng bằng số tọa độ suy rộng dư.

Vấn đề đặt ra ở đây là chọn hệ trục tọa độ cố định, chọn các tọa độ suy rộng đủ và dư sao cho các phương trình liên kết dễ thiết lập, đơn giản, thuận lợi cho các bước tiếp theo và đồng thời có tính trực quan.

Thí dụ 3.15. Phân tích động học cơ cấu tay quay con trượt không gian bằng phương pháp chiếu vuông góc. Các kích thước động học cho trên hình vẽ 3.38.

a) Thành lập các phương trình liên kết bằng phương pháp chiếu vuông góc

Cơ cấu tay quay con trượt không gian (hình 3.38) là cơ cấu không gian đơn giản và hay được dùng trong kỹ thuật. Khâu SAB là vật rắn quay xung quanh trục cố định, con trượt C là vật rắn chuyển động tịnh tiến, thanh BC là vật rắn chuyển động không gian. Đặt $AB=l_1$, $BC=l_2$.



Hình 3.38

Ta chọn hệ trục vuông góc $O_1\xi_1\eta_1\zeta_1$ gắn với khâu SAB như sau: $O_1=A$, hướng ζ_1 là hướng AS, hướng ξ_1 là hướng AB, hướng η_1 được chọn sao cho $O_1\xi_1\eta_1\zeta_1$ tạo thành một hệ qui chiếu thuận.

Ta xác định một mặt phẳng E như sau: Qua điểm C vẽ một đường thẳng song song với trục quay SA của khâu 1 và một đường thẳng song song với phương chuyển động của con trượt CD. Hai đường cắt nhau này xác định mặt phẳng E.

Qua O_1 , vẽ một đường thẳng vuông góc với mặt phẳng E và cắt E tại O, nói cách khác, O chính là hình chiếu của điểm O_1 lên E. Chọn hệ trục Oxyz với: Góc O là hình chiếu của A lên E, trục z hướng theo OO_1 , trục x theo hướng song song với CD, trục y được chọn sao cho oxyz tạo thành một hệ qui chiếu thuận. Như vậy xoy nằm trên mặt phẳng E. Gọi khoảng cách từ trục x đến CD là d, khoảng cách từ O đến O_1 là h. Các khoảng cách này hoàn toàn xác định đối với một cơ cấu cụ thể. Chọn hệ tọa độ $O_2\xi_2\eta_2\zeta_2$ gắn với BC và có $O_2=B$, ξ_2 là hướng BC. Chọn η_2 sao cho mặt phẳng $O_2\xi_2\eta_2$ luôn vuông góc với mặt phẳng E. Chọn hệ tọa độ $O_3 \xi_3\eta_3\zeta_3$ tịnh tiến cùng con trượt: $O_3=C$, ξ_3 hướng theo CD, η_3 hướng theo Oz.

Nhận xét: Khâu SAB (vuông góc với trục quay AS) quay quanh trục cố định SA nên luôn nằm trên mặt phẳng Q đi qua A và vuông góc với trục quay SA. Mặt phẳng Q chứa $OA \perp E$ nên Q vuông góc với E. Theo tính chất của phép chiếu vuông góc thì hình chiếu của mặt phẳng Q lên E là một đường thẳng Q_E , tạo với trục y một góc không đổi α . Hình chiếu của một điểm bất kỳ trên $AB \in Q$ lên E cũng nằm trên đường thẳng Q_E này.

Theo định lý Grübler ta có

$$f = \sum_{i=1}^{n_j} f_{j_i} - 6n_L - f_h \quad (1)$$

Với f_{j_i} là số bậc tự do của khớp i ; n_j là số lượng khớp; n_L là số mạch vòng trong chuỗi, f_h là số bậc tự do thừa. Đối với cơ cấu này, tồn tại một bậc tự do chuyển động của khâu BC quay quanh trục của chính nó. Bậc tự do chuyển động này không ảnh hưởng gì đến mối quan hệ động học giữa đầu vào và đầu ra của cơ hệ. Vì vậy người ta gọi bậc tự do đó là bậc tự do thừa. Trong trường hợp này ta có: $f=(1+3+3+1)-6-1=1$. Như vậy, số bậc tự do chuyển động của cơ cấu $f=1$.

Ta chọn toạ độ suy rộng đủ là φ , chọn các toạ độ suy rộng dư là $\beta(\varphi)$ và $\gamma(\varphi)$. Từ hình vẽ 3.38 ta có phương trình ràng buộc chuyển động của cơ cấu dạng véc tơ

$$\overline{OA} + \overline{AB} + \overline{BC} + \overline{CO} = 0 \quad (2)$$

Chiếu phương trình véc tơ (2) lên các trục toạ độ x, y, z ta được

$$\begin{aligned} l_1 \sin \varphi \sin \alpha + l_2 \sin \gamma \cos \beta - x_C &= 0 \\ -l_1 \sin \varphi \cos \alpha + l_2 \sin \gamma \sin \beta - d &= 0 \\ h + l_1 \cos \varphi - l_2 \cos \gamma &= 0 \end{aligned}$$

Từ ba phương trình trên ta suy ra hai phương trình liên kết

$$\begin{aligned} f_1 &= h + l_1 \cos \varphi - l_2 \cos \gamma = 0 \\ f_2 &= -l_1 \sin \varphi \cos \alpha + l_2 \sin \gamma \sin \beta - d = 0 \end{aligned} \quad (3)$$

và phương trình xác định chuyển động của con trượt C

$$x_C = l_1 \sin \varphi \sin \alpha + l_2 \sin \gamma \cos \beta \quad (4)$$

b) Xác định toạ độ suy rộng dư, vận tốc và gia tốc của chúng

Đạo hàm (3) theo φ ta nhận được

$$\begin{aligned} \frac{df_1}{d\varphi} &= -l_1 \sin \varphi + l_2 \gamma' \sin \gamma = 0 \\ \frac{df_2}{d\varphi} &= -l_1 \cos \varphi \cos \alpha + l_2 \gamma' \cos \gamma \sin \beta + l_2 \beta' \sin \gamma \cos \beta = 0 \end{aligned} \quad (5)$$

Sử dụng cách biểu diễn ma trận, phương trình (5) có dạng

$$\begin{bmatrix} l_2 \sin \varphi & 0 \\ l_2 \cos \gamma \sin \beta & l_2 \sin \gamma \cos \beta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \gamma' \\ \beta' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_1 \sin \varphi \\ l_1 \cos \varphi \cos \alpha \end{bmatrix} \quad (6)$$

Nếu ta đưa vào các ký hiệu

$$\mathbf{s}' = \begin{bmatrix} \gamma' \\ \beta' \end{bmatrix}, \mathbf{J}_s = \begin{bmatrix} l_2 \sin \varphi & 0 \\ l_2 \cos \gamma \sin \beta & l_2 \sin \gamma \cos \beta \end{bmatrix}, \mathbf{d}_1 = \begin{bmatrix} l_1 \sin \varphi \\ l_1 \cos \varphi \cos \alpha \end{bmatrix}$$

thì phương trình (6) có dạng

$$\mathbf{J}_s \mathbf{s}' = \mathbf{d}_1. \quad (7)$$

Từ đó suy ra biểu thức xác định vận tốc các tọa độ suy rộng dư :

$$\dot{\mathbf{s}} = \frac{d\mathbf{s}}{dt} = \frac{d\mathbf{s}}{d\varphi} \cdot \frac{d\varphi}{dt} = \mathbf{s}' \dot{\varphi} = \mathbf{J}_s^{-1} \mathbf{d}_1 \dot{\varphi} \quad (8)$$

Đạo hàm phương trình (6) theo φ ta được

$$\begin{cases} \gamma'' l_2 \sin \gamma + l_2 \gamma'^2 \cos \gamma - l_1 \cos \varphi = 0 \\ \gamma'' l_2 \cos \gamma \sin \beta + \beta'' l_2 \sin \gamma \cos \beta - l_2 \gamma'^2 \sin \gamma \sin \beta + 2l_2 \gamma' \beta' \cos \gamma \cos \beta - \\ - l_2 \beta'^2 \sin \gamma \sin \beta + l_1 \cos \alpha \sin \varphi = 0 \end{cases}$$

hoặc viết dưới dạng ma trận

$$\begin{bmatrix} l_2 \sin \gamma & 0 \\ l_2 \cos \gamma \cos \beta & l_2 \sin \gamma \cos \beta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \gamma'' \\ \beta'' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -l_2 \gamma' \cos \gamma + l_1 \cos \varphi \\ l_2 \gamma'^2 \sin \gamma \sin \beta - 2l_2 \gamma' \beta' \cos \gamma + l_2 \beta'^2 \sin \gamma \sin \beta - l_1 \cos \alpha \sin \varphi \end{bmatrix} \quad (9)$$

Nếu ta đưa vào các ký hiệu

$$\mathbf{s}'' = \begin{bmatrix} \gamma'' \\ \beta'' \end{bmatrix}, \mathbf{d}_2 = \begin{bmatrix} -l_2 \gamma' \cos \gamma + l_1 \cos \varphi \\ l_2 \gamma'^2 \sin \gamma \sin \beta - 2l_2 \gamma' \beta' \cos \gamma + l_2 \beta'^2 \sin \gamma \sin \beta - l_1 \cos \alpha \sin \varphi \end{bmatrix}$$

thì từ (9) ta có

$$\mathbf{J}_s \mathbf{s}'' = \mathbf{d}_2 \quad (10)$$

Sau đó tìm được gia tốc các tọa độ suy rộng dư theo phương trình

$$\ddot{\mathbf{s}} = \mathbf{s}'' \dot{\varphi}^2 + \mathbf{s}' \ddot{\varphi} \quad (11)$$

Các hàm $\gamma(\varphi)$, $\beta(\varphi)$ được xác định gần đúng theo khai triển Taylor như sau

$$\begin{aligned} \gamma(\varphi_0 + \Delta\varphi) &= \gamma(\varphi_0) + \gamma'(\varphi_0)\Delta\varphi + \frac{1}{2}\gamma''(\varphi_0)\Delta\varphi^2 + \dots \\ \beta(\varphi_0 + \Delta\varphi) &= \beta(\varphi_0) + \beta'(\varphi_0)\Delta\varphi + \frac{1}{2}\beta''(\varphi_0)\Delta\varphi^2 + \dots \end{aligned} \quad (12)$$

Sử dụng các giá trị trên làm điều kiện đầu cho phép lặp Newton, ta sẽ được các giá trị chính xác hơn của các tọa độ dư này.

c) *Xác định vị trí, vận tốc, gia tốc khối tâm, vận tốc góc và gia tốc góc các khâu của cơ cấu*

◆ *Vị trí khối tâm của các khâu*

Gọi C_1 là điểm khối tâm của khâu SAB, tọa độ của C_1 trong hệ tọa độ $O_1\xi_1\eta_1\zeta_1$ là $(\xi_{11}, \eta_{11}, 0)$. Tọa độ điểm C_1 trong hệ tọa độ cố định $Oxyz$ xác định bởi phương trình

$$\begin{aligned}
x_{C_1} &= \xi_{11} \sin \varphi \sin \alpha - \eta_{11} \cos \varphi \sin \alpha \\
y_{C_1} &= -\xi_{11} \sin \varphi \cos \alpha + \eta_{11} \cos \varphi \cos \alpha \\
z_{C_1} &= h + \xi_{11} \cos \varphi + \eta_{11} \sin \varphi
\end{aligned} \tag{13}$$

Gọi C_2 là điểm khối tâm của khâu BC, tọa độ của C_2 trong hệ tọa độ $O_2\xi_2\eta_2\zeta_2$ là $(\xi_{22}, 0, 0)$. Tọa độ điểm C_2 trong hệ tọa độ cố định oxyz xác định bởi phương trình

$$\begin{aligned}
x_{C_2} &= l_1 \sin \varphi \sin \alpha + \xi_{22} \sin \gamma \cos \beta \\
y_{C_2} &= -l_1 \sin \varphi \cos \alpha + \xi_{22} \sin \gamma \sin \beta \\
z_{C_2} &= h + l_1 \cos \varphi - \xi_{22} \cos \gamma
\end{aligned} \tag{14}$$

Gọi C_3 là điểm nằm trên con trượt, trùng với điểm C. Tọa độ của C_3 trong hệ tọa độ cố định xác định theo phương trình

$$\begin{aligned}
x_{C_3} &= l_1 \sin \varphi \sin \alpha + l_2 \sin \gamma \cos \beta \\
y_{C_3} &= d \\
z_{C_3} &= 0
\end{aligned} \tag{15}$$

♦ Vận tốc khối tâm các khâu

Đạo hàm các biểu thức (13), (14), (15) theo thời gian ta có biểu thức tính vận tốc khối tâm C_1, C_2, C_3 của cơ cấu như sau

$$\begin{aligned}
\dot{x}_{C_1} &= \dot{\xi}_{11} \dot{\varphi} \cos \varphi \sin \alpha + \eta_{11} \dot{\varphi} \sin \varphi \sin \alpha \\
\dot{y}_{C_1} &= -\dot{\xi}_{11} \dot{\varphi} \cos \varphi \cos \alpha - \eta_{11} \dot{\varphi} \sin \varphi \cos \alpha \\
\dot{z}_{C_1} &= -\dot{\xi}_{11} \dot{\varphi} \sin \varphi + \eta_{11} \dot{\varphi} \cos \varphi
\end{aligned} \tag{16}$$

$$\begin{aligned}
\dot{x}_{C_2} &= l_1 \dot{\varphi} \cos \varphi \sin \alpha + \xi_{22} (\dot{\gamma} \cos \gamma \cos \beta - \dot{\beta} \sin \gamma \sin \beta) \\
\dot{y}_{C_2} &= -l_1 \dot{\varphi} \cos \varphi \cos \alpha + \xi_{22} (\dot{\gamma} \cos \gamma \sin \beta + \dot{\beta} \sin \gamma \cos \beta) \\
\dot{z}_{C_2} &= -l_1 \dot{\varphi} \sin \varphi + \xi_{22} \dot{\gamma} \sin \gamma
\end{aligned} \tag{17}$$

$$\begin{aligned}
\dot{x}_{C_3} &= l_1 \dot{\varphi} \cos \varphi \sin \alpha + l_2 (\dot{\gamma} \cos \gamma \cos \beta - \dot{\beta} \sin \gamma \sin \beta) \\
\dot{y}_{C_3} &= 0 \\
\dot{z}_{C_3} &= 0
\end{aligned} \tag{18}$$

♦ Gia tốc khối tâm các khâu

Đạo hàm các phương trình (16), (17), (18) theo t ta được

$$\begin{aligned}
\ddot{x}_{C_1} &= \ddot{\varphi} (\xi_{11} \cos \varphi \sin \alpha + \eta_{11} \sin \varphi \sin \alpha) + \dot{\varphi}^2 (-\xi_{11} \sin \varphi \sin \alpha + \eta_{11} \cos \varphi \sin \alpha) \\
\ddot{y}_{C_1} &= -\ddot{\varphi} (\xi_{11} \cos \varphi \cos \alpha + \eta_{11} \sin \varphi \cos \alpha) + \dot{\varphi}^2 (\xi_{11} \sin \varphi \cos \alpha - \eta_{11} \cos \varphi \cos \alpha) \\
\ddot{z}_{C_1} &= \ddot{\varphi} (-\xi_{11} \sin \varphi + \eta_{11} \cos \varphi) - \dot{\varphi}^2 (\xi_{11} \cos \varphi + \eta_{11} \sin \varphi)
\end{aligned} \tag{19}$$

$$\ddot{x}_{C2} = l_1 \ddot{\varphi} \cos \varphi \sin \alpha - l_1 \dot{\varphi}^2 \sin \varphi \sin \alpha + \xi_{22} (\ddot{\gamma} \cos \gamma \cos \beta - \dot{\gamma}^2 \sin \gamma \cos \beta - 2\dot{\gamma} \dot{\beta} \cos \gamma \sin \beta - \ddot{\beta} \sin \gamma \sin \beta - \dot{\beta}^2 \sin \gamma \cos \beta)$$

$$\ddot{y}_{C2} = -l_1 \ddot{\varphi} \cos \varphi \cos \alpha + l_1 \dot{\varphi}^2 \sin \varphi \cos \alpha + \xi_{22} (\ddot{\gamma} \cos \gamma \sin \beta - \dot{\gamma}^2 \sin \gamma \sin \beta + 2\dot{\gamma} \dot{\beta} \cos \gamma \cos \beta + \ddot{\beta} \sin \gamma \cos \beta - \dot{\beta}^2 \sin \gamma \sin \beta) \quad (20)$$

$$\ddot{z}_{C2} = -l_1 (\ddot{\varphi} \sin \varphi + \dot{\varphi}^2 \cos \varphi) + \xi_{22} (\ddot{\gamma} \sin \gamma + \dot{\gamma}^2 \cos \gamma)$$

$$\ddot{x}_{C3} = l_1 \ddot{\varphi} \cos \varphi \sin \alpha - l_1 \dot{\varphi}^2 \sin \varphi \sin \alpha + l_2 (\ddot{\gamma} \cos \gamma \cos \beta - \dot{\gamma}^2 \sin \gamma \cos \beta - 2\dot{\gamma} \dot{\beta} \cos \gamma \sin \beta - \ddot{\beta} \sin \gamma \sin \beta - \dot{\beta}^2 \sin \gamma \cos \beta) \quad (21)$$

♦ Vận tốc góc và gia tốc góc các khâu của cơ cấu

Giả sử khâu dẫn quay với vận tốc góc $\omega_1 = \dot{\varphi}$, gia tốc $\varepsilon_1 = \ddot{\varphi}$, từ hình vẽ 4.36 ta có

$$\omega_1 = \begin{bmatrix} \omega_{1x} \\ \omega_{1y} \\ \omega_{1z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \alpha \\ \sin \alpha \\ 0 \end{bmatrix} \dot{\varphi}, \quad \varepsilon_1 = \begin{bmatrix} \cos \alpha \\ \sin \alpha \\ 0 \end{bmatrix} \ddot{\varphi} \quad (22)$$

$$\omega_2 = \begin{bmatrix} \omega_{2x} \\ \omega_{2y} \\ \omega_{2z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \gamma' \sin \beta \\ -\gamma' \cos \beta \\ \beta' \end{bmatrix} \dot{\varphi}, \quad \varepsilon_2 = \begin{bmatrix} \gamma' \sin \beta \\ -\gamma' \cos \beta \\ \beta' \end{bmatrix} \ddot{\varphi} + \begin{bmatrix} \gamma'' \sin \beta + \gamma' \beta' \cos \beta \\ -\gamma'' \cos \beta + \gamma' \beta' \sin \beta \\ \beta'' \end{bmatrix} \dot{\varphi}^2 \quad (23)$$

$$\omega_3 = 0, \quad \varepsilon_3 = 0.$$

Chương 4

ĐỘNG LỰC HỌC VẬT RẮN

Trong chương này trước hết chúng ta trình bày các biểu thức tính tenxơ quán tính khối của vật rắn và các biểu thức tính các đại lượng động lực cơ bản như động lượng, mômen động lượng, động năng của vật rắn. Trên cơ sở định lý chuyển động khối tâm và định lý biến thiên mômen động lượng, thiết lập các phương trình vi phân chuyển động của một vật rắn trong không gian. Cuối chương trình bày bài toán thu gọn hệ lực quán tính của vật rắn chuyển động tùy ý trong không gian.

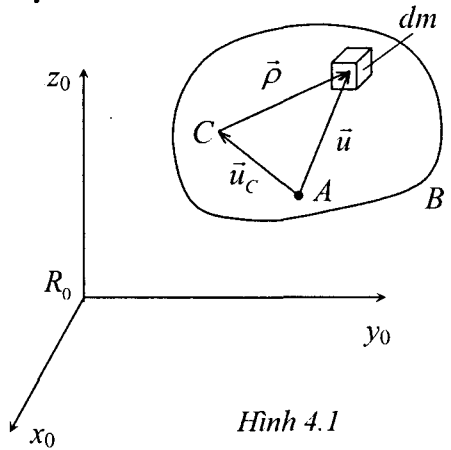
§1 TENXƠ QUÁN TÍNH KHỐI CỦA VẬT RẮN

1.1 Định nghĩa và biểu thức tính

a) *Định nghĩa.* Lấy một điểm A bất kỳ thuộc vật rắn B (hình 4.1). Tenxơ quán tính khối của vật rắn B đối với điểm A được định nghĩa bởi hệ thức sau

$$\vec{I}_A = \int_B (\vec{u}^2 \vec{E} - \vec{u} \otimes \vec{u}) dm \quad (1.1)$$

Trong đó \vec{u} là véctơ từ điểm A đến điểm P tùy ý của vật rắn, \vec{E} là tenxơ hạng hai đơn vị, dm là khối lượng một phần tử nhỏ của vật rắn.



Theo định nghĩa (1.1), tenxơ quán tính khối của vật rắn đối với điểm A là một tenxơ hạng hai.

b) *Biểu thức tính.* Giả sử trong hệ tọa độ R_1 gắn vào điểm A của vật rắn, véctơ đại số $\mathbf{u}^{(1)}$ tương ứng với véctơ hình học \vec{u} có dạng $\mathbf{u}^{(1)} = [u_1, u_2, u_3]^T$. Theo chương 1, ma trận các tọa độ của tenxơ quán tính khối của vật rắn đối với điểm A trong hệ tọa độ này có dạng

$$\mathbf{I}_A^{(1)} = \int_B (\mathbf{u}^{(1)T} \mathbf{u}^{(1)} \mathbf{E}_3 - \mathbf{u}^{(1)} \mathbf{u}^{(1)T}) dm \quad (1.2)$$

Chú ý đến công thức (7.26) chương 1, ta có

$$\tilde{\mathbf{a}}\mathbf{b} = \mathbf{b}\mathbf{a}^T - (\mathbf{a}^T \mathbf{b}) \mathbf{E}_3. \quad (1)$$

Từ đó suy ra

$$\tilde{\mathbf{u}}^{(1)} \tilde{\mathbf{u}}^{(1)} = \mathbf{u}^{(1)} \mathbf{u}^{(1)T} - (\mathbf{u}^{(1)T} \mathbf{u}^{(1)}) \mathbf{E}_3 \quad (2)$$

Thế (2) vào công thức (1.2) ta được

$$\mathbf{I}_A^{(1)} = - \int_B \tilde{\mathbf{u}}^{(1)} \tilde{\mathbf{u}}^{(1)} dm \quad (1.3)$$

Do $\tilde{\mathbf{u}}^T = -\tilde{\mathbf{u}}$, nên biểu thức (1.3) có thể viết lại dưới dạng sau

$$\mathbf{I}_A^{(1)} = \int_B \tilde{\mathbf{u}}^{(1)T} \tilde{\mathbf{u}}^{(1)} dm \quad (1.4)$$

Như thế ta có ba công thức (1.2), (1.3) và (1.4) để tính ma trận $\mathbf{I}_A^{(1)}$. Nhờ công thức (1.4) ta dễ dàng tính được

$$\begin{aligned} \mathbf{I}_A^{(1)} &= \int_B \begin{bmatrix} 0 & u_3 & -u_2 \\ -u_3 & 0 & u_1 \\ u_2 & -u_1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -u_3 & u_2 \\ u_3 & 0 & -u_1 \\ -u_2 & u_1 & 0 \end{bmatrix} dm \\ &= \int_B \begin{bmatrix} u_2^2 + u_3^2 & -u_1 u_2 & -u_1 u_3 \\ -u_1 u_2 & u_1^2 + u_3^2 & -u_2 u_3 \\ -u_1 u_3 & -u_2 u_3 & u_1^2 + u_2^2 \end{bmatrix} dm \end{aligned}$$

Nếu ta đưa vào các ký hiệu

$$\begin{aligned} I_{11} &= \int_B (u_2^2 + u_3^2) dm, & I_{21} &= I_{12} = - \int_B u_1 u_2 dm \\ I_{13} &= I_{31} = - \int_B u_1 u_3 dm, & I_{22} &= \int_B (u_3^2 + u_1^2) dm \\ I_{33} &= \int_B (u_1^2 + u_2^2) dm, & I_{23} &= I_{32} = - \int_B u_2 u_3 dm \end{aligned} \quad (1.5)$$

thì ma trận (1.4) có dạng

$$\mathbf{I}_A^{(1)} = \begin{bmatrix} I_{11} & I_{12} & I_{13} \\ I_{21} & I_{22} & I_{23} \\ I_{31} & I_{32} & I_{33} \end{bmatrix} \quad (1.6)$$

Sau đây đôi khi ta sẽ gọi tắt ma trận các toạ độ của tenxơ quán tính khối của vật rắn đối với điểm A trong hệ qui chiếu R_1 là ma trận quán tính khối của vật rắn tại điểm A. Ma trận này phụ thuộc vào hệ qui chiếu R_1 . Nếu hệ qui chiếu R_1 gắn liền vào vật rắn B thì $\mathbf{I}_A^{(1)}$ là ma trận có các phần tử là các hằng số. Nếu hệ qui chiếu R_1 không gắn liền vào vật rắn B thì $\mathbf{I}_A^{(1)}$ là ma trận có các phần tử là các hàm của các toạ độ suy rộng.

Chú ý. Trong hệ toạ độ cố định (hệ qui chiếu quán tính R_0) để đơn giản ta ký hiệu $\mathbf{u}^{(0)} = \mathbf{u}$ và do đó ký hiệu $\mathbf{I}_A^{(0)} = \mathbf{I}_A$.

1.2 Phép dịch chuyển song song các hệ qui chiếu

Giả sử \vec{I}_A là tenxơ quán tính khối của vật rắn B đối với điểm A của vật rắn B, \vec{I}_C là tenxơ quán tính khối của vật rắn B đối với khối tâm C của nó. Ta tìm công thức liên hệ giữa \vec{I}_A và \vec{I}_C . Theo công thức định nghĩa (1.1) tenxơ quán tính khối của vật rắn B đối với khối tâm C của nó được biểu diễn bởi công thức (hình 4.1)

$$\vec{I}_C = \int_B (\vec{\rho}^2 \vec{E} - \vec{\rho} \otimes \vec{\rho}) dm$$

Từ hình vẽ (4.1) ta có $\vec{u} = \vec{u}_C + \vec{\rho}$. Từ đó ta dễ dàng tính được

$$\begin{aligned} \vec{I}_A &= \int_B (\vec{u}^2 \vec{E} - \vec{u} \otimes \vec{u}) dm = \int_B [(\vec{u}_C + \vec{\rho})^2 \vec{E} - (\vec{u}_C + \vec{\rho}) \otimes (\vec{u}_C + \vec{\rho})] dm \\ &= \int_B [(\vec{u}_C^2 + 2\vec{u}_C \cdot \vec{\rho} + \vec{\rho}^2) \vec{E} - (\vec{u}_C \otimes \vec{u}_C + \vec{u}_C \otimes \vec{\rho} + \vec{\rho} \otimes \vec{u}_C + \vec{\rho} \otimes \vec{\rho})] dm \\ &= \int_B (\vec{\rho}^2 \vec{E} - \vec{\rho} \otimes \vec{\rho}) dm + \vec{u}_C^2 \vec{E} \int_B dm - (\vec{u}_C \otimes \vec{u}_C) \int_B dm + \\ &\quad + 2\vec{u}_C \cdot (\int_B \vec{\rho} dm) \vec{E} - \vec{u}_C \otimes \int_B \vec{\rho} dm - (\int_B \vec{\rho} dm) \otimes \vec{u}_C \end{aligned}$$

Theo định nghĩa khối tâm vật rắn ta có $\int_B \vec{\rho} dm = \vec{\rho}_C m = 0$. Do đó ta có

$$\vec{I}_A = \vec{I}_C + m(\vec{u}_C^2 \vec{E} - \vec{u}_C \otimes \vec{u}_C) \quad (1.7)$$

Ta phát biểu kết quả trên dưới dạng một định lý cho dễ nhớ như sau:

Định lý Huyghen-Steiner: Tenxơ quán tính khối của vật rắn đối với một điểm A tùy ý thuộc vật rắn và tenxơ khối của vật rắn đối với khối tâm C của nó liên hệ với nhau bởi hệ thức (1.7).

Khi tính toán cụ thể, ta thường gắn vào điểm A một hệ tọa độ vuông góc và gắn vào C một hệ tọa độ vuông góc có các cạnh song song với các cạnh của hệ tọa độ gắn vào A. Khi đó dạng ma trận của phương trình (1.7) trong các hệ tọa độ này là

$$\mathbf{I}_A = \mathbf{I}_C + m(\mathbf{u}_C^T \mathbf{u}_C \mathbf{E}_3 - \mathbf{u}_C \mathbf{u}_C^T) \quad (1.8)$$

Theo qui ước ở đoạn trên, ma trận các tọa độ của tenxơ quán tính khối của vật rắn (1.8) được gọi tắt là ma trận quán tính khối của vật rắn. Dạng chi tiết của ma trận (1.8) là

$$\begin{bmatrix} I_{11}^A & I_{12}^A & I_{13}^A \\ I_{21}^A & I_{22}^A & I_{23}^A \\ I_{31}^A & I_{32}^A & I_{33}^A \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_{11}^C & I_{12}^C & I_{13}^C \\ I_{21}^C & I_{22}^C & I_{23}^C \\ I_{31}^C & I_{32}^C & I_{33}^C \end{bmatrix} + m \begin{bmatrix} u_{C2}^2 + u_{C3}^2 & -u_{C1}u_{C2} & -u_{C1}u_{C3} \\ -u_{C2}u_{C1} & u_{C3}^2 + u_{C1}^2 & -u_{C2}u_{C3} \\ -u_{C3}u_{C1} & -u_{C3}u_{C2} & u_{C1}^2 + u_{C2}^2 \end{bmatrix}$$

Nếu ta đưa vào các ký hiệu

$$h_1^2 = u_{C_2}^2 + u_{C_3}^2, \quad h_2^2 = u_{C_3}^2 + u_{C_1}^2, \quad h_3^2 = u_{C_1}^2 + u_{C_2}^2 \quad (1.9)$$

thì từ phương trình ma trận trên ta nhận được công thức Huyghen-Steiner quen biết

$$\begin{aligned} I_{ii}^A &= I_{ii}^C + mh_i^2 \\ I_{ij}^A &= I_{ij}^C - mu_{C_i}u_{C_j} \quad (\text{khi } i \neq j) \end{aligned} \quad (1.10)$$

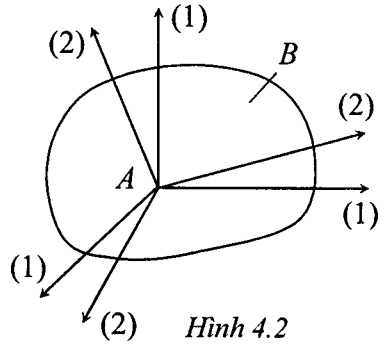
1.3 Phép quay các hệ qui chiếu

Cho R_1 và R_2 là hai hệ qui chiếu cùng gốc là A (hình 4.2). Giả sử $\vec{e}^{(1)}$ là cơ sở của hệ qui chiếu R_1 , $\vec{e}^{(2)}$ là cơ sở của hệ qui chiếu R_2 . Theo công thức (1.13) chương 2, hệ thức liên hệ giữa hai cơ sở này là

$$\vec{e}^{(2)} = \mathbf{A}^T \vec{e}^{(1)} \quad (1.11)$$

Trong đó \mathbf{A} là ma trận quay hệ R_1 sang hệ R_2 . Theo công thức (1.1), tenxơ quán tính khối của vật rắn B đối với điểm A là hệ thức

$$\vec{I}_A = \int_B (\vec{u}^2 \vec{E} - \vec{u} \otimes \vec{u}) dm \quad (1.12)$$



Hình 4.2

Ta ký hiệu ma trận các tọa độ của tenxơ quán tính khối \vec{I}_A trong hệ qui chiếu R_1 là $\mathbf{I}_A^{(1)}$, trong hệ qui chiếu R_2 là $\mathbf{I}_A^{(2)}$. Theo công thức (7.18) chương 1, ta có các công thức sau

$$\vec{I}_A = \vec{e}^{(1)T} \mathbf{I}_A^{(1)} \vec{e}^{(1)} \quad (1.13)$$

$$\vec{I}_A = \vec{e}^{(2)T} \mathbf{I}_A^{(2)} \vec{e}^{(2)} \quad (1.14)$$

Thế biểu thức (1.11) vào (1.14) ta được

$$\vec{I}_A = \vec{e}^{(1)T} \mathbf{A} \mathbf{I}_A^{(2)} \mathbf{A}^T \vec{e}^{(1)} \quad (1.15)$$

Từ các hệ thức (1.13) và (1.15) ta suy ra công thức liên hệ giữa ma trận các tọa độ của tenxơ quán tính khối trong hai hệ qui chiếu có cùng gốc A

$$\mathbf{I}_A^{(1)} = \mathbf{A} \mathbf{I}_A^{(2)} \mathbf{A}^T \quad (1.16)$$

Ngược lại ta có hệ thức

$$\mathbf{I}_A^{(2)} = \mathbf{A}^T \mathbf{I}_A^{(1)} \mathbf{A} \quad (1.17)$$

Thí dụ 4.1. Cho biết $R_2 = Ax_2y_2z_2$ là hệ tọa độ vuông góc có gốc đặt tại A và ba trục là các trục quán tính chính. Hãy tìm ma trận quán tính của vật rắn đối với điểm A trong hệ qui chiếu $R_1 = Ax_1y_1z_1$. Cho biết ma trận quán tính của vật rắn đối với hệ qui chiếu $R_2 = Ax_2y_2z_2$ và các góc giữa hai hệ trục là $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i$ ($i=1,2,3$) (hình 4.2).

Lời giải. Theo giả thiết R_2 là hệ trục quán tính chính, ta có

$$\mathbf{I}_A^{(2)} = \begin{bmatrix} I_1^{(2)} & 0 & 0 \\ 0 & I_2^{(2)} & 0 \\ 0 & 0 & I_3^{(2)} \end{bmatrix} \quad (1)$$

Bảng xác định ma trận cosin chỉ hướng có dạng như sau:

	x_2	y_2	z_2
x_1	$\cos\alpha_1$	$\cos\beta_1$	$\cos\gamma_1$
y_1	$\cos\alpha_2$	$\cos\beta_2$	$\cos\gamma_2$
z_1	$\cos\alpha_3$	$\cos\beta_3$	$\cos\gamma_3$

Ma trận cosin chỉ hướng của hệ quy chiếu R_2 đối với hệ quy chiếu R_1 là

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \cos\alpha_1 & \cos\beta_1 & \cos\gamma_1 \\ \cos\alpha_2 & \cos\beta_2 & \cos\gamma_2 \\ \cos\alpha_3 & \cos\beta_3 & \cos\gamma_3 \end{bmatrix}$$

Theo công thức (1.16) ta có

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} I_{xx}^{(1)} & I_{yy}^{(1)} & I_{zz}^{(1)} \\ I_{yx}^{(1)} & I_{yy}^{(1)} & I_{yz}^{(1)} \\ I_{zx}^{(1)} & I_{zy}^{(1)} & I_{zz}^{(1)} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \cos\alpha_1 & \cos\beta_1 & \cos\gamma_1 \\ \cos\alpha_2 & \cos\beta_2 & \cos\gamma_2 \\ \cos\alpha_3 & \cos\beta_3 & \cos\gamma_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1^{(2)} & 0 & 0 \\ 0 & I_2^{(2)} & 0 \\ 0 & 0 & I_3^{(2)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\alpha_1 & \cos\alpha_2 & \cos\alpha_3 \\ \cos\beta_1 & \cos\beta_2 & \cos\beta_3 \\ \cos\gamma_1 & \cos\gamma_2 & \cos\gamma_3 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \cos\alpha_1 & \cos\beta_1 & \cos\gamma_1 \\ \cos\alpha_2 & \cos\beta_2 & \cos\gamma_2 \\ \cos\alpha_3 & \cos\beta_3 & \cos\gamma_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1^{(2)} \cos\alpha_1 & I_1^{(2)} \cos\alpha_2 & I_1^{(2)} \cos\alpha_3 \\ I_2^{(2)} \cos\beta_1 & I_2^{(2)} \cos\beta_2 & I_2^{(2)} \cos\beta_3 \\ I_3^{(2)} \cos\gamma_1 & I_3^{(2)} \cos\gamma_2 & I_3^{(2)} \cos\gamma_3 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Từ đó suy ra:

$$\begin{aligned} I_{xx}^{(1)} &= I_1^{(2)} \cos^2 \alpha_1 + I_2^{(2)} \cos^2 \beta_1 + I_3^{(2)} \cos^2 \gamma_1 \\ I_{yy}^{(1)} &= I_1^{(2)} \cos^2 \alpha_2 + I_2^{(2)} \cos^2 \beta_2 + I_3^{(2)} \cos^2 \gamma_2 \\ I_{zz}^{(1)} &= I_1^{(2)} \cos^2 \alpha_3 + I_2^{(2)} \cos^2 \beta_3 + I_3^{(2)} \cos^2 \gamma_3 \end{aligned} \quad (1.18)$$

$$\begin{aligned} I_{yy}^{(1)} &= I_{yx}^{(1)} = I_1^{(2)} \cos\alpha_1 \cos\alpha_2 + I_2^{(2)} \cos\beta_1 \cos\beta_2 + I_3^{(2)} \cos\gamma_1 \cos\gamma_2 \\ I_{xz}^{(1)} &= I_{zx}^{(1)} = I_1^{(2)} \cos\alpha_1 \cos\alpha_3 + I_2^{(2)} \cos\beta_1 \cos\beta_3 + I_3^{(2)} \cos\gamma_1 \cos\gamma_3 \\ I_{yz}^{(1)} &= I_{zy}^{(1)} = I_1^{(2)} \cos\alpha_2 \cos\alpha_3 + I_2^{(2)} \cos\beta_2 \cos\beta_3 + I_3^{(2)} \cos\gamma_2 \cos\gamma_3 \end{aligned} \quad (1.19)$$

Chú ý: Trong giáo trình này ta sử dụng định nghĩa

$$I_{yy} = - \int_B xy dm; \quad I_{xz} = - \int_B xz dm; \quad I_{yz} = - \int_B yz dm$$

Nếu ta sử dụng định nghĩa

$$I_{xy} = \int_B xy dm; I_{xz} = \int_B xz dm; I_{yz} = \int_B yz dm$$

như một số tài liệu khác, công thức (1.19) sẽ có dấu ngược lại

$$\begin{aligned} I_{xy}^{(1)} &= I_{yx}^{(1)} = -I_1^{(2)} \cos \alpha_1 \cos \alpha_2 - I_2^{(2)} \cos \beta_1 \cos \beta_2 - I_3^{(2)} \cos \gamma_1 \cos \gamma_2 \\ I_{xz}^{(1)} &= I_{zx}^{(1)} = -I_1^{(2)} \cos \alpha_1 \cos \alpha_3 - I_2^{(2)} \cos \beta_1 \cos \beta_3 - I_3^{(2)} \cos \gamma_1 \cos \gamma_3 \\ I_{yz}^{(1)} &= I_{zy}^{(1)} = -I_1^{(2)} \cos \alpha_2 \cos \alpha_3 - I_2^{(2)} \cos \beta_2 \cos \beta_3 - I_3^{(2)} \cos \gamma_2 \cos \gamma_3 \end{aligned} \quad (1.20)$$

Thí dụ 4.2. Các trục toạ độ y và z của hình trụ tạo thành với trục quán tính chính các góc β_2, γ_2 và β_3, γ_3 (hình 4.3). Hãy xác định I_z và I_{yz} .

Lời giải. Từ hình vẽ ta có $\alpha_3 = \alpha_2 = \frac{\pi}{2}$. Sử

dụng công thức (1.18) ta có

$$I_z = I_1 \cos^2 \alpha_3 + I_2 \cos^2 \beta_3 + I_3 \cos^2 \gamma_3$$

$$I_z = I_1 \cos^2 \frac{\pi}{2} + I_2 \cos^2 \left(\frac{\pi}{2} - \gamma_3 \right) + I_3 \cos^2 \gamma_3$$

Do $\cos \left(\frac{\pi}{2} - \gamma_3 \right) = \sin \gamma_3$ nên ta có

$$I_z = I_2 \sin^2 \gamma_3 + I_3 \cos^2 \gamma_3 \quad (1)$$

Áp dụng công thức (1.19) ta có

$$I_{xy} = -I_1 \cos \alpha_3 \cos \alpha_2 - I_2 \cos \beta_3 \cos \beta_2 - I_3 \cos \gamma_3 \cos \gamma_2$$

$$I_{xy} = -0 - I_2 \cos \left(\frac{\pi}{2} - \gamma_3 \right) \cos \gamma_2 - I_3 \cos \gamma_3 \cos \gamma_2$$

Do $\cos \left(\frac{\pi}{2} + \gamma_3 \right) = -\sin \gamma_3$, $\cos \left(\frac{\pi}{2} - \gamma_3 \right) = \sin \gamma_3$, ta suy ra

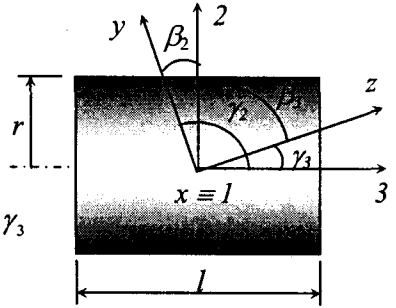
$$I_{xy} = -I_2 \sin \gamma_3 \cos \gamma_2 + I_3 \cos \gamma_3 \sin \gamma_2$$

Vậy ta được

$$I_{yz} = \frac{I_3 - I_2}{2} \sin 2\gamma_3 \quad (2)$$

Đối với hình trụ tròn khối lượng m , bán kính r , dài l , ta có các công thức xác định mômen quán tính khối

$$I_3 = \frac{1}{2} mr^2, I_2 = m \left(\frac{r^2}{4} + \frac{l^2}{12} \right) \quad (3)$$



Hình 4.3

Thay (3) vào (1) ta được

$$\begin{aligned} I_z &= \left(\frac{mr^2}{4} + \frac{ml^2}{12} \right) \sin^2 \gamma_3 + \frac{mr^2}{2} \cos^2 \gamma_3 \\ &= \frac{mr^2}{2} (\cos^2 \gamma_3 + \sin^2 \gamma_3) - \left(\frac{mr^2}{4} + \frac{ml^2}{12} \right) \sin^2 \gamma_3 \\ &= \frac{mr^2}{2} - \left(\frac{mr^2}{4} + \frac{ml^2}{12} \right) \sin^2 \gamma_3 \end{aligned}$$

Thế (3) vào (2) ta được

$$I_{zv} = \frac{1}{2} \left(\frac{mr^2}{2} - \frac{mr^2}{4} - \frac{ml^2}{12} \right) \sin 2\gamma_3 = \frac{m}{8} \left(r^2 - \frac{l^2}{3} \right) \sin 2\gamma_3 \quad (4)$$

§2 ĐỘNG LƯỢNG, MÔMEN ĐỘNG LƯỢNG VÀ ĐỘNG NĂNG CỦA VẬT RẮN

2.1 Biểu thức động lượng của vật rắn

Biểu thức động lượng của vật rắn B trong hệ qui chiếu R có dạng

$$\begin{aligned} \vec{p} &= \int_B \vec{v} dm = \int_B (\vec{v}_A + \vec{\omega} \times \vec{u}) dm \\ \vec{p} &= \vec{v}_A \int_B dm + \vec{\omega} \times \int_B \vec{u} dm \\ &= m\vec{v}_A + m\vec{\omega} \times \vec{u}_C = m(\vec{v}_A + \vec{\omega} \times \vec{u}_C) \\ \vec{p} &= m\vec{v}_C \end{aligned} \quad (2.1)$$

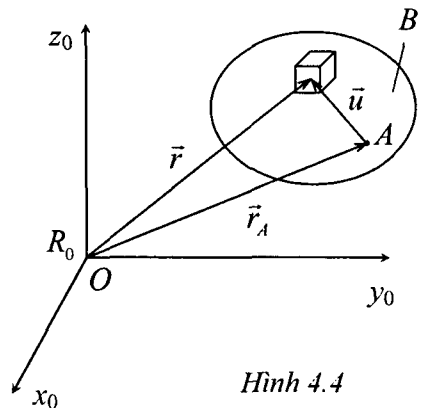
Như vậy, động lượng của vật rắn là một đại lượng véctơ bằng tích khối lượng của vật rắn với vận tốc khối tâm của vật rắn.

2.2 Biểu thức mômen động lượng vật rắn của đối với một điểm thuộc vật

Trong mục này ta thiết lập biểu thức tính mômen động lượng của vật rắn B đối với một điểm A nào đó của vật rắn (hình 4.4). Mômen động lượng của vật rắn B đối với điểm A được định nghĩa bởi biểu thức sau

$$\vec{l}_A = \int_B \vec{u} \times \vec{v} dm \quad (2.2)$$

Do công thức $\vec{v} = \vec{v}_A + \vec{\omega} \times \vec{u}$ nên ta có



Hình 4.4

$$\begin{aligned}
\vec{l}_A &= \int_B \vec{u} \times (\vec{v}_A + \vec{\omega} \times \vec{u}) dm \\
&= \int_B \vec{u} \times \vec{v}_A dm + \int_B \vec{u} \times (\vec{\omega} \times \vec{u}) dm \\
&= \left(\int_B \vec{u} dm \right) \times \vec{v}_A + \int_B \vec{u} \times (\vec{\omega} \times \vec{u}) dm \\
&= m\vec{u}_C \times \vec{v}_A + \int_B \vec{u} \times (\vec{\omega} \times \vec{u}) dm
\end{aligned} \tag{2.3}$$

Theo công thức (7.29) chương 1

$$\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{v}) = (\vec{b} \otimes \vec{a} - \vec{a} \cdot \vec{b} \vec{E}) \cdot \vec{v}$$

ta có

$$\vec{u} \times (\vec{\omega} \times \vec{u}) = -\vec{u} \times (\vec{u} \times \vec{\omega}) = (\vec{u}^2 \vec{E} - \vec{u} \otimes \vec{u}) \cdot \vec{\omega}$$

Do đó số hạng cuối trong (2.3) có dạng

$$\int_B \vec{u} \times (\vec{\omega} \times \vec{u}) dm = \left[\int_B (\vec{u}^2 \vec{E} - \vec{u} \otimes \vec{u}) dm \right] \cdot \vec{\omega} = \vec{I}_A \cdot \vec{\omega} \tag{2.4}$$

Thế biểu thức (2.4) vào biểu thức (2.3) ta được biểu thức mômen động lượng của vật rắn B đối với điểm A thuộc vật

$$\vec{l}_A = m\vec{u}_C \times \vec{v}_A + \vec{I}_A \cdot \vec{\omega} \tag{2.5}$$

Ta xét một vài trường hợp riêng:

- Nếu ta chọn điểm A là khối tâm C của vật rắn B thì $\vec{u}_C = 0$. Khi đó biểu thức mômen động lượng của vật rắn B đối với điểm C có dạng tương đối đơn giản như sau

$$\vec{l}_C = \vec{I}_C \cdot \vec{\omega} \tag{2.6}$$

- Khi vật rắn B chuyển động quay quanh một điểm O cố định, ta chọn A là điểm cố định O . Do $\vec{v}_O = 0$, nên biểu thức mômen động lượng của vật rắn B quay quanh một điểm O cố định có dạng

$$\vec{l}_O = \vec{I}_O \cdot \vec{\omega} \tag{2.7}$$

Chiếu các phương trình véctơ lên hệ tọa độ $R_1 = Axyz$ gắn liền vào vật rắn B , các biểu thức (2.5), (2.6) và (2.7) có dạng ma trận như sau

$$\vec{l}_A^{(1)} = m\vec{u}_C^{(1)} \mathbf{v}_A^{(1)} + \mathbf{I}_A^{(1)} \boldsymbol{\omega}^{(1)} \tag{2.8}$$

$$\vec{l}_C^{(1)} = \mathbf{I}_C^{(1)} \boldsymbol{\omega}^{(1)} \tag{2.9}$$

$$\vec{l}_O^{(1)} = \mathbf{I}_O^{(1)} \boldsymbol{\omega} \tag{2.10}$$

Biểu thức (2.9) có thể viết lại dưới dạng ma trận thông thường như sau

$$\begin{bmatrix} l_{Cx} \\ l_{Cy} \\ l_{Cz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_{xx} & I_{xy} & I_{xz} \\ I_{yx} & I_{yy} & I_{yz} \\ I_{zx} & I_{zy} & I_{zz} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{bmatrix} \quad (2.11)$$

Theo (2.11) vectơ mômen động lượng của vật rắn đối với khối tâm C của nó là ảnh xạ của vectơ vận tốc góc với ma trận của phép ánh xạ này là ma trận các toạ độ của tenxơ quán tính. Nếu ta ký hiệu $\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z$ là các vectơ đơn vị trên các trục toạ độ (x, y, z) gắn liền vào vật rắn, ta có thể viết lại biểu thức mômen động lượng của vật rắn B quay quanh một điểm O cố định dưới dạng

$$\vec{l}_O = \begin{bmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_{xx} & I_{xy} & I_{xz} \\ I_{yx} & I_{yy} & I_{yz} \\ I_{zx} & I_{zy} & I_{zz} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{bmatrix} \quad (2.12)$$

2.3 Biểu thức mômen động lượng vật rắn của đối với một điểm không thuộc vật

Trong một số bài toán nghiên cứu và ứng dụng ta cần thiết tính mômen động lượng của vật rắn B đối với một điểm O cố định không thuộc vật rắn (hình 4.5). Mômen động lượng của vật rắn B đối với điểm O cố định được định nghĩa bởi biểu thức sau

$$\vec{l}_A = \int_B \vec{r} \times \vec{v} dm \quad (2.13)$$

Do công thức $\vec{r} = \vec{r}_A + \vec{u}$, $\vec{v} = \vec{v}_A + \vec{\omega} \times \vec{u}$ nên ta có

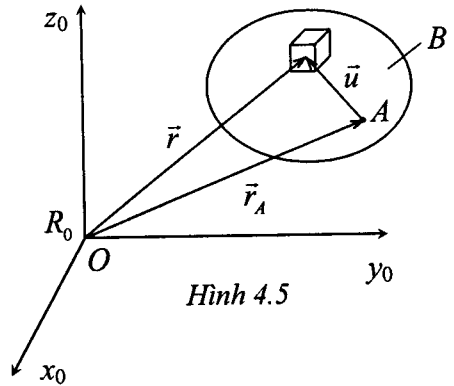
$$\begin{aligned} \vec{l}_O &= \int_B (\vec{r}_A + \vec{u}) \times (\vec{v}_A + \vec{\omega} \times \vec{u}) dm \\ &= \vec{r}_A \times \int_B (\vec{v}_A + \vec{\omega} \times \vec{u}) dm + \left(\int_B \vec{u} dm \right) \times \vec{v}_A + \int_B \vec{u} \times (\vec{\omega} \times \vec{u}) dm \\ &= \vec{r}_A \times (\vec{v}_A + \vec{\omega} \times \vec{u}_C) m + m \vec{u}_C \times \vec{v}_A + \int_B \vec{u} \times (\vec{\omega} \times \vec{u}) dm \end{aligned} \quad (2.14)$$

Theo công thức (7.29) chương 1

$$\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{v}) = (\vec{b} \otimes \vec{a} - \vec{a} \cdot \vec{b} \vec{E}) \cdot \vec{v}$$

ta có

$$\vec{u} \times (\vec{\omega} \times \vec{u}) = -\vec{u} \times (\vec{u} \times \vec{\omega}) = (\vec{u}^2 \vec{E} - \vec{u} \otimes \vec{u}) \cdot \vec{\omega} \quad (2.15)$$



Hình 4.5

Do đó số hạng cuối trong (2.14) có dạng

$$\int_B \vec{u} \times (\vec{\omega} \times \vec{u}) dm = \left[\int_B (\vec{u}^2 \vec{E} - \vec{u} \otimes \vec{u}) dm \right] \cdot \vec{\omega} = \vec{I}_A \cdot \vec{\omega} \quad (2.16)$$

Thế biểu thức (2.16) vào biểu thức (2.14) ta được biểu thức mômen động lượng của vật rắn B đối với điểm O cố định không thuộc vật rắn

$$\vec{l}_O = \vec{r}_A \times (\vec{v}_A + \vec{\omega} \times \vec{u}_C) m + m \vec{u}_C \times \vec{v}_A + \vec{I}_A \cdot \vec{\omega} \quad (2.17)$$

Ta xét một vài trường hợp riêng:

- Nếu ta chọn điểm A là khối tâm C của vật rắn B thì $\vec{u}_C = 0$. Chú ý đến công thức (2.6) ta có biểu thức mômen động lượng của vật rắn B đối với điểm O cố định ở ngoài vật rắn

$$\vec{l}_O = \vec{r}_C \times m \vec{v}_C + \vec{I}_C \cdot \vec{\omega} = \vec{r}_C \times m \vec{v}_C + \vec{I}_C \quad (2.18)$$

- Khi vật rắn B chuyển động quay quanh một điểm O cố định, ta chọn A là điểm cố định O . Do $\vec{r}_A = 0$, $\vec{v}_A = 0$, từ (2.17) ta suy ra biểu thức mômen động lượng của vật rắn B quay quanh một điểm O cố định có dạng

$$\vec{l}_O = \vec{I}_O \cdot \vec{\omega} \quad (2.19)$$

2.4 Biểu thức động năng của vật rắn

Động năng của vật rắn là đại lượng vô hướng, được xác định bởi công thức sau

$$T = \frac{1}{2} \int_B \vec{v}^2 dm = \frac{1}{2} \int_B \dot{\vec{r}}^2 dm \quad (2.20)$$

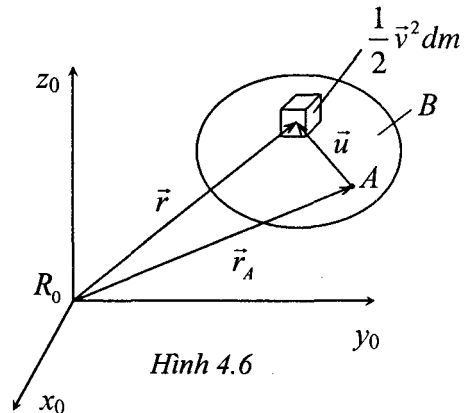
Lấy một điểm A tùy ý thuộc vật rắn B (hình 4.6), ta có công thức

$$\dot{\vec{r}} = \vec{v} = \vec{v}_A + \vec{\omega} \times \vec{u} \quad (2.21)$$

Trong đó \vec{v}_A là vận tốc của điểm A , $\vec{\omega}$ là vận tốc góc của vật rắn B tính trong hệ qui chiếu quán tính R_0 , \vec{u} là vectơ định vị của chất điểm tùy ý thuộc vật rắn đối với điểm A .

Thế biểu thức (2.21) vào biểu thức (2.20) ta được

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2} \int_B (\vec{v}_A + \vec{\omega} \times \vec{u})^2 dm = \frac{1}{2} \int_B [\vec{v}_A^2 + 2\vec{v}_A \cdot (\vec{\omega} \times \vec{u}) + (\vec{\omega} \times \vec{u})^2] dm \\ &= \frac{1}{2} \vec{v}_A^2 \int_B dm + \vec{v}_A \cdot (\vec{\omega} \times \int_B \vec{u} dm) + \frac{1}{2} \int_B (\vec{\omega} \times \vec{u})^2 dm \end{aligned} \quad (2.22)$$



Chú ý đến công thức (2.15) chương 1

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = \vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c})$$

ta có

$$(\vec{\omega} \times \vec{u})^2 = (\vec{\omega} \times \vec{u}) \cdot (\vec{\omega} \times \vec{u}) = \vec{\omega} \cdot [\vec{u} \times (\vec{\omega} \times \vec{u})]$$

Sử dụng công thức (7.29) chương 1

$$\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{v}) = (\vec{b} \otimes \vec{a} - \vec{a} \cdot \vec{b} \vec{E}) \vec{v}$$

ta có

$$\vec{u} \times (\vec{\omega} \times \vec{u}) = -\vec{u} \times (\vec{u} \times \vec{\omega}) = (\vec{u}^2 \vec{E} - \vec{u} \otimes \vec{u}) \vec{\omega}$$

Vậy số hạng cuối cùng của biểu thức (2.15) có dạng

$$\frac{1}{2} \int_B (\vec{\omega} + \vec{u})^2 dm = \frac{1}{2} \vec{\omega} \cdot \int_B (\vec{u}^2 \vec{E} - \vec{u} \otimes \vec{u}) dm \cdot \vec{\omega} = \frac{1}{2} \vec{\omega} \cdot \vec{I}_A \cdot \vec{\omega} \quad (2.23)$$

Thế biểu thức (2.23) vào (2.22) ta nhận được biểu thức động năng của vật rắn

$$T = \frac{1}{2} m \vec{v}_A^2 + m \vec{v}_A \cdot (\vec{\omega} \times \vec{u}_C) + \frac{1}{2} \vec{\omega} \cdot (\vec{I}_A \cdot \vec{\omega}) \quad (2.24)$$

Nếu ta chọn điểm A là khối tâm C của vật rắn thì $\vec{u}_C = 0$. Do đó biểu thức động năng T của vật rắn (2.24) có dạng rất gọn

$$T = \frac{1}{2} m \vec{v}_C^2 + \frac{1}{2} \vec{\omega} \cdot (\vec{I}_C \cdot \vec{\omega}) \quad (2.25)$$

Trong hệ qui chiếu cố định R_0 , biểu thức động năng (2.25) của vật rắn B có thể viết dưới dạng ma trận như sau

$$T = \frac{1}{2} m \mathbf{v}_C^T \mathbf{v}_C + \frac{1}{2} \boldsymbol{\omega}^T \mathbf{I}_C \boldsymbol{\omega} \quad (2.26)$$

Trong hệ qui chiếu động R_1 gắn liền vào vật rắn ta có

$$T = \frac{1}{2} m \mathbf{v}_C^{(1)T} \mathbf{v}_C^{(1)} + \frac{1}{2} \boldsymbol{\omega}^{(1)T} \mathbf{I}_C^{(1)} \boldsymbol{\omega}^{(1)} \quad (2.27)$$

Trong đó $\mathbf{v}_C, \boldsymbol{\omega}, \mathbf{I}_C$ là hình chiếu của véc tơ $\vec{v}_C, \vec{\omega}$ và tenxơ \vec{I}_C lên hệ qui chiếu cố định R_0 , còn $\mathbf{v}_C^{(1)}, \boldsymbol{\omega}^{(1)}, \mathbf{I}_C^{(1)}$ là hình chiếu của các véc tơ $\vec{v}_C, \vec{\omega}$ và tenxơ \vec{I}_C lên hệ qui chiếu động R_1 gắn liền vào vật rắn.

2.5 Thí dụ áp dụng

Thí dụ 4.3. Một đĩa tròn đồng chất khối lượng m , bán kính r , được lắp vào tay quay nằm ngang $OC = b$. Đĩa chuyển động tương đối quanh trục OC với vận tốc góc ω_1 (hình 4.7). Trục OC quay quanh trục thẳng đứng Oz_0 làm cho đĩa lăn không trượt trên nền ngang E cố định. Hãy xác định véc tơ mômen động lượng của đĩa đối với khối tâm C của nó và đối với điểm O cố định.

Lời giải. Chọn đĩa tròn B làm vật rắn khảo sát. Chuyển động của đĩa là chuyển động quay quanh điểm O cố định. Chọn các trục quán tính chính của đĩa là Cx, Cy, Cz , ta có

$$I_x = I_z = \frac{1}{4}mr^2; I_y = \frac{1}{2}mr^2 \quad (1)$$

Ký hiệu $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ lần lượt là các véc tơ đơn vị trên các trục của hệ động $Cxyz$ gắn chặt vào đĩa. Từ hình vẽ ta có $\vec{\omega}_1 = \omega_1 \vec{e}_2, \vec{v}_C = \omega_2 b \vec{e}_1$

Do $\vec{v}_P = 0$ nên OP^* là trục quanh tức thời. Vì vậy

$$\frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{b}{r} \Rightarrow \omega_2 = \frac{r}{b} \omega_1, \vec{\omega}_2 = -\frac{r}{b} \omega_1 \vec{e}_3$$

Vận tốc góc tuyệt đối của đĩa là

$$\vec{\omega} = \vec{\omega}_1 + \vec{\omega}_2 = \omega_1 \vec{e}_2 - \frac{r}{b} \omega_1 \vec{e}_3$$

Theo công thức (2.11) ta có

$$\begin{bmatrix} l_{Cx} \\ l_{Cy} \\ l_{Cz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_x & 0 & 0 \\ 0 & I_y & 0 \\ 0 & 0 & I_z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{bmatrix} \quad (2)$$

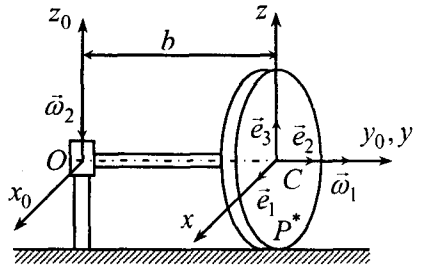
Từ (1) và (2) ta suy ra

$$l_{Cx} = I_x \omega_x = 0, l_{Cy} = I_y \omega_y = \frac{1}{2}mr^2 \omega_1$$

$$l_{Cz} = I_z \omega_z = -\frac{1}{4}mr^2 \frac{r}{b} \omega_1 = -\frac{mr^3}{4b} \omega_1,$$

Vậy ta có

$$\vec{l}_C = \frac{mr^2}{2} \omega_1 \vec{e}_2 - \frac{mr^3}{4b} \omega_1 \vec{e}_3 \quad (3)$$



Hình 4.7

Theo công thức (2.18) ta có

$$\vec{l}_O = \vec{l}_C + \vec{r}_C \times m\vec{v}_C \quad (4)$$

Trước hết ta tính

$$\vec{r}_C \times m\vec{v}_C = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ 0 & b & 0 \\ m\omega_2 b & 0 & 0 \end{vmatrix} = -mb^2\omega_2\vec{e}_3 \quad (5)$$

Kết hợp (3) và (5) ta được

$$\vec{l}_O = \frac{mr^2}{2}\omega_1\vec{e}_2 - \frac{mr^3}{4b}\omega_1\vec{e}_3 - mb^2\omega_2\vec{e}_3 = \frac{mr^2}{2}\omega_1\vec{e}_2 - \frac{mr}{b}\left(\frac{r^2}{4} + b^2\right)\omega_1\vec{e}_3 \quad (6)$$

§3 ĐỊNH LÝ BIẾN THIÊN ĐỘNG LƯỢNG VÀ ĐỊNH LÝ BIẾN THIÊN MÔMEN ĐỘNG LƯỢNG

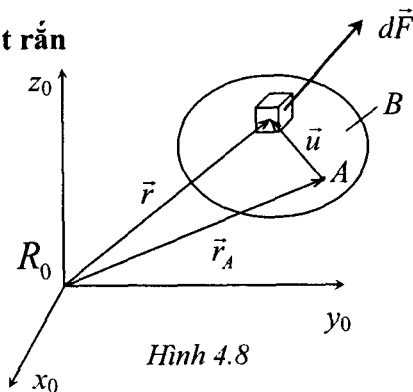
3.1 Định lý biến thiên động lượng của vật rắn

Từ định luật Newton 2

$$\frac{d}{dt}(\vec{v}dm) = d\vec{F}^e + d\vec{F}^i \quad (3.1)$$

ta suy ra

$$\begin{aligned} \int_B \frac{d}{dt}(\vec{v}dm) &= \frac{d}{dt} \int_B \vec{v}dm = \frac{d}{dt}(m\vec{v}_C) \\ &= \int_B d\vec{F}^e + \int_B d\vec{F}^i = \vec{F}^e + \vec{F}^i \end{aligned}$$



Hình 4.8

Do $\int_B d\vec{F}^i = 0$ nên ta suy ra định lý biến thiên động lượng của vật rắn

$$m\vec{a}_C = \int_B d\vec{F}^e = \vec{f}^e \quad (3.2)$$

3.2 Định lý biến thiên mômen động lượng của vật rắn

Theo định nghĩa biểu thức mômen động lượng của vật rắn B đối với điểm A thuộc vật có dạng

$$\vec{l}_A = \int_B \vec{u} \times \vec{v}dm \quad (3.3)$$

Đạo hàm biểu thức (3.3) theo thời gian ở trong hệ qui chiếu R_O ta có

$$\frac{{}^{R_O}d\vec{l}_A}{dt} = \int_B \vec{u} \times \frac{{}^{R_O}d\vec{v}}{dt} dm + \int_B \frac{d\vec{u}}{dt} \times \vec{v}dm \quad (3.4)$$

Để đơn giản ký hiệu, ta qui ước viết đạo hàm trong hệ qui chiếu cố định như sau

$$\frac{{}^{R_0} d\vec{l}_A}{dt} = \dot{\vec{l}}_A, \quad \frac{{}^{R_0} d\vec{v}}{dt} = \dot{\vec{v}}, \quad \frac{{}^{R_0} d\vec{u}}{dt} = \dot{\vec{u}} \quad (3.5)$$

Với các ký hiệu đó biểu thức (3.4) có dạng

$$\dot{\vec{l}}_A = \int_B \vec{u} \times \dot{\vec{v}} dm + \int_B \dot{\vec{u}} \times \vec{v} dm \quad (3.6)$$

Do $\dot{\vec{v}} dm = d\vec{F}$, nên

$$\int_B \vec{u} \times \dot{\vec{v}} dm = \int_B \vec{u} \times d\vec{F} = \vec{m}_A \quad (3.7)$$

Từ hình vẽ 4.8 ta có

$$\vec{r} = \vec{r}_A + \vec{u} \Rightarrow \dot{\vec{r}} = \dot{\vec{r}}_A + \dot{\vec{u}}$$

Do đó $\dot{\vec{u}} = \dot{\vec{r}} - \dot{\vec{r}}_A = \vec{v} - \vec{v}_A \quad (3.8)$

Thay (3.7) và (3.8) vào biểu thức (3.6) ta được

$$\dot{\vec{l}}_A = \vec{m}_A + \int_B (\vec{v} - \vec{v}_A) \times \vec{v} dm = \vec{m}_A - \vec{v}_A \times \int_B \vec{v} dm$$

Vậy cuối cùng định lý biến thiên mômen của vật rắn đối với một điểm A thuộc vật có dạng

$$\dot{\vec{l}}_A = \vec{m}_A - m\vec{v}_A \times \vec{v}_C \quad (3.9)$$

Trong đó: m là khối lượng của vật rắn

\vec{m}_A là mômen chính lấy đối với điểm A của hệ các ngoại lực tác dụng lên vật rắn

\vec{v}_A là vận tốc điểm A lấy trong hệ qui chiếu R_0

\vec{v}_C là vận tốc của khối tâm C lấy trong hệ qui chiếu R_0

Chú ý rằng $\vec{v}_C = \vec{v}_A + \vec{\omega} \times \vec{u}_C$ nên biểu thức (3.9) có thể viết lại dưới dạng

$$\dot{\vec{l}}_A = \vec{m}_A - m\vec{v}_A \times (\vec{\omega} \times \vec{u}_C) \quad (3.10)$$

Để nhận được các công thức thuận tiện sử dụng sau này ta tiếp tục biến đổi công thức (3.10). Chú ý đến công thức (2.5) $\vec{l}_A = m\vec{u}_C \times \vec{v}_A + \vec{l}_A \cdot \vec{\omega}$, biểu thức (3.10) có dạng

$$\begin{aligned} \dot{\vec{l}}_A &= \frac{{}^{R_0} d}{dt} (\vec{l}_A \cdot \vec{\omega}) + \frac{{}^{R_0} d}{dt} (m\vec{u}_C \times \vec{v}_A) \\ &= \dot{\vec{m}}_A - m\vec{v}_A \times (\vec{\omega} \times \vec{u}_C) \end{aligned} \quad (3.11)$$

Chú ý đến công thức liên hệ đạo hàm của một vectơ trong các hệ qui chiếu khác nhau

$$\frac{{}^{R_0} d\vec{a}}{dt} = \frac{{}^{R_1} d\vec{a}}{dt} + {}^{R_0} \vec{\omega}^{R_1} \times \vec{a}$$

ta có

$$\frac{{}^{R_0} d\vec{\omega}}{dt} = \frac{{}^{R_1} d\vec{\omega}}{dt} + \vec{\omega} \times \vec{\omega} = \frac{{}^{R_1} d\vec{\omega}}{dt}. \quad (3.12)$$

Chú ý đến biểu thức (3.12), từ biểu thức (3.11) ta suy ra

$$\vec{I}_A \cdot \dot{\vec{\omega}} + \vec{\omega} \times (\vec{I}_A \cdot \vec{\omega}) + m\vec{u}_C \times \ddot{\vec{r}}_A = \vec{m}_A \quad (3.13)$$

Nếu ta chọn điểm A là khối tâm C của vật rắn thì $\vec{u}_C = 0$. Từ biểu thức (3.10) ta suy ra

$$\frac{{}^{R_0} d\vec{l}_C}{dt} = \vec{m}_C$$

Chú ý đến công thức (2.6) ta nhận được định lý biến thiên mômen động lượng của vật rắn đối với khối tâm C .

$$\frac{{}^{R_0} d\vec{l}_C}{dt} = \frac{{}^{R_0} d}{dt} (\vec{I}_C \cdot \vec{\omega}) = \vec{I}_C \cdot \dot{\vec{\omega}} + \vec{\omega} \times (\vec{I}_C \cdot \vec{\omega}) = \vec{m}_C \quad (3.14)$$

Dạng ma trận của phương trình (3.14) trong hệ tọa độ R_1 gắn chặt vào vật rắn B là

$$\mathbf{I}_C^{(1)} \dot{\boldsymbol{\omega}}^{(1)} + \boldsymbol{\omega}^{(1)} \mathbf{I}_C^{(1)} \boldsymbol{\omega}^{(1)} = \mathbf{m}_C^{(1)} \quad (3.15)$$

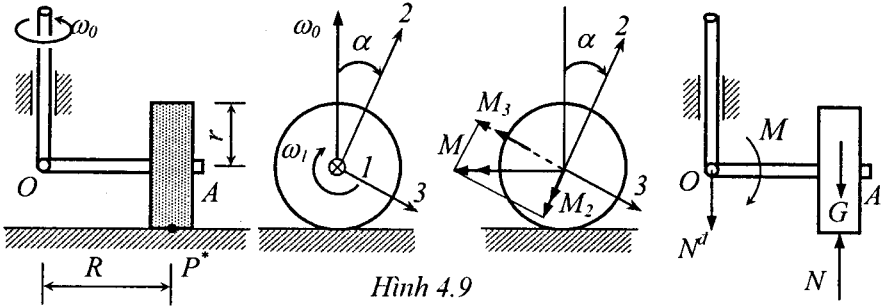
Nếu ta chọn hệ tọa độ R_1 là hệ trục quán tính chính của vật rắn tại khối tâm C của nó thì từ (3.15) ta có

$$\mathbf{I}_C^{(1)} = \begin{bmatrix} I_1 & 0 & 0 \\ 0 & I_2 & 0 \\ 0 & 0 & I_3 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{\omega}^{(1)} = \begin{bmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{m}_C^{(1)} = \begin{bmatrix} m_{C1} \\ m_{C2} \\ m_{C3} \end{bmatrix} \quad (3.16)$$

Từ phương trình (3.16) ta nhận được các phương trình động lực Euler quen biết

$$\begin{aligned} I_1 \dot{\omega}_1 - (I_2 - I_3) \omega_2 \omega_3 &= m_{C1} \\ I_2 \dot{\omega}_2 - (I_3 - I_1) \omega_3 \omega_1 &= m_{C2} \\ I_3 \dot{\omega}_3 - (I_1 - I_2) \omega_1 \omega_2 &= m_{C3} \end{aligned} \quad (3.17)$$

Thí dụ 4.4. Xét chuyển động lăn không trượt của một bánh xe của máy nghiền (hình 4.9). Trục mang bánh xe quay đều quanh trục thẳng đứng đứng với vận tốc ω_0 . Cho biết các mômen quán tính chính của bánh xe $J_1, J_2 = J_3$, bán kính bánh xe là r , khoảng cách OA là R . Bỏ qua khối lượng của trục OA . Tìm áp lực của bánh xe lên nền.



Hình 4.9

Lời giải. Bánh xe tham gia hai chuyển động quay quanh hai trục giao nhau tại O . Chuyển động theo của bánh xe là chuyển động quay quanh trục thẳng đứng cùng trục OA với vận tốc góc $\omega_e = \omega_0$. Chuyển động tương đối của bánh xe là chuyển động quay quanh trục OA với vận tốc góc là ω_1 , góc quay là α . Điểm P^* là điểm bánh xe tiếp xúc với mặt đường. Do đó ta có $\vec{v}_p = 0$. Xét điểm A ta suy ra $\omega_1 r = R\omega_0$. Từ hình 4.9 ta suy ra các thành phần của vectơ vận tốc góc của bánh xe

$$\begin{aligned} \omega_1 &= \dot{\alpha} = \frac{R}{r} \omega_0, & \dot{\omega}_1 &= 0, \\ \omega_2 &= \omega_0 \cos \alpha, & \dot{\omega}_2 &= -\omega_0 \dot{\alpha} \sin \alpha = \omega_1 \omega_3 \\ \omega_3 &= -\omega_0 \sin \alpha, & \dot{\omega}_3 &= -\omega_0 \dot{\alpha} \cos \alpha = -\omega_1 \omega_2 \end{aligned} \quad (1)$$

Phương trình động lực Euler đối với chuyển động của bánh xe có dạng

$$\begin{aligned} M_1 &= I_1 \frac{d\omega_1}{dt} + (I_3 - I_2) \omega_2 \omega_3 \\ M_2 &= I_2 \frac{d\omega_2}{dt} + (I_1 - I_3) \omega_3 \omega_1 \\ M_3 &= I_3 \frac{d\omega_3}{dt} + (I_2 - I_1) \omega_1 \omega_2 \end{aligned} \quad (2)$$

Thế (1) vào (2) ta được biểu thức xác định mômen của các ngoại lực tác dụng lên bánh xe

$$\begin{aligned} M_1 &= 0 \\ M_2 &= (I_1 + I_2 - I_3) \omega_1 \omega_3 = -I_1 \omega_0^2 \frac{R}{r} \sin \alpha \\ M_3 &= (-I_3 + I_2 - I_1) \omega_1 \omega_2 = -I_1 \omega_0^2 \frac{R}{r} \cos \alpha \end{aligned} \quad (3)$$

Từ (3) ta suy ra ngẫu lực tác dụng lên bánh xe có độ lớn

$$M = \sqrt{M_2^2 + M_3^2} = I_1 \omega_0^2 \frac{R}{r} \quad (4)$$

Ngẫu lực này nằm trong mặt phẳng vuông góc với trục OA của bánh xe và song song với mặt phẳng mà bánh xe lăn trên đó. Ngẫu lực này tạo nên phản lực động phụ ở khớp O và áp lực lên mặt đường. Do đó áp lực động của bánh xe lên mặt đường là

$$N^d = \frac{M}{R} = \frac{I_1 \omega_0^2}{r}$$

áp lực toàn phần là

$$N = G + \frac{I_1 \omega_0^2}{r} \quad (5)$$

Trong đó G là trọng lượng bánh xe.

Thí dụ 4.5. Sự ổn định chuyển động của Gyrôscôp tự do. Như đoạn trên đã viết, Gyrôscôp là một vật rắn có thể quay tùy ý quanh điểm O cố định. Xét trường hợp điểm O cố định trùng với khối tâm C của nó. Nếu vector chính mômen của các ngoại lực tác dụng lên Gyrôscôp triệt tiêu, Gyrôscôp khi đó được gọi là Gyrôscôp không có ngẫu lực ngoài tác dụng, hoặc Gyrôscôp tự do. Do $M_i = 0$ ($i = 1, 2, 3$), từ các phương trình động Euler (3.17) ta suy ra:

$$\begin{aligned} I_1 \dot{\omega}_1 - (I_2 - I_3) \omega_2 \omega_3 &= 0 \\ I_2 \dot{\omega}_2 - (I_3 - I_1) \omega_3 \omega_1 &= 0 \\ I_3 \dot{\omega}_3 - (I_1 - I_2) \omega_1 \omega_2 &= 0 \end{aligned} \quad (1)$$

Giả sử $\omega_1 = \omega_0 = \text{const}$, $\omega_2 = \omega_3 = 0$. Từ các phương trình (1) ta suy ra $\dot{\omega}_2 = 0$, $\dot{\omega}_3 = 0$.

Khi đó trục 1 là trục quay cố định. Bài toán thực tế được đặt ra như sau: giả sử có một nhiễu động nhỏ tác dụng vào Gyrôscôp, làm ảnh hưởng đến ω_2 và ω_3 , khi đó chuyển động của Gyrôscôp sẽ thay đổi như thế nào?

Đạo hàm phương trình thứ hai của (1) theo thời gian ta được

$$I_2 \ddot{\omega}_2 = (I_3 - I_1) \omega_0 \dot{\omega}_3$$

Thế $\dot{\omega}_3$ từ phương trình thứ ba của (1) vào phương trình trên ta được

$$I_2 I_3 \ddot{\omega}_2 = -(I_1 - I_3)(I_1 - I_2) \omega_0^2 \omega_2$$

hay $\ddot{\omega}_2 + a^2 \omega_2 = 0$

Trong đó ta ký hiệu

$$a^2 = \frac{(I_1 - I_2)(I_1 - I_3)}{I_2 I_3} \omega_0^2 \quad (2)$$

Khi $a^2 > 0$, nghiệm của phương trình trên có dạng

$$\omega_2(t) = A_1 \cos at + A_2 \sin at$$

Khi $t \rightarrow \infty$, $\omega_2(t)$ giới nội. Chuyển động của Gyroskôp ổn định. Khi $a^2 < 0$, ta đặt $b^2 = -a^2 > 0$, nghiệm của phương trình (2) có dạng

$$\omega_2(t) = B_2 e^{bt} + B_2 e^{-bt} \quad (b > 0)$$

Khi $t \rightarrow \infty$, $\omega_2(t) \rightarrow \infty$. Chuyển động của Gyroskôp không ổn định. Vậy khi $I_1 > I_2$ và $I_1 > I_3$ suy ra $a^2 > 0$, chuyển động của Gyroskôp ổn định

Khi $I_1 < I_2$ và $I_1 > I_3$ hoặc $I_1 > I_2$ và $I_1 < I_3$, chuyển động của Gyroskôp sẽ không ổn định.

Kết luận: Sự ổn định của Gyroskôp tự do phụ thuộc vào sự phân bố khối lượng của nó.

§4 CÁC PHƯƠNG TRÌNH VI PHÂN CHUYỂN ĐỘNG CỦA VẬT RẮN

4.1 Các phương trình vi phân chuyển động của vật rắn

a) Dạng đơn giản

Cho vật rắn B chuyển động trong không gian 3 chiều như hình 4.10. Lấy một điểm A bất kỳ thuộc vật rắn làm điểm qui chiếu. Ký hiệu khối tâm vật rắn là điểm C . Các lực $(\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n)$ tác dụng lên vật rắn có véc tơ chính là \vec{f} , mômen chính của hệ lực này đối với điểm A là \vec{m}_A , đối với khối tâm C là \vec{m}_C

$$\vec{f} = \sum_{k=1}^n \vec{F}_k, \quad \vec{m}_A = \sum_{k=1}^n \vec{m}_A(\vec{F}_k), \quad \vec{m}_C = \sum_{k=1}^n \vec{m}_C(\vec{F}_k)$$

Áp dụng định lý biến thiên động lượng, công thức (3.2), và định lý biến thiên mômen động lượng, công thức (3.14), ta có

$$m\vec{a}_C = \vec{f} \quad (4.1)$$

$$\vec{I}_C \cdot \dot{\vec{\omega}} + \vec{\omega} \times (\vec{I}_C \cdot \vec{\omega}) = \vec{m}_C \quad (4.2)$$

Các phương trình vi phân (4.1) và (4.2) là các phương trình chuyển động Newton-Euler của vật rắn không gian.

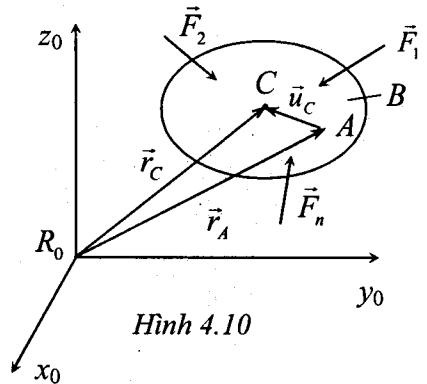
b) Dạng tổng quát

Trong một số trường hợp ta có thể chọn một điểm A bất kỳ thuộc vật rắn làm điểm định vị. Khi đó từ hình vẽ 4.10 ta có

$$\vec{r}_C = \vec{r}_A + \vec{u}_C \quad (4.3)$$

Đạo hàm biểu thức trên theo t ở trong hệ qui chiếu cố định R_0 ta được

$$\dot{\vec{r}}_C = \dot{\vec{r}}_A + \dot{\vec{u}}_C \Rightarrow \vec{v}_C = \vec{v}_A + \vec{\omega} \times \vec{u}_C \quad (4.4)$$



Hình 4.10

Từ đó ta suy ra

$$\vec{a}_C = \dot{\vec{v}}_C = \dot{\vec{v}}_A + \dot{\vec{\omega}} \times \vec{u}_C + \vec{\omega} \times \dot{\vec{u}}_C = \dot{\vec{v}}_A + \dot{\vec{\omega}} \times \vec{u}_C + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{u}_C) \quad (4.5)$$

Thế (4.5) vào (4.1) ta được

$$m[\dot{\vec{v}}_A + \dot{\vec{\omega}} \times \vec{u}_C + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{u}_C)] = \vec{f} \quad (4.6)$$

Các phương trình (4.6) và (3.13) tạo thành hệ phương trình vi phân chuyển động

$$m[\dot{\vec{v}}_A + \dot{\vec{\omega}} \times \vec{u}_C + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{u}_C)] = \vec{f} \quad (4.7)$$

$$\vec{I}_A \cdot \dot{\vec{\omega}} + \vec{\omega} \times (\vec{I}_A \cdot \vec{\omega}) + m\vec{u}_C \times \dot{\vec{v}}_A = \vec{m}_A \quad (4.8)$$

Các phương trình (4.7) và (4.8) là các phương trình vi phân chuyển động của vật rắn trong không gian. Chúng được gọi là các phương trình chuyển động Newton-Euler.

4.2 Các phương trình vi phân chuyển động của rôbốt dưới nước

Rôbốt dưới nước là một vật rắn sáu bậc tự do. Vị trí của rôbốt được xác định bởi vị trí điểm qui chiếu O và hướng quay rôbốt được xác định bởi ba góc Roll-Pitch-Yaw. Khi thiết lập phương trình vi phân chuyển động của rôbốt, theo truyền thống, người ta thường sử dụng hai hệ tọa độ. Hệ tọa độ cố định $R_0 = (Oxyz)_0$ và hệ tọa độ động gắn liền với rôbốt $R = (Oxyz)$ (hình vẽ 4.11). Vị trí của rôbốt được xác định bởi vectơ định vị $\eta = [\eta_1^T \ \eta_2^T]^T$, với $\eta_1 = [x \ y \ z]^T \in \mathbb{R}^3$ là vectơ xác định vị trí điểm qui chiếu của hệ động trong hệ qui chiếu R_0 và $\eta_2 = [\phi \ \theta \ \psi]^T \in \mathbb{R}^3$ là vectơ chứa ba góc Roll-Pitch-Yaw, xác định hướng của rôbốt.

Gọi $\mathbf{v} = [\mathbf{v}_1^T \ \mathbf{v}_2^T]^T$ là vectơ vận tốc suy rộng của rôbốt trong hệ R gắn liền vật. Trong đó $\mathbf{v}_1 = [u \ v \ w]^T$ là vận tốc điểm O của rôbốt, còn $\mathbf{v}_2 = [p \ q \ r]^T$ là vận tốc góc của rôbốt.

Đạo hàm theo thời gian vectơ định vị trong hệ cố định, giữa $\dot{\eta}$ và vectơ vận tốc \mathbf{v} có quan hệ như sau

$$\dot{\eta} = \mathbf{J}(\eta)\mathbf{v}, \text{ với } \mathbf{J}(\eta) = \text{diag}\{\mathbf{J}_1(\eta) \ \mathbf{J}_2(\eta)\} \quad (1)$$

Trong đó

$$\mathbf{J}_1(\eta_2) = \begin{bmatrix} c\psi c\theta & -s\psi c\phi + c\psi s\theta s\phi & s\psi s\phi + c\psi c\phi s\theta \\ s\psi c\theta & c\psi c\phi + s\phi s\theta s\psi & -c\psi s\phi + s\theta s\psi c\phi \\ -s\theta & c\theta s\phi & c\phi c\theta \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{J}_2(\eta_2) = \begin{bmatrix} 1 & s\phi t\theta & c\phi t\theta \\ 0 & c\phi & -s\phi \\ 0 & s\phi/c\theta & c\phi/c\theta \end{bmatrix} \quad (2)$$

Áp dụng phương trình Newton-Euler ta nhận được phương trình chuyển động của rôbốt dưới nước dưới dạng như sau (xem Nguyen Quang Hoang (2006))

$$\mathbf{M}_{RB} \dot{\mathbf{v}} + \mathbf{C}_{RB}(\mathbf{v})\mathbf{v} = \boldsymbol{\tau}_V.$$

Trong đó \mathbf{M}_{RB} là ma trận khối lượng của rôbốt, $\mathbf{C}_{RB}(\mathbf{v})\mathbf{v}$ chứa các lực Coriolis và lực ly tâm. Các ma trận trên có dạng như sau:

Ma trận khối lượng

$$\mathbf{M}_{RB} = \begin{bmatrix} \mathbf{M}_{11} & \mathbf{M}_{12} \\ \mathbf{M}_{21} & \mathbf{M}_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m & 0 & 0 & 0 & mz_C & -my_C \\ 0 & m & 0 & -mz_C & 0 & mx_C \\ 0 & 0 & m & my_C & -mx_C & 0 \\ 0 & -mz_C & my_C & I_x & -I_{xy} & -I_{xz} \\ mz_C & 0 & -mx_C & -I_{yx} & I_y & -I_{yz} \\ -my_C & mx_C & 0 & -I_{zx} & -I_{zy} & I_z \end{bmatrix}$$

trong đó $r_C = [x_C \quad y_C \quad z_C]^T$ là vectơ vị trí khối tâm của rôbốt trong hệ gắn liền vật.

Ma trận $\mathbf{C}_{RB}(\mathbf{v})$ có dạng

$$\mathbf{C}_{RB}(\mathbf{v}) = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{3 \times 3} & -\tilde{\mathbf{c}}_1 \\ -\tilde{\mathbf{c}}_1 & -\tilde{\mathbf{c}}_2 \end{bmatrix},$$

với $\mathbf{c}_1 = \mathbf{M}_{11}\mathbf{v}_1 + \mathbf{M}_{12}\mathbf{v}_2$, $\mathbf{c}_2 = \mathbf{M}_{21}\mathbf{v}_1 + \mathbf{M}_{22}\mathbf{v}_2$.

Vectơ $\boldsymbol{\tau}_V$ chứa tất cả các ngoại lực tác dụng lên rôbốt như lực điều khiển do các cánh tuabin quay tạo ra, lực thủy động lực, lực thủy tĩnh, lực do dây cáp

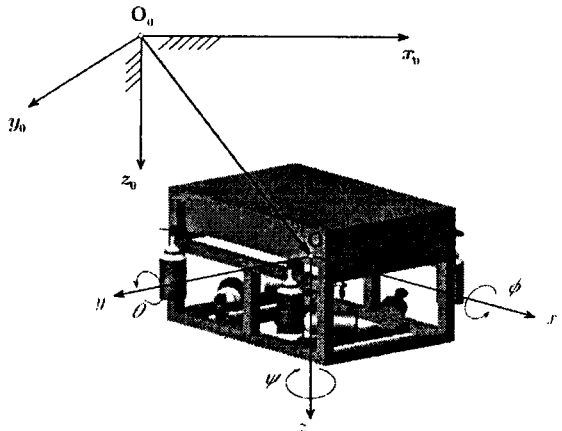
$$\boldsymbol{\tau}_V = \boldsymbol{\tau}_A + \boldsymbol{\tau}_D + \mathbf{g}(\boldsymbol{\eta}) + \boldsymbol{\tau}_C + \boldsymbol{\tau}. \quad (3)$$

Lực thủy động tác dụng lên rôbốt gồm:

- Lực khối lượng phụ

Khi rôbốt chuyển động trong nước các phần tử nước bao quanh rôbốt cũng bị tăng tốc do đó nó tạo ra một lực tác dụng trở lại rôbốt, lực này tỉ lệ với gia tốc của rôbốt, biểu thức của nó được viết như sau

$$\boldsymbol{\tau}_A = -\mathbf{M}_A \dot{\mathbf{v}} - \mathbf{C}_A(\mathbf{v})\mathbf{v} \quad (4)$$



Hình 4.11: Mô hình rôbốt dưới nước

Trong đó \mathbf{M}_A là ma trận khối lượng quán tính phụ, các phần tử của nó phụ thuộc vào hình dáng và kích thước của rôbốt. Thông thường thì ma trận quán tính phụ này được xác định bằng thực nghiệm. Ma trận $\mathbf{C}_A(\mathbf{v})$ được tính toán từ ma trận \mathbf{M}_A và véctơ \mathbf{v} , tương tự như khi tính ma trận $\mathbf{C}_{RB}(\mathbf{v})$.

- *Lực cản*

Lực cản tác dụng lên rôbốt thường được tính toán tỉ lệ bậc một và bậc hai đối với vận tốc của rôbốt. Phương pháp thường được dùng để mô tả lực cản này là tính lực cản riêng rẽ từng chuyển động, chẳng hạn như

+ lực cản chuyển động theo phương x của hệ động

$$\tau_{Du} = d_{1u}u + d_{2u}|u|u$$

+ mômen cản chuyển động quay quanh trục z của hệ động

$$\tau_{Dr} = d_{1r}r + d_{2r}|r|r$$

Các hệ số cản d_{1u}, \dots, d_{2r} được xác định bằng thực nghiệm.

Gộp lại ta có thể viết được biểu thức lực cản như sau

$$\boldsymbol{\tau}_D = \mathbf{D}(\mathbf{v})\mathbf{v}.$$

Nếu sử dụng phép biến đổi

$$\dot{\boldsymbol{\eta}} = \mathbf{J}(\boldsymbol{\eta})\mathbf{v} \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{v} = \mathbf{J}^{-1}(\boldsymbol{\eta})\dot{\boldsymbol{\eta}}$$

$$\ddot{\boldsymbol{\eta}} = \mathbf{J}(\boldsymbol{\eta})\dot{\mathbf{v}} + \dot{\mathbf{J}}(\boldsymbol{\eta})\mathbf{v} \quad \Leftrightarrow \quad \dot{\mathbf{v}} = \mathbf{J}^{-1}(\boldsymbol{\eta})\left[\ddot{\boldsymbol{\eta}} - \dot{\mathbf{J}}(\boldsymbol{\eta})\mathbf{J}^{-1}(\boldsymbol{\eta})\dot{\boldsymbol{\eta}}\right]$$

ta sẽ thu được phương trình vi phân chuyển động dưới dạng

$$\mathbf{M}_\eta(\boldsymbol{\eta})\ddot{\boldsymbol{\eta}} + \mathbf{C}_\eta(\mathbf{v}, \boldsymbol{\eta})\dot{\boldsymbol{\eta}} + \mathbf{D}_\eta(\mathbf{v}, \boldsymbol{\eta})\boldsymbol{\eta} + \mathbf{g}_\eta(\boldsymbol{\eta}) = \boldsymbol{\tau}_\eta \quad (5)$$

$$\mathbf{v} = \mathbf{J}^{-1}(\boldsymbol{\eta})\dot{\boldsymbol{\eta}}$$

Trong đó $\mathbf{D}(\mathbf{v})$ là ma trận cản. Ma trận này là ma trận xác định dương

$$\mathbf{D}(\mathbf{v}) = \text{diag}(d_{1u}, d_{1v}, d_{1w}, d_{1p}, d_{1q}, d_{1r}) \\ + \text{diag}(d_{2u}|u|, d_{2v}|v|, d_{2w}|w|, d_{2p}|p|, d_{2q}|q|, d_{2r}|r|).$$

- *Lực thủy tĩnh*: lực này do trọng lượng $\mathbf{g} = [0 \ 0 \ G]^T = [0 \ 0 \ mg]^T$ đặt tại trọng tâm của rôbốt và lực đẩy Archimedes $\mathbf{b} = [0 \ 0 \ -B]^T = [0 \ 0 \ -\rho_w gV]^T$ đặt tại tâm nổi $\mathbf{r}_B = [x_B \ y_B \ z_B]^T$. Trong hệ tọa độ gắn liền vật, lực này được tính như sau

$$\mathbf{g}(\boldsymbol{\eta}) = - \begin{bmatrix} \mathbf{f}_C(\boldsymbol{\eta}) + \mathbf{f}_B(\boldsymbol{\eta}) \\ \mathbf{r}_C \times \mathbf{f}_C(\boldsymbol{\eta}) + \mathbf{r}_B \times \mathbf{f}_B(\boldsymbol{\eta}) \end{bmatrix},$$

với

$$\mathbf{f}_C(\boldsymbol{\eta}_2) = \mathbf{J}_1^{-1}(\boldsymbol{\eta}_2) \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ G \end{bmatrix}, \quad \mathbf{f}_B(\boldsymbol{\eta}_2) = -\mathbf{J}_1^{-1}(\boldsymbol{\eta}_2) \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ B \end{bmatrix}$$

- *Lực điều khiển* $\boldsymbol{\tau}$: giả sử rằng mỗi cánh quạt khi quay tạo ra lực đẩy u_i , như vậy khi có p cánh quạt quay ta sẽ có một vector chứa các lực đẩy này, $\mathbf{u} = [u_1 \ u_2 \ \dots \ u_p]^T$. Khi đó lực điều khiển của rôbốt có thể được tính như sau

$$\boldsymbol{\tau} = \mathbf{B}\mathbf{u} \quad (6)$$

ở đó $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{6 \times p}$ là ma trận hằng số phụ thuộc vào việc bố trí các cánh quạt trên thân của rôbốt. Ma trận \mathbf{B} này còn gọi là ma trận phân phối lực, vì rằng khi biết lực điều khiển $\boldsymbol{\tau}$ ma trận \mathbf{B} này sẽ được dùng để tính lực đẩy cho từng cánh quạt u_i .

Thế tất cả các lực nói trên vào phương trình (2) ta thu được phương trình vi phân chuyển động cho rôbốt dưới nước như sau

$$\mathbf{M}\dot{\mathbf{v}} + \mathbf{C}(\mathbf{v})\mathbf{v} + \mathbf{D}(\mathbf{v})\mathbf{v} + \mathbf{g}(\boldsymbol{\eta}) = \mathbf{B}\mathbf{u}. \quad (7)$$

Trong đó

$$\mathbf{M} = \mathbf{M}_{RB} + \mathbf{M}_A, \quad \mathbf{C}(\mathbf{v}) = \mathbf{C}_{RB}(\mathbf{v}) + \mathbf{C}_A(\mathbf{v}) \quad (8)$$

Nếu dùng phép biến đổi

$$\begin{aligned} \dot{\boldsymbol{\eta}} &= \mathbf{J}(\boldsymbol{\eta})\mathbf{v} & \Leftrightarrow & \quad \mathbf{v} = \mathbf{J}^{-1}(\boldsymbol{\eta})\dot{\boldsymbol{\eta}} \\ \ddot{\boldsymbol{\eta}} &= \mathbf{J}(\boldsymbol{\eta})\dot{\mathbf{v}} + \dot{\mathbf{J}}(\boldsymbol{\eta})\mathbf{v} & \Leftrightarrow & \quad \dot{\mathbf{v}} = \mathbf{J}^{-1}(\boldsymbol{\eta})[\ddot{\boldsymbol{\eta}} - \dot{\mathbf{J}}(\boldsymbol{\eta})\mathbf{J}^{-1}(\boldsymbol{\eta})\dot{\boldsymbol{\eta}}] \end{aligned}$$

ta thu được phương trình vi phân chuyển động của rôbốt dưới nước như sau

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_\eta(\boldsymbol{\eta})\ddot{\boldsymbol{\eta}} + \mathbf{C}_\eta(\mathbf{v}, \boldsymbol{\eta})\dot{\boldsymbol{\eta}} + \mathbf{D}_\eta(\mathbf{v}, \boldsymbol{\eta})\dot{\boldsymbol{\eta}} + \mathbf{g}_\eta(\boldsymbol{\eta}) &= \boldsymbol{\tau}_\eta \\ \mathbf{v} &= \mathbf{J}^{-1}(\boldsymbol{\eta})\dot{\boldsymbol{\eta}} \end{aligned} \quad (9)$$

Trong đó

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_\eta(\boldsymbol{\eta}) &= \mathbf{J}^{-T}(\boldsymbol{\eta})\mathbf{M}\mathbf{J}^{-1}(\boldsymbol{\eta}) \\ \mathbf{C}_\eta(\mathbf{v}, \boldsymbol{\eta}) &= \mathbf{J}^{-T}(\boldsymbol{\eta})[\mathbf{C}(\mathbf{v}) - \mathbf{M}\mathbf{J}^{-1}(\boldsymbol{\eta})\dot{\mathbf{J}}(\boldsymbol{\eta})]\mathbf{J}^{-1}(\boldsymbol{\eta}) \\ \mathbf{D}_\eta(\mathbf{v}, \boldsymbol{\eta}) &= \mathbf{J}^{-T}(\boldsymbol{\eta})\mathbf{D}(\mathbf{v})\mathbf{J}^{-1}(\boldsymbol{\eta}) \\ \mathbf{g}_\eta(\boldsymbol{\eta}) &= \mathbf{J}^{-T}(\boldsymbol{\eta})\mathbf{g}(\boldsymbol{\eta}) \\ \boldsymbol{\tau}_\eta(\boldsymbol{\eta}) &= \mathbf{J}^{-T}(\boldsymbol{\eta})\boldsymbol{\tau} \end{aligned} \quad (10)$$

§5 THU GỌN HỆ LỰC QUÁN TÍNH CỦA VẬT RẮN CHUYỂN ĐỘNG

5.1 Quan hệ giữa lực quán tính thu gọn và các đại lượng động lực của vật rắn

Trước hết chúng ta xây dựng các biểu thức xác định vectơ chính và mômen chính đối với một điểm của hệ lực quán tính của vật rắn.

Từ biểu thức định nghĩa lực quán tính của chất điểm

$$d\vec{F}^* = -\ddot{\vec{r}}dm$$

ta suy ra công thức xác định vectơ chính của hệ lực quán tính của vật rắn chuyển động

$$\vec{F}^* = -\int_B \ddot{\vec{r}}dm \quad (5.1)$$

Từ biểu thức định nghĩa mômen quán tính đối với điểm O của lực quán tính của chất điểm

$$d\vec{M}_O^* = -\vec{r} \times \ddot{\vec{r}}dm$$

ta suy ra công thức xác định mômen chính của hệ lực quán tính của vật rắn chuyển động đối với tâm O cố định và đối với khối tâm C của vật rắn

$$\vec{M}_O^* = -\int_B \vec{r} \times \ddot{\vec{r}}dm, \vec{M}_C^* = -\int_B \vec{u} \times \ddot{\vec{r}}dm \quad (5.2)$$

Bây giờ ta đưa ra các công thức về quan hệ giữa vectơ chính, mômen chính đối với một điểm của hệ lực quán tính của vật rắn và các đại lượng động lực cơ bản của vật rắn

$$\vec{F}^* = -\frac{R_0 d\vec{p}}{dt}, \vec{M}_O^* = -\frac{R_0 d\vec{l}_O}{dt}, \vec{M}_C^* = -\frac{R_0 d\vec{l}_C}{dt} \quad (5.3)$$

Chứng minh. Theo định nghĩa động lượng của vật rắn

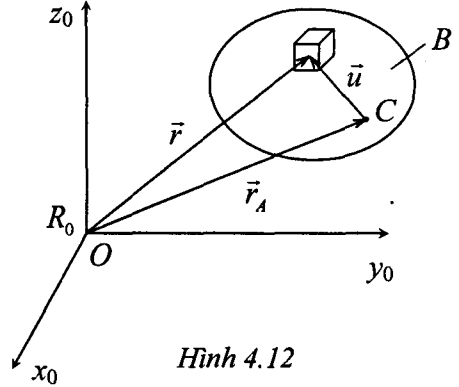
$$\vec{p} = \int_B \dot{\vec{r}}dm$$

ta có

$$\frac{R_0 d\vec{p}}{dt} = \int_B \ddot{\vec{r}}dm = -\vec{F}^*$$

Theo định nghĩa mômen động lượng của vật rắn đối với điểm O

$$\vec{l}_O = \int_B \vec{r} \times \dot{\vec{r}}dm$$



Hình 4.12

ta có

$$\frac{R_0 d\vec{l}_O}{dt} = \int_B \dot{\vec{r}} \times \dot{\vec{r}} dm + \int_B \vec{r} \times \ddot{\vec{r}} dm = \int_B \vec{r} \times \ddot{\vec{r}} dm = -\vec{M}_O^*$$

Cuối cùng theo định nghĩa ta có

$$\vec{l}_C = \int_B \vec{u} \times \dot{\vec{r}} dm$$

Đạo hàm biểu thức trên theo thời gian ở trong hệ qui chiếu cố định R_0 ta được

$$\frac{R_0 d\vec{l}_C}{dt} = \int_B (\dot{\vec{u}} \times \dot{\vec{r}} + \vec{u} \times \ddot{\vec{r}}) dm = \int_B (\vec{\omega} \times \vec{u}) \times \dot{\vec{r}} dm + \int_B (\vec{u} \times \ddot{\vec{r}}) dm$$

Ta xét số hạng tích phân thứ nhất của biểu thức trên

$$\begin{aligned} \int_B (\vec{\omega} \times \vec{u}) \times \dot{\vec{r}} dm &= \int_B [(\vec{\omega} \times \vec{u}) \times (\vec{v}_C + \vec{\omega} \times \vec{u})] dm \\ &= \int_B (\vec{\omega} \times \vec{u}) \times \vec{v}_C dm = \vec{\omega} \times \left(\int_B \vec{u} dm \right) \times \vec{v}_C = 0 \end{aligned}$$

Vậy ta có

$$\frac{R_0 d\vec{l}_C}{dt} = \int_B (\vec{u} \times \ddot{\vec{r}}) dm = -\vec{M}_C^*$$

5.2 Thu gọn hệ lực quán tính của vật rắn chuyển động về khối tâm

Thu gọn hệ lực quán tính của vật rắn chuyển động về khối tâm C của nó ta được một lực và một ngẫu lực. Lực được biểu diễn bằng véctơ chính của hệ lực quán tính, còn ngẫu lực có mômen bằng mômen chính đối với khối tâm C của hệ lực quán tính. Theo các công thức (5.3), và (2.1) ta có

$$\vec{F}^* = -\frac{d\vec{p}}{dt} = -m\vec{a}_C \quad (5.4)$$

Theo công thức (5.3) và (3.14) ta suy ra

$$\vec{M}_C^* = -\frac{d\vec{l}_C}{dt} = -[\vec{I}_C \cdot \dot{\vec{\omega}} + \vec{\omega} \times \vec{I}_C \cdot \vec{\omega}] \quad (5.5)$$

Dạng ma trận của các phương trình (5.4) và (5.5) ở trong hệ qui chiếu cố định là

$$\vec{F}^* = -m\vec{a}_C \quad (5.6)$$

$$\vec{M}_C^* = -(\mathbf{I}_C \dot{\vec{\omega}} + \vec{\omega} \mathbf{I}_C \vec{\omega}) \quad (5.7)$$

Dạng ma trận của các phương trình (5.4) và (5.5) ở trong hệ qui chiếu động R_1 là

$$\vec{F}^{*(1)} = -m\vec{a}_C^{(1)} \quad (5.8)$$

$$\vec{M}_C^{*(1)} = -(\mathbf{I}_C^{(1)} \dot{\vec{\omega}}^{(1)} + \vec{\omega}^{(1)} \mathbf{I}_C^{(1)} \vec{\omega}^{(1)}) \quad (5.9)$$

Chương 5

MỘT SỐ NGUYÊN LÝ CƠ HỌC VÀ CÁC PHƯƠNG TRÌNH VI PHÂN CHUYỂN ĐỘNG CỦA HỆ NHIỀU VẬT

Trong chương này trước hết trình bày một số Nguyên lý cơ học hay sử dụng trong Động lực học hệ nhiều vật. Đó là các Nguyên lý d'Alembert-Lagrange, Nguyên lý Jordan, Nguyên lý Gauss. Sau đó trình bày việc áp dụng các phương trình Newton-Euler, Phương trình Lagrange loại hai, Phương trình Kane thiết lập các phương trình vi phân chuyển động của các hệ nhiều vật holoônôm có cấu trúc cây. Khi thiết lập các phương trình vi phân chuyển động của các hệ nhiều vật holoônôm có cấu trúc mạch vòng người ta thường hay sử dụng các Phương trình Lagrange dạng nhân tử. Việc thiết lập các phương trình vi phân chuyển động của các hệ nhiều vật không holoônôm là một vấn đề khá phức tạp nên chỉ được đề cập với một mức độ vừa phải.

Trong Động lực học hệ nhiều vật thuật ngữ *Dạng thức* (Formalisme) được dùng để chỉ việc thiết lập các nguyên lý cơ học hoặc các phương trình chuyển động của hệ nhiều vật bằng phương pháp ma trận cho phép dễ dàng xác định bằng phương pháp thuật toán các ma trận có mặt trong các nguyên lý hoặc trong các phương trình chuyển động từ các tham số hình học và các tham số động lực của mô hình cơ học. Để chuyển từ các dạng thức sang các chương trình tính có hai con đường:

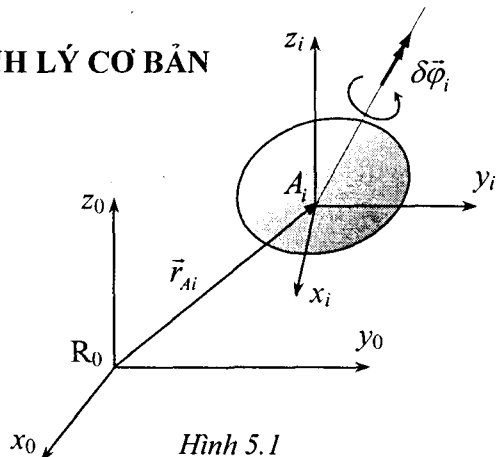
- Các chương trình tính toán bằng số. Các ma trận có mặt trong các phương trình chuyển động được tính từ tập các số liệu mô tả trạng thái của hệ ở từng thời điểm, sau đó tích phân phương trình vi phân mô tả chuyển động của cơ hệ.

- Các chương trình tính toán bằng ký tự. Tự động hoá thiết lập các ma trận có mặt trong các phương trình chuyển động. Từ đó có thể tự động hoá thiết lập các phương trình vi phân mô tả chuyển động dưới dạng các ký tự. Sau đó nếu cần thiết mới tiến hành tính toán mô phỏng số.

§1 MỘT SỐ KHÁI NIỆM VÀ ĐỊNH LÝ CƠ BẢN

1.1 Di chuyển ảo của vật rắn

Trong chương hai ta đã biết chuyển động tổng quát của vật rắn được xác định bởi chuyển động của một điểm định vị (điểm cực) của vật rắn và chuyển động quay tương đối của vật rắn quanh một trục quay tức thời đi qua điểm định vị đã chọn. Từ đó ta có định nghĩa sau đây.



Hình 5.1

a) *Định nghĩa 1.1.* Di chuyển ảo của vật rắn là những di chuyển vô cùng bé tương đương của vật rắn từ vị trí đang xét sang các vị trí lân cận mà phù hợp với liên kết tại thời điểm khảo sát. Như thế, di chuyển ảo của vật rắn B_i bao gồm độ dời ảo $\delta \vec{r}_{A_i}$ của điểm định vị A_i của vật rắn và độ quay ảo $\delta \vec{\varphi}_i$ quanh trục quay tức thời đi qua điểm định vị.

Khái niệm độ dời ảo đã được trình bày khá kỹ trong các giáo trình Cơ học giải tích hoặc Cơ học kỹ thuật. Trong đoạn này ta sẽ giải thích rõ hơn khái niệm độ quay ảo. Độ quay ảo $\delta \vec{\varphi}_i$ được xác định bởi công thức

$$\delta \vec{\varphi}_i = \vec{e}_1^{(i)} \delta \varphi_{i1} + \vec{e}_2^{(i)} \delta \varphi_{i2} + \vec{e}_3^{(i)} \delta \varphi_{i3} \quad (1.1)$$

Trong đó $\vec{e}_1^{(i)}, \vec{e}_2^{(i)}, \vec{e}_3^{(i)}$ là 3 vectơ đơn vị trên ba trục của hệ toạ độ $A_i x_i y_i z_i$ gắn liền vào vật rắn B_i , tại điểm A_i , còn $\delta \varphi_{i1}, \delta \varphi_{i2}, \delta \varphi_{i3}$ là hình chiếu của vectơ $\delta \vec{\varphi}$ trên ba trục của hệ toạ độ đó. Từ công thức (1.1) ta suy ra công thức xác định toán tử sóng của véc tơ quay ảo

$$\delta \vec{\varphi}_i = \begin{bmatrix} 0 & -\delta \varphi_{i3} & \delta \varphi_{i2} \\ \delta \varphi_{i3} & 0 & -\delta \varphi_{i1} \\ -\delta \varphi_{i2} & \delta \varphi_{i1} & 0 \end{bmatrix} \quad (1.2)$$

Chú ý. Sau này chúng ta thường hay chọn khối tâm C_i của vật rắn làm điểm định vị và ký hiệu độ dời ảo của khối tâm C_i là $\delta \vec{r}_{C_i}$.

b) *Các thí dụ về độ quay ảo của vật rắn*

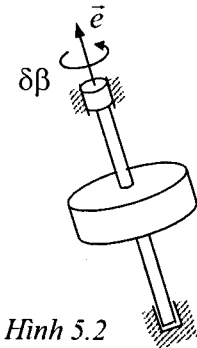
Vật rắn quanh một trục cố định (hình 5.2). Khi đó ta có

$$\delta \vec{\varphi} = \vec{e} \delta \beta$$

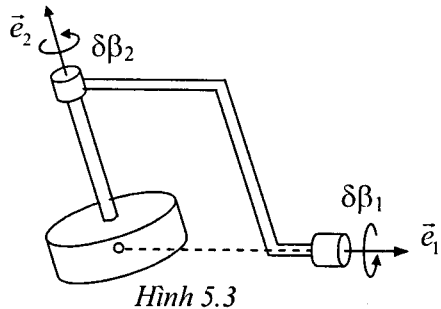
Vật rắn quay quanh hai trục cắt nhau (hình 5.3). Các phép quay ảo quanh 2 trục này là

$$\delta \vec{\varphi} = \vec{e}_1 \delta \beta_1 + \vec{e}_2 \delta \beta_2$$

Ta có hai phép quay ảo độc lập $\delta \beta_1, \delta \beta_2$.



Hình 5.2

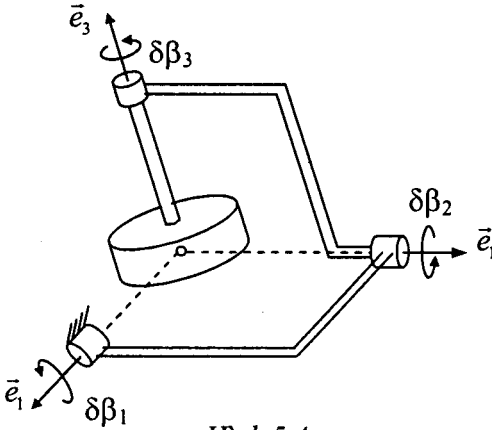


Hình 5.3

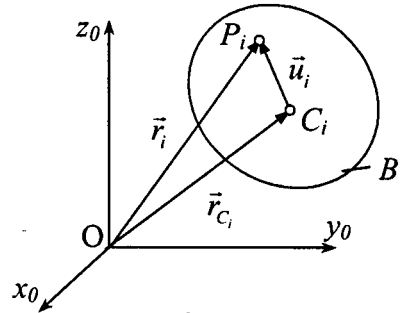
Các phép quay ảo quanh 3 trục quay tùy ý giao nhau (hình 5.4) là

$$\delta\vec{\varphi} = \vec{e}_1\delta\beta_1 + \vec{e}_2\delta\beta_2 + \vec{e}_3\delta\beta_3$$

Ta có ba phép quay ảo độc lập $\delta\beta_1, \delta\beta_2, \delta\beta_3$.



Hình 5.4



Hình 5.5

1.2 Di chuyển ảo của một điểm bất kỳ của vật rắn

Vị trí của điểm P thuộc vật rắn B được xác định bởi vectơ

$$\vec{r}_i = \vec{r}_{C_i} + \vec{u}_i \quad (1.3)$$

Từ (1.3) ta suy ra

$$\delta\vec{r}_i = \delta\vec{r}_{C_i} + \delta\vec{u}_i \Rightarrow \delta\mathbf{r}_i = \delta\mathbf{r}_{C_i} + \delta\mathbf{u}_i \quad (1.4)$$

Từ phần động học, ta đã biết

$$\frac{d\vec{u}_i}{dt} = \vec{\omega}_i \times \vec{u}_i \Rightarrow d\vec{u}_i = \vec{\omega}_i \times \vec{u}_i dt = d\vec{\varphi}_i \times \vec{u}_i$$

Từ đó suy ra

$$\delta\vec{u}_i = \delta\vec{\varphi}_i \times \vec{u}_i \Rightarrow \delta\mathbf{u}_i = \delta\vec{\varphi}_i \times \mathbf{u}_i \quad (1.5)$$

Thế (1.5) vào (1.4) ta được:

$$\delta\mathbf{r}_i = \delta\mathbf{r}_{C_i} + \delta\vec{\varphi}_i \times \mathbf{u}_i \quad (1.6)$$

1.3 Di chuyển ảo và số bậc tự do của hệ các vật rắn

a) Di chuyển ảo của hệ các vật rắn

Định nghĩa 1.2. Di chuyển ảo của hệ các vật rắn là những di chuyển vô cùng bé tưởng tượng của các vật rắn thuộc hệ-từ vị trí đang xét sang các vị trí lân cận mà phù hợp với liên kết tại thời điểm khảo sát.

Như thế, di chuyển ảo của hệ p vật rắn B, bao gồm p độ dời ảo của các điểm định vị A_i của các vật rắn và p độ quay ảo quanh các trục quay tức thời đi qua các điểm định vị

$$\delta \vec{r}_{A_i}, \delta \vec{\varphi}_i \quad (i=1, \dots, p).$$

Đối với hệ các vật rắn hólônôm giữ và dừng, di chuyển thực vô cùng bé của hệ là một trong các di chuyển ảo của hệ.

b) Số bậc tự do của hệ các vật rắn

Định nghĩa 1.3. Số bậc tự do của hệ các vật rắn chịu liên kết là số tối đa các di chuyển ảo độc lập tuyến tính của hệ.

Chú ý. Đối với hệ nhiều vật hólônôm, số tối đa các tọa độ suy rộng độc lập tuyến tính đủ để xác định vị trí của cơ hệ cũng bằng số tối đa các di chuyển ảo độc lập tuyến tính của cơ hệ. Còn đối với hệ nhiều vật không hólônôm, số tối đa các tọa độ suy rộng độc lập tuyến tính, đủ để xác định vị trí của cơ hệ có thể lớn hơn số bậc tự do của cơ hệ.

1.4 Định lý trực giao

Định lý. Cho \mathbf{b} là một vectơ trong không gian \mathbb{R}^n , $\mathbf{b} = [b_1, b_2, \dots, b_n]^T$. Điều kiện cần và đủ để cho $\mathbf{b} = [b_1, b_2, \dots, b_n]^T = \mathbf{0}$ là

$$\mathbf{s}^T \mathbf{b} = 0, \quad \forall \mathbf{s} \in \mathbb{R}^n \quad (1.7)$$

Chứng minh. Điều kiện cần $\mathbf{b} = [b_1, b_2, \dots, b_n]^T = \mathbf{0}$, suy ra $\mathbf{s}^T \mathbf{b} = 0, \quad \forall \mathbf{s} \in \mathbb{R}^n$. Đây là điều hiển nhiên, vì $\mathbf{b} = [0, 0, \dots, 0]^T$, thì

$$\mathbf{s}^T \mathbf{b} = s_1 b_1 + s_2 b_2 + \dots + s_n b_n = 0.$$

Điều kiện đủ: $\mathbf{s}^T \mathbf{b} = 0, \quad \forall \mathbf{s} \in \mathbb{R}^n \Rightarrow \mathbf{b} = [b_1, b_2, \dots, b_n]^T = \mathbf{0}$. Ta chọn vectơ \mathbf{s}_i có dạng

$$\mathbf{s}_i = [0, \dots, 1, \dots, 0]^T$$

Vectơ \mathbf{s}_i có các phần tử đều bằng không, ngoại trừ phần tử ở hàng thứ i thì bằng 1. Theo giả thiết ta có

$$\mathbf{s}_i^T \mathbf{b} = [0, \dots, 1, \dots, 0] \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_i \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} = b_i = 0$$

Cho i chạy từ 1 đến n , ta suy ra $\mathbf{b} = [b_1, b_2, \dots, b_n]^T = \mathbf{0}$.

1.5 Định lý nhân tử Lagrange

Định lý. Cho $\mathbf{b} = [b_1, b_2, \dots, b_n]^T$ là một vectơ trong không gian \mathbb{R}^n , \mathbf{A} là một ma trận chữ nhật cỡ $m \times n$. Nếu với mọi vectơ $\mathbf{s} \in \mathbb{R}^m$ mà ta có hai điều kiện

$$\mathbf{s}^T \mathbf{b} = 0 \quad (1.8)$$

$$\mathbf{A} \mathbf{s} = \mathbf{0} \quad (1.9)$$

thì tồn tại một vectơ $\boldsymbol{\lambda} \in \mathbb{R}^m$, được gọi là vectơ nhân tử Lagrange, thoả mãn phương trình

$$\mathbf{b} + \mathbf{A}^T \boldsymbol{\lambda} = \mathbf{0} \quad (1.10)$$

Nếu ma trận \mathbf{A} có hạng đầy đủ theo hàng, $\text{Rank}(\mathbf{A}) = m$, thì vectơ $\boldsymbol{\lambda} \in \mathbb{R}^m$ là duy nhất.

Chứng minh. Để định ý, ta giả sử $n \geq m$. Khi đó ta có thể phân tích ma trận \mathbf{A} , các vectơ \mathbf{s} và \mathbf{b} như sau

$$\mathbf{A} = [\mathbf{C}, \mathbf{D}], \quad \mathbf{s} = \begin{bmatrix} \mathbf{u} \\ \mathbf{v} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} \mathbf{d} \\ \mathbf{h} \end{bmatrix} \quad (1)$$

Trong đó \mathbf{C} là ma trận vuông cấp m , \mathbf{u} và \mathbf{d} là các vectơ có m phần tử. Theo giả thiết (1.9) ta có

$$\mathbf{A} \mathbf{s} = [\mathbf{C}, \mathbf{D}] \begin{bmatrix} \mathbf{u} \\ \mathbf{v} \end{bmatrix} = \mathbf{C} \mathbf{u} + \mathbf{D} \mathbf{v} = \mathbf{0} \quad (2)$$

Từ (2) ta suy ra

$$\mathbf{C} \mathbf{u} = -\mathbf{D} \mathbf{v} \quad (3)$$

Khi hạng của ma trận \mathbf{A} là m , thì ta có thể chọn \mathbf{C} là một ma trận chính qui. Từ (3) suy ra

$$\mathbf{u} = -\mathbf{C}^{-1} \mathbf{D} \mathbf{v} \quad (4)$$

Theo giả thiết (1.8) ta có

$$\mathbf{s}^T \mathbf{b} = \begin{bmatrix} \mathbf{u}^T & \mathbf{v}^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{d} \\ \mathbf{h} \end{bmatrix} = \mathbf{u}^T \mathbf{d} + \mathbf{v}^T \mathbf{h} = 0 \quad (5)$$

Thế (4) vào (5) ta được

$$\begin{bmatrix} -\mathbf{C}^{-1} \mathbf{D} \mathbf{v} \end{bmatrix}^T \mathbf{d} + \mathbf{v}^T \mathbf{h} = 0 \quad (6)$$

Do đó ta có

$$\mathbf{v}^T \left[-\mathbf{D}^T (\mathbf{C}^{-1})^T \mathbf{d} + \mathbf{h} \right] = 0 \quad (7)$$

Hệ phương trình (7) đúng với mọi vectơ \mathbf{v} . Theo định lý trực giao ở trên ta suy ra

$$\mathbf{h} = \mathbf{D}^T (\mathbf{C}^{-1})^T \mathbf{d} \quad (8)$$

Nếu ta đưa vào ký hiệu

$$\boldsymbol{\mu} = -(\mathbf{C}^{-1})^T \mathbf{d} \quad (9)$$

Thì từ (8) ta suy ra:

$$\mathbf{h} = -\mathbf{D}^T \boldsymbol{\mu} \quad (10)$$

Nhân hai vế của phương trình (9) với \mathbf{C}^T ta được

$$\mathbf{d} = -\mathbf{C}^T \boldsymbol{\mu} \quad (11)$$

Hai hệ phương trình (11) và (10) có thể viết gộp lại như sau:

$$\mathbf{b} = \begin{bmatrix} \mathbf{d} \\ \mathbf{h} \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} \mathbf{C}^T \\ \mathbf{D}^T \end{bmatrix} \boldsymbol{\mu} = -[\mathbf{C} \quad \mathbf{D}]^T \boldsymbol{\mu} \quad (12)$$

Từ (12) ta suy ra

$$\mathbf{b} + \mathbf{A}^T \boldsymbol{\lambda} = 0. \text{ Trong đó } \boldsymbol{\lambda} = \boldsymbol{\mu}. \quad (13)$$

Định lý được chứng minh xong.

1.6 Áp dụng định lý nhân tử Lagrange thành lập phương trình xác định phản lực liên kết lý tưởng

Cho một chất điểm chuyển động trên một đường hoặc một mặt cong nào đó. Phương trình liên kết có dạng

$$\mathbf{f}(\mathbf{r}, t) = 0 \quad (1)$$

Đạo hàm biểu thức (1) theo t ta được

$$\frac{d\mathbf{f}}{dt} = \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{r}} \dot{\mathbf{r}} + \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial t} = 0 \quad (2)$$

Từ (2) ta suy ra:

$$d\mathbf{f} = \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{r}} d\mathbf{r} + \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial t} dt = 0 \quad (3)$$

Từ (3) ta suy ra phương trình biến phân đẳng thời

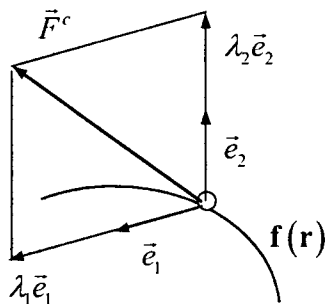
$$\delta \mathbf{f} = \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{r}} \delta \mathbf{r} = 0 \quad (4)$$

Nếu ta đưa vào ký hiệu:

$$\mathbf{F}_r = \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{r}} \quad (5)$$

Thì từ (4) ta suy ra phương trình ràng buộc biến phân

$$\mathbf{F}_r \delta \mathbf{r} = 0 \quad (6)$$



Hình 5.6

Áp dụng định lý nhân tử Lagrange tìm công thức xác định phản lực liên kết lý tưởng. Ta có

$$\delta A^c = \delta \mathbf{r}^T \mathbf{F}^c = 0, \mathbf{F}_r \delta \mathbf{r} = 0 \quad (7)$$

Chọn $\mathbf{s} = \delta \mathbf{r}$, $\mathbf{b} = \mathbf{F}^c$, $\mathbf{A} = \mathbf{F}_r$. Theo định lý nhân tử Lagrange ta có

$$\mathbf{F}^c - \mathbf{F}_r^T \boldsymbol{\lambda} = 0 \quad (8)$$

Từ (8) suy ra công thức xác định

$$\mathbf{F}^c = \mathbf{F}_r^T \boldsymbol{\lambda} \quad (9)$$

Trong đó $\boldsymbol{\lambda}$ là nhân tử Lagrange.

Để minh họa, ta xét chất điểm m chuyển động trên đường cong $\mathbf{f}(\mathbf{r}) = [f_1(q_1, q_2), f_2(q_1, q_2)]^T = \mathbf{0}$. Khi đó

$$\mathbf{F}^c = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial q_1} & \frac{\partial f_2}{\partial q_1} \\ \frac{\partial f_1}{\partial q_2} & \frac{\partial f_2}{\partial q_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial q_1} \\ \frac{\partial f_1}{\partial q_2} \end{bmatrix} \lambda_1 + \begin{bmatrix} \frac{\partial f_2}{\partial q_1} \\ \frac{\partial f_2}{\partial q_2} \end{bmatrix} \lambda_2 = \mathbf{e}_1 \lambda_1 + \mathbf{e}_2 \lambda_2 \quad (10)$$

§2 NGUYÊN LÝ D'ALEMBERT - LAGRANGE, NGUYÊN LÝ JORDAN VÀ NGUYÊN LÝ GAUSS

2.1 Nguyên lý d'Alembert-Lagrange

a) Hệ n chất điểm

Xét hệ gồm n chất điểm với các liên kết tùy ý. Theo tiên đề Newton 2 ta có

$$m_i \vec{a}_i = \vec{F}_i^a + \vec{F}_i^c \quad (i = 1, \dots, n) \quad (2.1)$$

Trong đó m_i là khối lượng, \vec{a}_i là gia tốc của chất điểm thứ i , \vec{F}_i^a là lực hoạt động, \vec{F}_i^c là lực liên kết lý tưởng tác dụng lên chất điểm thứ i .

Từ phương trình (2.1) ta suy ra

$$-\vec{F}_i^c = \vec{F}_i^a - m_i \vec{a}_i \quad (2.2)$$

Nhân vô hướng hai vế của phương trình (2.2) với di chuyển ảo $\delta \vec{r}_i$ của chất điểm thứ i , rồi cộng lại ta được:

$$-\sum_{i=1}^n \vec{F}_i^c \cdot \delta \vec{r}_i = \sum_{i=1}^n (\vec{F}_i^a - m_i \vec{a}_i) \cdot \delta \vec{r}_i \quad (2.3)$$

Do \vec{F}_i^c là các lực liên kết lý tưởng, nên theo định nghĩa ta có

$$\sum_{i=1}^n \vec{F}_i^c \cdot \delta \vec{r}_i = 0$$

Do đó từ phương trình (2.3) ta suy ra

$$\sum_{i=1}^n (\vec{F}_i^a - m_i \vec{a}_i) \cdot \delta \vec{r}_i = 0 \quad (2.4)$$

Biểu thức (2.4) là nguyên lý d'Alembert- Lagrange đối với hệ n chất điểm. Dạng ma trận của phương trình (2.4) là

$$\sum_{i=1}^n (\mathbf{F}_i^a - m_i \mathbf{a}_i)^T \delta \mathbf{r}_i = 0 \quad (2.5)$$

b) Hệ p vật rắn

Xét hệ gồm p vật rắn. Ta đưa vào ký hiệu toán tử như sau

$$\int_{(S)} = \sum_{k=1}^p \int_{B_k} \quad (2.6)$$

Với ký hiệu trên ta có các ký hiệu

$$\int_{(S)} d\vec{F}^a = \sum_{k=1}^p \int_{B_k} d\vec{F}^a, \quad \int_{(S)} \ddot{\mathbf{r}} dm = \sum_{k=1}^p \int_{B_k} \ddot{\mathbf{r}} dm$$

Xuất phát từ tiên đề Newton 2

$$dm \vec{a} = d\vec{F}^a + d\vec{F}^c$$

ta suy ra

$$-d\vec{F}^c = d\vec{F}^a - dm \vec{a}.$$

Nhân vô hướng $\delta \vec{r}$ rồi lấy tích phân trên toàn bộ hệ các vật rắn ta được

$$-\int_{(S)} d\vec{F}^c \cdot \delta \vec{r} = \int_{(S)} (d\vec{F}^a - dm \vec{a}) \cdot \delta \vec{r}$$

Do tính chất của liên kết lý tưởng ta có

$$-\int_{(S)} d\vec{F}^c \cdot \delta \vec{r} = 0$$

Từ đó suy ra

$$\int_{(S)} (d\vec{F}^a - dm \ddot{\mathbf{r}}) \cdot \delta \vec{r} = 0 \quad (2.7)$$

Biểu thức (2.7) là nguyên lý d'Alembert- Lagrange đối với hệ p vật rắn.

2.2 Dạng thức của nguyên lý d'Alembert- Lagrange đối với hệ nhiều vật

Như đoạn trên đã trình bày, di chuyển ảo của vật rắn B_k bao gồm độ dời ảo của khối tâm và độ quay ảo quanh trục quay tức thời đi qua khối tâm $\delta \vec{\varphi}_k$. Xét hệ gồm p vật rắn chịu liên kết tùy ý. Áp dụng định lý chuyển động khối tâm của vật rắn ta có

$$m_k \vec{a}_{C_k} = \vec{F}_k^a + \vec{F}_k^c, \quad (k=1, \dots, p) \quad (2.8)$$

Áp dụng định lý biến thiên mô men động lượng của vật rắn đối với khối tâm C_k của nó ta được

$$\vec{I}_{C_k} \cdot \dot{\vec{\omega}}_k + \vec{\omega}_k \times \vec{I}_{C_k} \cdot \vec{\omega}_k = \vec{M}_{C_k}^a + \vec{M}_{C_k}^c \quad (k=1, \dots, p) \quad (2.9)$$

Các phương trình (2.8) và (2.9) có thể viết lại như sau

$$\vec{F}_k^c = m_k \vec{a}_{C_k} - \vec{F}_k^a \quad (2.10)$$

$$\vec{M}_{C_k}^c = (\vec{I}_{C_k} \cdot \dot{\vec{\omega}}_k + \vec{\omega}_k \times \vec{I}_{C_k} \cdot \vec{\omega}_k) - \vec{M}_{C_k}^a \quad (2.11)$$

Nhân vô hướng biểu thức (2.10) với độ dời ảo của khối tâm vật rắn $\delta \vec{r}_{C_k}$, biểu thức (2.11) với độ quay ảo $\delta \vec{\varphi}_k$ của vật rắn B_k rồi cộng lại, ta được

$$\sum_{k=1}^p (\vec{F}_k^c \cdot \delta \vec{r}_{C_k} + \vec{M}_{C_k}^c \cdot \delta \vec{\varphi}_k) = \sum_{k=1}^p \left[(m_k \vec{a}_{C_k} - \vec{F}_k^a) \cdot \delta \vec{r}_{C_k} + (\vec{I}_{C_k} \cdot \dot{\vec{\omega}}_k + \vec{\omega}_k \times \vec{I}_{C_k} \cdot \vec{\omega}_k - \vec{M}_{C_k}^a) \cdot \delta \vec{\varphi}_k \right] \quad (2.12)$$

Theo định nghĩa liên kết lý tưởng của hệ các vật rắn ta có

$$\sum_{k=1}^p (\vec{F}_k^c \cdot \delta \vec{r}_{C_k} + \vec{M}_{C_k}^c \cdot \delta \vec{\varphi}_k) = 0 \quad (2.13)$$

Từ (2.12) và (2.13) ta có

$$\sum_{k=1}^p \left[(m_k \vec{a}_{C_k} - \vec{F}_k^a) \cdot \delta \vec{r}_{C_k} + (\vec{I}_{C_k} \cdot \dot{\vec{\omega}}_k + \vec{\omega}_k \times \vec{I}_{C_k} \cdot \vec{\omega}_k - \vec{M}_{C_k}^a) \cdot \delta \vec{\varphi}_k \right] = 0 \quad (2.14)$$

Phương trình (2.14) là dạng thức của nguyên lý d'Alembert-Lagrange đối với hệ p vật rắn. Dạng ma trận của phương trình (2.14) trong hệ qui chiếu R_0 là

$$\sum_{k=1}^p \left[(m_k \mathbf{a}_{C_k} - \mathbf{F}_k^a)^T \delta \mathbf{r}_{C_k} + (\mathbf{I}_{C_k} \dot{\boldsymbol{\omega}}_k + \boldsymbol{\omega}_k \mathbf{I}_{C_k} \boldsymbol{\omega}_k - \mathbf{M}_{C_k}^a)^T \delta \boldsymbol{\varphi}_k \right] = 0 \quad (2.15)$$

2.3 Nguyên lý Jordan

a) Hệ n chất điểm

Xét hệ n chất điểm có các liên kết tùy ý. Theo tiên đề Newton 2 ta có

$$m_i \vec{a}_i = \vec{F}_i^a + \vec{F}_i^c \quad (i=1, \dots, n) \quad (2.16)$$

Từ (2.16) ta suy ra

$$\vec{F}_i^c = m_i \vec{a}_i - \vec{F}_i^a \quad (i=1, \dots, n) \quad (2.17)$$

Ký hiệu $\delta \vec{r}_i$ là di chuyển ảo của chất điểm thứ i, còn $\delta \vec{r}_i = \delta \vec{v}_i$ là vận tốc ảo của chất điểm thứ i. Cho hệ các vận tốc ảo $\delta \vec{v}_i$ (còn $\delta \vec{r}_i = 0$). Nhân vô hướng hệ thức (2.17) với $\delta \vec{r}_i$ rồi cộng lại ta được

$$\sum_{i=1}^n \vec{F}_i^c \cdot \delta \vec{v}_i = \sum_{i=1}^n (m_i \vec{a}_i - \vec{F}_i^a) \cdot \delta \vec{v}_i \quad (2.18)$$

Theo giả thiết về liên kết lý tưởng ta có

$$\sum_{i=1}^n \vec{F}_i^c \cdot \delta \vec{v}_i = 0 \quad (2.19)$$

Do đó từ (2.18) ta suy ra phương trình

$$\sum_{i=1}^n (\vec{F}_i^a - m_i \vec{a}_i) \cdot \delta \vec{v}_i = 0 \quad (2.20)$$

Phương trình (2.18) là nguyên lý *Jordan* của hệ n chất điểm.

b) Hệ p vật rắn

Xét hệ gồm p vật rắn. Nếu ta đưa vào các ký hiệu

$$\int_{(S)} d\vec{F}^a \cdot \delta \vec{v} = \sum_{k=1}^p \int_{B_k} d\vec{F}^a \cdot \delta \vec{v}, \quad \int_{(S)} dm \vec{a} \cdot \delta \vec{v} = \sum_{k=1}^p \int_{B_k} dm \vec{a} \cdot \delta \vec{v} \quad (2.21)$$

thì từ tiên đề Newton 2

$$dm \vec{a} = d\vec{F}^a + d\vec{F}^c$$

lập luận tương tự như trên ta suy ra

$$\int_{(S)} (d\vec{F}^a - dm \vec{a}) \cdot \delta \vec{v} = 0 \quad (2.22)$$

Biểu thức (2.22) là nguyên lý *Jordan* đối với hệ p vật rắn.

2.4 Dạng thức của nguyên lý *Jordan* đối với hệ nhiều vật

Xét có hệ gồm p vật rắn. Thu gọn các lực hoạt động, các lực liên kết và các lực quán tính của mỗi vật rắn về khối tâm của nó ta được

$$\vec{F}_k^c = m_k \vec{a}_{Ck} - \vec{F}_k^a \quad (k=1, \dots, p) \quad (2.23)$$

$$\vec{M}_{Ck}^c = \vec{I}_{Ck} \cdot \dot{\vec{\omega}}_k + \vec{\omega}_k \times \vec{I}_{Ck} \cdot \vec{\omega}_k - \vec{M}_{Ck}^a \quad (k=1, \dots, p) \quad (2.24)$$

Nhân vô hướng phương trình (2.23) với vận tốc ảo $\delta \vec{v}_{Ck}$, phương trình (2.24) với vận tốc góc ảo $\delta \vec{\omega}_k$ rồi cộng lại ta được

$$\sum_{k=1}^p \vec{F}_k^c \cdot \delta \vec{v}_{Ck} + \sum_{k=1}^p \vec{M}_{Ck}^c \cdot \delta \vec{\omega}_k = \sum_{k=1}^p (m_k \vec{a}_{Ck} - \vec{F}_k^a) \cdot \delta \vec{v}_{Ck} + \sum_{k=1}^p (\vec{I}_{Ck} \cdot \dot{\vec{\omega}}_k + \vec{\omega}_k \times \vec{I}_{Ck} \cdot \vec{\omega}_k - \vec{M}_{Ck}^a) \cdot \delta \vec{\omega}_k \quad (2.25)$$

Theo định nghĩa liên kết lý tưởng ta có

$$\sum_{k=1}^p \vec{F}_k^c \cdot \delta \vec{v}_{Ck} + \sum_{k=1}^p \vec{M}_{Ck}^c \cdot \delta \vec{\omega}_k = 0 \quad (2.26)$$

Do đó từ (2.21) ta suy ra phương trình:

$$\sum_{k=1}^p (m_k \vec{a}_{Ck} - \vec{F}_k^a) \cdot \delta \vec{v}_{Ck} + \sum_{k=1}^p (\vec{I}_{Ck} \cdot \dot{\vec{\omega}}_k + \vec{\omega}_k \times \vec{I}_{Ck} \cdot \vec{\omega}_k - \vec{M}_{Ck}^a) \cdot \delta \vec{\omega}_k = 0 \quad (2.27)$$

Phương trình (2.27) là dạng thức của *nguyên lý Jordan* của hệ nhiều vật. Trong hệ qui chiếu R_0 phương trình (2.27) có thể viết lại dưới dạng ma trận như sau

$$\sum_{k=1}^p (m_k \mathbf{a}_{Ck} - \mathbf{F}_k^a)^T \delta \mathbf{v}_{Ck} + \sum_{k=1}^p (\mathbf{I}_{Ck} \dot{\boldsymbol{\omega}}_k + \tilde{\boldsymbol{\omega}}_k \mathbf{I}_{Ck} \boldsymbol{\omega}_k - \mathbf{M}_{Ck}^a)^T \delta \boldsymbol{\omega}_k = 0 \quad (2.28)$$

2.5 Dạng thức của nguyên lý Gauss đối với hệ nhiều vật

Lập luận hoàn toàn tương tự như đoạn trên chỉ khác thay biến phân vận tốc bằng biến phân gia tốc ta thu được nguyên lý *Gauss* của hệ p vật rắn

$$\sum_{k=1}^p (m_k \vec{a}_{Ck} - \vec{F}_k^a) \cdot \delta \vec{a}_{Ck} + \sum_{k=1}^p (\vec{I}_{Ck} \cdot \dot{\vec{\omega}}_k + \vec{\omega}_k \times \vec{I}_{Ck} \cdot \vec{\omega}_k - \vec{M}_{Ck}^a) \cdot \delta \vec{\alpha}_k = 0 \quad (2.29)$$

Dạng ma trận của nguyên lý *Gauss* trong hệ qui chiếu R_0 là

$$\sum_{k=1}^p (m_k \mathbf{a}_{Ck} - \mathbf{F}_k^a)^T \delta \mathbf{a}_{Ck} + \sum_{k=1}^p (\mathbf{I}_{Ck} \dot{\boldsymbol{\omega}}_k + \tilde{\boldsymbol{\omega}}_k \mathbf{I}_{Ck} \boldsymbol{\omega}_k - \mathbf{M}_{Ck}^a)^T \delta \boldsymbol{\alpha}_k = 0 \quad (2.30)$$

§3 CÁC PHƯƠNG TRÌNH NEWTON-EULER CỦA HỆ NHIỀU VẬT

3.1 Nhắc lại khái niệm ma trận Jacobi

Xét cơ hệ gồm p vật rắn chịu r liên kết hólônôm. Số bậc tự do của hệ là $f=6p-r$. Gọi các toạ độ suy rộng tối thiểu là:

$$\mathbf{q} = [q_1, q_2, \dots, q_f]^T \quad (3.1)$$

Vị trí của mỗi vật rắn được xác định bởi vectơ định vị khối tâm $\vec{r}_i = \vec{r}_{Ci}$ và ma trận côsin chỉ hướng \mathbf{A}_i

$$\mathbf{r}_i = \mathbf{r}_i(\mathbf{q}, t), \quad \mathbf{A}_i = \mathbf{A}_i(\mathbf{q}, t) \quad (3.2)$$

Từ (3.2) ta có

$$\mathbf{v}_i = \frac{d\mathbf{r}_i}{dt} = \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial \mathbf{q}} \dot{\mathbf{q}} + \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial t} = \mathbf{J}_{T_i}(\mathbf{q}, t) \dot{\mathbf{q}} + \bar{\mathbf{v}}_i(\mathbf{q}, t) \quad (3.3)$$

Trong (3.3) ta đưa vào các ký hiệu

$$\mathbf{J}_{T_i}(\mathbf{q}, t) = \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial \mathbf{q}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial r_{ix}}{\partial q_1} & \frac{\partial r_{ix}}{\partial q_2} & \dots & \frac{\partial r_{ix}}{\partial q_f} \\ \frac{\partial r_{iy}}{\partial q_1} & \frac{\partial r_{iy}}{\partial q_2} & \dots & \frac{\partial r_{iy}}{\partial q_f} \\ \frac{\partial r_{iz}}{\partial q_1} & \frac{\partial r_{iz}}{\partial q_2} & \dots & \frac{\partial r_{iz}}{\partial q_f} \end{bmatrix} \quad (3.4)$$

$$\bar{\mathbf{v}}_i(\mathbf{q}, t) = \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial t} \quad (3.5)$$

Ma trận $\mathbf{J}_{T_i}(\mathbf{q}, t)$ là ma trận chữ nhật cỡ $3 \times f$ và được gọi là *ma trận Jacobi tịnh tiến*.

Nếu ta gọi $\boldsymbol{\varphi}_i$ là véctơ quay, khi đó vận tốc góc vật rắn B_i có thể biểu diễn dưới dạng

$$\boldsymbol{\omega}_i = \frac{d\boldsymbol{\varphi}_i}{dt} = \frac{\partial \boldsymbol{\varphi}_i}{\partial \mathbf{q}} \dot{\mathbf{q}} + \frac{\partial \boldsymbol{\varphi}_i}{\partial t} = \mathbf{J}_{R_i}(\mathbf{q}, t) \dot{\mathbf{q}} + \bar{\boldsymbol{\omega}}_i(\mathbf{q}, t) \quad (3.6)$$

Trong đó, ta đưa vào khái niệm ma trận Jacobi quay \mathbf{J}_{R_i} được định nghĩa một cách hình thức như sau

$$\mathbf{J}_{R_i}(\mathbf{q}, t) = \frac{\partial \boldsymbol{\varphi}_i}{\partial \mathbf{q}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \varphi_{ix}}{\partial q_1} & \frac{\partial \varphi_{ix}}{\partial q_2} & \dots & \frac{\partial \varphi_{ix}}{\partial q_f} \\ \frac{\partial \varphi_{iy}}{\partial q_1} & \frac{\partial \varphi_{iy}}{\partial q_2} & \dots & \frac{\partial \varphi_{iy}}{\partial q_f} \\ \frac{\partial \varphi_{iz}}{\partial q_1} & \frac{\partial \varphi_{iz}}{\partial q_2} & \dots & \frac{\partial \varphi_{iz}}{\partial q_f} \end{bmatrix} \quad (3.7)$$

Ma trận \mathbf{J}_{R_i} là ma trận chữ nhật cỡ $3 \times f$. Trong (3.6) ta cũng quy định

$$\bar{\boldsymbol{\omega}}_i = \frac{\partial \boldsymbol{\varphi}_i}{\partial t} \quad (3.8)$$

Từ phương trình (3.6) ta suy ra

$$\frac{\partial \boldsymbol{\omega}_i}{\partial \dot{\mathbf{q}}} = \frac{\partial \boldsymbol{\varphi}_i}{\partial \mathbf{q}} \quad (3.9)$$

Từ đó ta có thể xác định *ma trận Jacobi quay* theo công thức sau

$$\mathbf{J}_{R_i}(\mathbf{q}, t) = \begin{bmatrix} \frac{\partial \omega_{ix}}{\partial \dot{q}_1} & \frac{\partial \omega_{ix}}{\partial \dot{q}_2} & \dots & \frac{\partial \omega_{ix}}{\partial \dot{q}_f} \\ \frac{\partial \omega_{iy}}{\partial \dot{q}_1} & \frac{\partial \omega_{iy}}{\partial \dot{q}_2} & \dots & \frac{\partial \omega_{iy}}{\partial \dot{q}_f} \\ \frac{\partial \omega_{iz}}{\partial \dot{q}_1} & \frac{\partial \omega_{iz}}{\partial \dot{q}_2} & \dots & \frac{\partial \omega_{iz}}{\partial \dot{q}_f} \end{bmatrix} \quad (3.10)$$

Đạo hàm biểu thức (3.3) ta xác định được gia tốc của khối tâm vật rắn thứ i

$$\mathbf{a}_i = \frac{d\mathbf{v}_i}{dt} = \frac{d}{dt} [\mathbf{J}_{T_i} \dot{\mathbf{q}} + \bar{\mathbf{v}}_i] = \mathbf{J}_{T_i} \ddot{\mathbf{q}} + \dot{\mathbf{J}}_{T_i} \dot{\mathbf{q}} + \bar{\mathbf{a}}_i \quad (3.11)$$

Trong đó

$$\bar{\mathbf{a}}_i = \frac{d\bar{\mathbf{v}}_i}{dt} \quad (3.12)$$

Tương tự, đạo hàm hệ thức (3.6) ta có biểu thức xác định gia tốc của vật rắn thứ i

$$\boldsymbol{\alpha}_i = \frac{d\boldsymbol{\omega}_i}{dt} = \frac{d}{dt} [\mathbf{J}_{R_i} \dot{\mathbf{q}} + \bar{\boldsymbol{\omega}}_i] = \mathbf{J}_{R_i} \ddot{\mathbf{q}} + \dot{\mathbf{J}}_{R_i} \dot{\mathbf{q}} + \bar{\boldsymbol{\alpha}}_i \quad (3.13)$$

Trong đó ta đưa vào kí hiệu

$$\bar{\boldsymbol{\alpha}}_i = \frac{d\bar{\boldsymbol{\omega}}_i}{dt} \quad (3.14)$$

3.2 Các phương trình chuyển động Newton-Euler

Trong chương 3, ta đã thiết lập phương trình Newton-Euler cho một vật rắn. Áp dụng các kết quả đó, ta có phương trình vi phân chuyển động cho vật rắn thứ i của hệ nhiều vật

$$m_i \mathbf{a}_i = \mathbf{f}_i = \mathbf{f}_i^a + \mathbf{f}_i^c \quad (i = 1, \dots, p) \quad (3.15)$$

$$\mathbf{I}_i \boldsymbol{\alpha}_i + \tilde{\boldsymbol{\omega}}_i \mathbf{I}_i \boldsymbol{\omega}_i = \mathbf{l}_i = \mathbf{l}_i^a + \mathbf{l}_i^c \quad (i = 1, \dots, p) \quad (3.16)$$

Thế các biểu thức (3.11), (3.13) vào các phương trình (3.15) và (3.16) ta được:

$$m_i \mathbf{J}_{T_i}(\mathbf{q}) \ddot{\mathbf{q}} + m_i \dot{\mathbf{J}}_{T_i}(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}} + m_i \bar{\mathbf{a}}_i = \mathbf{f}_i^a + \mathbf{f}_i^c \quad (i=1, \dots, p) \quad (3.17)$$

$$\mathbf{I}_i \mathbf{J}_{R_i}(\mathbf{q}) \ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{I}_i \dot{\mathbf{J}}_{R_i}(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}} + \mathbf{I}_i \bar{\boldsymbol{\alpha}}_i + \boldsymbol{\omega}_i \mathbf{I}_i \boldsymbol{\omega}_i = \mathbf{l}_i^a + \mathbf{l}_i^c \quad (i=1, \dots, p) \quad (3.18)$$

Trong các phương trình trên \mathbf{I}_i là ma trận của tenxơ quán tính của vật rắn thứ i đối với khối tâm của nó trong hệ quy chiếu quán tính R_0 .

Cho i chạy từ 1 đến p và viết gộp các phương trình (3.17), (3.18) lại, ta được phương trình ma trận sau

$$\bar{\mathbf{M}}(\mathbf{q}, t)\ddot{\mathbf{q}} + \bar{\mathbf{k}}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) = \bar{\mathbf{Q}}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) = \bar{\mathbf{Q}}^a + \bar{\mathbf{Q}}^c \quad (3.19)$$

Trong đó ta sử dụng các kí hiệu

$$\bar{\mathbf{M}}(\mathbf{q}, t) = \begin{bmatrix} m_1 \mathbf{J}_{T_1} \\ \dots \\ m_p \mathbf{J}_{T_p} \\ \mathbf{I}_1 \mathbf{J}_{R_1} \\ \dots \\ \mathbf{I}_p \mathbf{J}_{R_p} \end{bmatrix}, \quad \bar{\mathbf{Q}}^a = \begin{bmatrix} \mathbf{f}_1^a \\ \vdots \\ \mathbf{f}_p^a \\ \mathbf{l}_1^a \\ \vdots \\ \mathbf{l}_p^a \end{bmatrix}, \quad \bar{\mathbf{Q}}^c = \begin{bmatrix} \mathbf{f}_1^c \\ \vdots \\ \mathbf{f}_p^c \\ \mathbf{l}_1^c \\ \vdots \\ \mathbf{l}_p^c \end{bmatrix}, \quad (3.20)$$

$$\bar{\mathbf{k}}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) = \begin{bmatrix} m_1 \dot{\mathbf{J}}_{T_1} \dot{\mathbf{q}} + m_1 \bar{\mathbf{a}}_1 \\ \dots \\ m_p \dot{\mathbf{J}}_{T_p} \dot{\mathbf{q}} + m_p \bar{\mathbf{a}}_p \\ \mathbf{I}_1 \dot{\mathbf{J}}_{R_1} \dot{\mathbf{q}} + \mathbf{I}_1 \bar{\boldsymbol{\alpha}}_1 + \tilde{\boldsymbol{\omega}}_1 \mathbf{I}_1 \boldsymbol{\omega}_1 \\ \dots \\ \mathbf{I}_p \dot{\mathbf{J}}_{R_p} \dot{\mathbf{q}} + \mathbf{I}_p \bar{\boldsymbol{\alpha}}_p + \tilde{\boldsymbol{\omega}}_p \mathbf{I}_p \boldsymbol{\omega}_p \end{bmatrix} \quad (3.21)$$

Chú ý: Do $m_i \mathbf{J}_{T_i}$ và $\mathbf{I}_i \mathbf{J}_{R_i}$ là các ma trận cỡ $3 \times f$ nên $\mathbf{M}(\mathbf{q}, t)$ là ma trận cỡ $6p \times f$.

3.3 Khử các phản lực liên kết lý tưởng, đưa phương trình chuyển động về dạng tối giản

Để khử các phản lực liên kết lý tưởng $\bar{\mathbf{Q}}^c$ trong phương trình (3.19) ta đưa vào ma trận Jacobi cỡ $6p \times f$ được xác định bởi hệ thức sau

$$\bar{\mathbf{J}}(\mathbf{q}, t) = \left[\mathbf{J}_{T_1}^T \quad \dots \quad \mathbf{J}_{T_p}^T \quad \mathbf{J}_{R_1}^T \quad \dots \quad \mathbf{J}_{R_p}^T \right]^T \quad (3.22)$$

Nhân bên trái phương trình (3.19) với ma trận Jacobi chuyển vị $\bar{\mathbf{J}}^T$ cỡ $6p \times f$ ta được

$$\bar{\mathbf{J}}^T \bar{\mathbf{M}} \ddot{\mathbf{q}} + \bar{\mathbf{J}}^T \bar{\mathbf{k}} = \bar{\mathbf{J}}^T \bar{\mathbf{Q}}^a + \bar{\mathbf{J}}^T \bar{\mathbf{Q}}^c \quad (3.23)$$

Bây giờ ta phải chứng minh hệ thức

$$\bar{\mathbf{J}}^T \bar{\mathbf{Q}}^c = 0 \quad (3.24)$$

Theo định nghĩa ta có

$$\delta \mathbf{r}_i = \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial \mathbf{q}} \delta \mathbf{q} = \mathbf{J}_{T_i} \delta \mathbf{q} \quad (1)$$

$$\delta\varphi_i = \frac{\partial\varphi_i}{\partial\mathbf{q}} \delta\mathbf{q} = \mathbf{J}_{R_i} \delta\mathbf{q} \quad (2)$$

Mặt khác từ định nghĩa liên kết lý tưởng ta có hệ thức

$$\sum_{i=1}^p (\bar{\mathbf{f}}_i^c \cdot \delta\bar{\mathbf{r}}_i + \bar{l}_i^c \cdot \delta\bar{\varphi}_i) = 0 \quad (3)$$

$$\sum_{i=1}^p [(\delta\mathbf{r}_i)^T \mathbf{f}_i^c + (\delta\varphi_i)^T l_i^c] = 0 \quad (4)$$

Thế các biểu thức (1) và (2) vào phương trình (4) ta được

$$\delta\mathbf{q}^T \sum_{i=1}^p (\mathbf{J}_{T_i}^T \mathbf{f}_i^c + \mathbf{J}_{R_i}^T l_i^c) = 0 \quad (5)$$

Từ (5) suy ra

$$\sum_{i=1}^p (\mathbf{J}_{T_i}^T \mathbf{f}_i^c + \mathbf{J}_{R_i}^T l_i^c) = \bar{\mathbf{J}}^T \bar{\mathbf{Q}}^c = 0 \quad (6)$$

Ta đưa vào các kí hiệu

$$\mathbf{M}(\mathbf{q}, t) = \bar{\mathbf{J}}^T \bar{\mathbf{M}}, \quad \mathbf{k} = \bar{\mathbf{J}}^T \bar{\mathbf{k}}, \quad \mathbf{h} = \bar{\mathbf{J}}^T \bar{\mathbf{Q}}^c \quad (3.25)$$

Do $\bar{\mathbf{J}}^T$ là ma trận cỡ $6p \times f$ nên $\bar{\mathbf{M}}$ là ma trận cỡ $p \times f$ nên ma trận \mathbf{M} là ma trận cỡ $f \times f$ hay ma trận vuông cấp f . Tương tự ta có \mathbf{k} và \mathbf{h} là các vectơ có f thành phần.

Phương trình (3.23) bây giờ có dạng

$$\mathbf{M}(\mathbf{q}, t) \ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{k}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) = \mathbf{h}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) \quad (3.26)$$

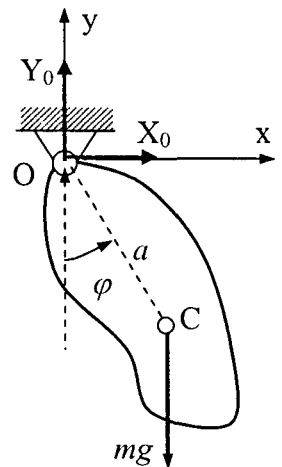
Trong đó \mathbf{M} là ma trận vuông cấp f . Chú ý rằng f là số bậc tự do của hệ nhiều vật.

3.4 Các thí dụ áp dụng

Thí dụ 5.1. Cho mô hình con lắc vật lý như hình (5.7). Cho biết khối lượng con lắc là m , khoảng cách từ O đến khối tâm C là $OC = a$, mômen quán tính đối với trục đi qua khối tâm và vuông góc với mặt phẳng con lắc là I_C . Áp dụng phương trình Newton-Euler, thiết lập phương trình vi phân chuyển động của con lắc. Sau đó tìm biểu thức xác định phân lực liên kết tại O.

Lời giải. Chọn φ làm toạ độ suy rộng. Các phương trình chuyển động của con lắc vật lý (hình 5.7) có dạng

$$m\mathbf{J}_T \ddot{\varphi} + m\mathbf{J}_T \dot{\varphi} = \mathbf{f}^a + \mathbf{f}^c \quad (1)$$



Hình 5.7

$$\mathbf{I}_c \mathbf{J}_R \ddot{\varphi} + \mathbf{I}_c \dot{\mathbf{J}}_R \dot{\varphi} = \mathbf{l}'' + \mathbf{l}^c \quad (2)$$

Từ hình vẽ ta có

$$\mathbf{r}_c = \begin{bmatrix} x_c \\ y_c \\ z_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \sin(\varphi) \\ -a \cos(\varphi) \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3)$$

Từ (3) ta có

$$\mathbf{J}_T = \frac{\partial \mathbf{r}_c}{\partial \varphi} = \begin{bmatrix} a \cos(\varphi) \\ a \sin(\varphi) \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \dot{\mathbf{J}}_T = \dot{\varphi} \begin{bmatrix} -a \sin(\varphi) \\ a \cos(\varphi) \\ 0 \end{bmatrix} \quad (4)$$

Để dàng tính được vận tốc góc của con lắc vật lý

$$\boldsymbol{\omega} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\varphi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \dot{\varphi} \Rightarrow \mathbf{J}_R = \frac{\partial \boldsymbol{\omega}}{\partial \dot{\varphi}} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \dot{\mathbf{J}}_R = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (5)$$

Từ hình vẽ ta dễ dàng xác định được

$$\mathbf{f}'' = \begin{bmatrix} 0 \\ -mg \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{f}^c = \begin{bmatrix} X_0 \\ Y_0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{l}'' = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{l}^c = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -X_0 a \cos(\varphi) - Y_0 a \sin(\varphi) \end{bmatrix} \quad (6)$$

Thế các biểu thức (4), (5), (6) vào các phương trình (1), (2) và bỏ qua các hàng toàn số 0 ta được ba phương trình vi phân chuyển động của con lắc vật lý theo Newton-Euler:

$$\begin{bmatrix} ma \cos(\varphi) \\ ma \sin(\varphi) \\ I_c \end{bmatrix} \ddot{\varphi} + \begin{bmatrix} -ma \sin(\varphi) \\ ma \cos(\varphi) \\ 0 \end{bmatrix} \dot{\varphi}^2 = \begin{bmatrix} 0 \\ -mg \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} X_0 \\ Y_0 \\ -X_0 a \cos(\varphi) - Y_0 a \sin(\varphi) \end{bmatrix} \quad (7)$$

Để khử các phản lực liên kết X_0 , Y_0 , đưa phương trình (7) về dạng tối thiểu, ta đưa vào ma trận Jacobi

$$\bar{\mathbf{J}} = [a \cos(\varphi) \quad a \sin(\varphi) \quad 1]^T \quad (8)$$

Nhân bên trái phương trình (7) với ma trận $\bar{\mathbf{J}}^T$ ta được

$$\begin{aligned} (ma^2 \cos^2 \varphi + ma^2 \sin^2 \varphi + I_c) \ddot{\varphi} + (-ma^2 \sin \varphi \cos \varphi + ma^2 \cos \varphi \sin \varphi) \dot{\varphi}^2 \\ = -mga \sin \varphi + \underbrace{(aX_0 \cos \varphi + aY_0 \sin \varphi - aX_0 \cos \varphi - aY_0 \sin \varphi)}_{=0} \end{aligned} \quad (9)$$

$$(ma^2 + I_c) \ddot{\varphi} + mga \sin \varphi = 0$$

Chú ý. Trong một số bài toán người ta tìm cách xác định các phản lực liên kết lý tưởng. Muốn vậy ta viết lại phương trình (7) dưới dạng

$$\begin{bmatrix} ma \cos(\varphi) \\ ma \sin(\varphi) \\ I_c \end{bmatrix} \ddot{\varphi} + \begin{bmatrix} -ma \sin(\varphi) \\ ma \cos(\varphi) \\ 0 \end{bmatrix} \dot{\varphi}^2 + \begin{bmatrix} 0 \\ mg \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -a \cos \varphi & -a \sin \varphi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_0 \\ Y_0 \end{bmatrix} \quad (10)$$

Bây giờ ta đưa vào ma trận $\bar{\bar{\mathbf{M}}}$ theo công thức

$$\bar{\bar{\mathbf{M}}} = \text{diag}(m_1 \mathbf{E}, \dots, m_p \mathbf{E}, \mathbf{I}_1, \dots, \mathbf{I}_p) \quad (11)$$

Trong đó \mathbf{E} là ma trận đơn vị cấp ba. Trong thí dụ này ma trận $\bar{\bar{\mathbf{M}}}$ có dạng

$$\bar{\bar{\mathbf{M}}} = \begin{bmatrix} m & 0 & 0 \\ 0 & m & 0 \\ 0 & 0 & I_c \end{bmatrix} \Rightarrow \bar{\bar{\mathbf{M}}}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{m} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{m} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{I_c} \end{bmatrix} \quad (12)$$

Để đơn giản cách viết, ta kí hiệu ma trận hệ số vector phản lực liên kết là \mathbf{H}

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -a \cos \varphi & -a \sin \varphi \end{bmatrix} \quad (13)$$

Từ (12) và (13) ta có

$$\mathbf{H}^T \bar{\bar{\mathbf{M}}}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -a \cos \varphi \\ 0 & 1 & -a \sin \varphi \\ 0 & 0 & \frac{1}{I_c} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{m} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{m} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{I_c} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{m} & 0 & -\frac{a}{I_c} \cos \varphi \\ 0 & \frac{1}{m} & -\frac{a}{I_c} \sin \varphi \\ 0 & 0 & \frac{1}{I_c} \end{bmatrix} \quad (14)$$

Để tìm phản lực liên kết ta nhân bên trái phương trình (10) với ma trận $\mathbf{H}^T \bar{\bar{\mathbf{M}}}^{-1}$. Tính toán trung gian ta được

$$\mathbf{H}^T \bar{\bar{\mathbf{M}}}^{-1} \mathbf{H} = \begin{bmatrix} \frac{1}{m} & 0 & -\frac{a}{I_c} \cos \varphi \\ 0 & \frac{1}{m} & -\frac{a}{I_c} \sin \varphi \\ 0 & 0 & \frac{1}{I_c} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -a \cos \varphi & -a \sin \varphi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{m} + \frac{a^2}{I_c} \cos^2 \varphi & \frac{a^2}{I_c} \sin \varphi \cos \varphi \\ \frac{a^2}{I_c} \sin \varphi \cos \varphi & \frac{1}{m} + \frac{a^2}{I_c} \sin^2 \varphi \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{HM}^{-1} \begin{bmatrix} ma \cos \varphi \\ ma \sin \varphi \\ I_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \cos \varphi - a \cos \varphi \\ a \sin \varphi - a \sin \varphi \end{bmatrix} = \mathbf{0}$$

Từ đó ta suy ra phương trình xác định phản lực liên kết

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{m} + \frac{a^2}{I_c} \cos^2 \varphi & \frac{a^2}{I_c} \sin \varphi \cos \varphi \\ \frac{a^2}{I_c} \sin \varphi \cos \varphi & \frac{1}{m} + \frac{a^2}{I_c} \sin^2 \varphi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_0 \\ Y_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -a \sin \varphi \\ a \cos \varphi \end{bmatrix} \dot{\varphi}^2 + \begin{bmatrix} 0 \\ g \end{bmatrix} \quad (15)$$

Ta đưa và ký hiệu

$$\mathbf{N}(\varphi) = \begin{bmatrix} \frac{1}{m} + \frac{a^2}{I_c} \cos^2 \varphi & \frac{a^2}{I_c} \sin \varphi \cos \varphi \\ \frac{a^2}{I_c} \sin \varphi \cos \varphi & \frac{1}{m} + \frac{a^2}{I_c} \sin^2 \varphi \end{bmatrix}$$

Từ phương trình (15) suy ra

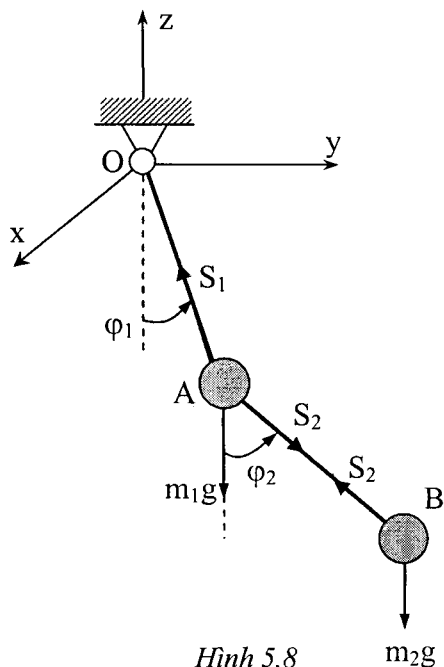
$$\begin{bmatrix} X_0 \\ Y_0 \end{bmatrix} = \mathbf{N}^{-1}(\varphi) \begin{bmatrix} -a \sin \varphi \\ a \cos \varphi \end{bmatrix} \dot{\varphi}^2 + \mathbf{N}^{-1}(\varphi) \begin{bmatrix} 0 \\ g \end{bmatrix} \quad (16)$$

Thí dụ 5.2 Thiết lập phương trình vi phân chuyển động của con lắc kép toán học (hình 5.8) bằng phương pháp Newton-Euler. Cho biết $OA = l_1$; $AB = l_2$. Khối lượng chất điểm A là m_1 , chất điểm B là m_2 . Bỏ qua trọng lượng các thanh.

Lời giải. Chọn hệ tọa độ suy rộng $\mathbf{q} = [q_1, q_2]^T$. Các vectơ xác định vị trí của hai chất điểm A, B có dạng

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_1 = OA &= \begin{bmatrix} 0 \\ l_1 \sin(\varphi_1) \\ -l_1 \cos(\varphi_1) \end{bmatrix}, \\ \mathbf{r}_2 &= \begin{bmatrix} 0 \\ l_1 \sin(\varphi_1) + l_2 \sin(\varphi_2) \\ -l_1 \cos(\varphi_1) - l_2 \cos(\varphi_2) \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (1)$$

Các vectơ lực có dạng



Hình 5.8

m_2g

$$\mathbf{f}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -m_1 g \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ -S_1 \sin \varphi_1 + S_2 \sin \varphi_2 \\ S_1 \cos \varphi_1 - S_2 \cos \varphi_2 \end{bmatrix} \quad (2)$$

$$\mathbf{f}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -m_2 g \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \sin \varphi_2 \\ S_2 \cos \varphi_2 \end{bmatrix} \quad (3)$$

Từ (1) ta dễ dàng tính được các ma trận Jacobi tịnh tiến

$$\mathbf{J}_{T_1} = \frac{\partial \mathbf{r}_1}{\partial \mathbf{q}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ l_1 \cos \varphi_1 & 0 \\ l_1 \sin \varphi_1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{J}_{T_2} = \frac{\partial \mathbf{r}_2}{\partial \mathbf{q}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ l_1 \cos \varphi_1 & l_2 \cos \varphi_2 \\ l_1 \sin \varphi_1 & l_2 \sin \varphi_2 \end{bmatrix} \quad (4)$$

Do hệ chỉ gồm các chất điểm nên $\boldsymbol{\omega}_i = \mathbf{0}$ ($\mathbf{J}_{Ri} = \mathbf{0}$). Các phương trình Newton-Euler của con lắc toán học kép có dạng

$$m_1 \mathbf{J}_{T_1} \ddot{\mathbf{q}} + m_1 \dot{\mathbf{J}}_{T_1} \dot{\mathbf{q}} = \mathbf{f}_1^a + \mathbf{f}_1^c \quad (5)$$

$$m_2 \mathbf{J}_{T_2} \ddot{\mathbf{q}} + m_2 \dot{\mathbf{J}}_{T_2} \dot{\mathbf{q}} = \mathbf{f}_2^a + \mathbf{f}_2^c \quad (6)$$

Thế các biểu thức (2), (3) và (4) vào phương trình trên ta được:

$$m_1 \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ l_1 \cos \varphi_1 & 0 \\ l_1 \sin \varphi_1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\varphi}_1 \\ \ddot{\varphi}_2 \end{bmatrix} + m_1 \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -l_1 \dot{\varphi}_1 \sin \varphi_1 & 0 \\ l_1 \dot{\varphi}_1 \cos \varphi_1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\varphi}_1 \\ \dot{\varphi}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -m_1 g \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ -S_1 \sin \varphi_1 + S_2 \sin \varphi_2 \\ S_1 \cos \varphi_1 - S_2 \cos \varphi_2 \end{bmatrix}$$

$$m_2 \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ l_1 \cos \varphi_1 & l_2 \cos \varphi_2 \\ l_1 \sin \varphi_1 & l_2 \sin \varphi_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\varphi}_1 \\ \ddot{\varphi}_2 \end{bmatrix} + m_2 \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -l_1 \dot{\varphi}_1 \sin \varphi_1 & -l_2 \dot{\varphi}_2 \sin \varphi_2 \\ l_1 \dot{\varphi}_1 \cos \varphi_1 & l_2 \dot{\varphi}_2 \cos \varphi_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\varphi}_1 \\ \dot{\varphi}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -m_2 g \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ -S_2 \sin \varphi_2 \\ S_2 \cos \varphi_2 \end{bmatrix}$$

Gộp hai hệ phương trình trên ta được

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ m_1 l_1 \cos \varphi_1 & 0 \\ m_1 l_1 \sin \varphi_1 & 0 \\ 0 & 0 \\ m_2 l_1 \cos \varphi_1 & m_2 l_2 \cos \varphi_2 \\ m_2 l_1 \sin \varphi_1 & m_2 l_2 \sin \varphi_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\varphi}_1 \\ \ddot{\varphi}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -m_1 l_1 \dot{\varphi}_1 \sin \varphi_1 & 0 \\ m_1 l_1 \dot{\varphi}_1 \cos \varphi_1 & 0 \\ 0 & 0 \\ -m_2 l_1 \dot{\varphi}_1 \sin \varphi_1 & -m_2 l_2 \dot{\varphi}_2 \sin \varphi_2 \\ m_2 l_1 \dot{\varphi}_1 \cos \varphi_1 & m_2 l_2 \dot{\varphi}_2 \cos \varphi_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\varphi}_1 \\ \dot{\varphi}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -m_1 g \\ 0 \\ 0 \\ -m_2 g \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ -S_1 \sin \varphi_1 + S_2 \sin \varphi_2 \\ S_1 \cos \varphi_1 - S_2 \cos \varphi_2 \\ 0 \\ -S_2 \sin \varphi_2 \\ S_2 \cos \varphi_2 \end{bmatrix} \quad (7)$$

Phương trình (7) có thể viết gọn dưới dạng

$$\bar{\mathbf{M}}(\boldsymbol{\varphi}) \ddot{\boldsymbol{\varphi}} + \bar{\mathbf{k}}(\boldsymbol{\varphi}, \dot{\boldsymbol{\varphi}}) = \bar{\mathbf{Q}}^a + \bar{\mathbf{Q}}^c \quad (8)$$

Để khử các liên kết đưa phương trình vi phân (7) về dạng đơn giản nhất, ta đưa vào ma trận Jacobi xác định theo công thức sau

$$\bar{\mathbf{J}}^T = [\mathbf{J}_{\tau_1}^T \quad \mathbf{J}_{\tau_2}^T] = \begin{bmatrix} 0 & l_1 \cos \varphi_1 & l_1 \sin \varphi_1 & 0 & l_1 \cos \varphi_1 & l_1 \sin \varphi_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & l_2 \cos \varphi_2 & l_2 \sin \varphi_2 \end{bmatrix} \quad (9)$$

Nhân bên trái phương trình vi phân (7) với ma trận Jacobi chuyển vị ta được phương trình vi phân chuyển động của con lắc kép toán học dạng đơn giản nhất

$$\begin{bmatrix} (m_1 + m_2)l_1^2 & m_2 l_1 l_2 \cos(\varphi_1 - \varphi_2) \\ m_2 l_1 l_2 \cos(\varphi_1 - \varphi_2) & m_2 l_2^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\varphi}_1 \\ \ddot{\varphi}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} m_2 l_1 l_2 \dot{\varphi}_2^2 \sin(\varphi_1 - \varphi_2) \\ -m_2 l_1 l_2 \dot{\varphi}_1^2 \sin(\varphi_1 - \varphi_2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -(m_1 + m_2)gl_1 \sin(\varphi_1) \\ -m_2 gl_2 \sin(\varphi_2) \end{bmatrix} \quad (10)$$

Thí dụ 5.3. Cho mô hình con lắc vật lý kép như hình 5.9. Cho biết khối lượng của các vật rắn là m_1, m_2 , mômen quán tính của chúng đối với các trục vuông góc hình vẽ và đi qua khối tâm tương ứng là I_1, I_2 . Cho biết các khoảng cách $OC_1 = a_1, AC_2 = a_2, OA = l$. Gia tốc trọng trường là g . Thiết lập phương trình vi phân chuyển động của hệ bằng phương pháp các phương trình Newton-Euler.

Lời giải. Ta chọn tọa độ suy rộng

$$\mathbf{q} = [\varphi_1, \varphi_2]^T \quad (1)$$

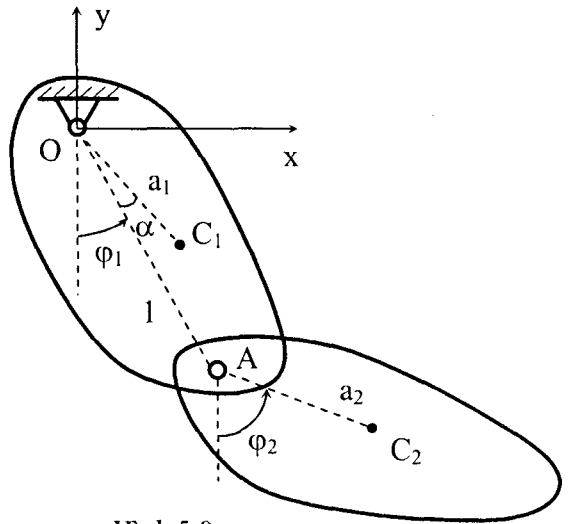
Véc tơ tọa độ khối tâm của khâu 1

$$\mathbf{r}_1 = \begin{bmatrix} a_1 \sin(\varphi_1 + \alpha) \\ -a_1 \cos(\varphi_1 + \alpha) \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2)$$

Véc tơ tọa độ khối tâm của khâu 2

$$\mathbf{r}_2 = \begin{bmatrix} l \sin \varphi_1 + a_2 \sin \varphi_2 \\ -l \cos \varphi_1 - a_2 \cos \varphi_2 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3)$$

Từ (2) và (3) ta dễ dàng tính được các ma trận Jacobi tịnh tiến



Hình 5.9

$$\mathbf{J}_{T_1} = \frac{\partial \mathbf{r}_1}{\partial \mathbf{q}} = \begin{bmatrix} a_1 \cos(\varphi_1 + \alpha) & 0 \\ a_1 \sin(\varphi_1 + \alpha) & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \dot{\mathbf{J}}_{T_1} = \begin{bmatrix} -\dot{\varphi}_1 a_1 \sin(\varphi_1 + \alpha) & 0 \\ \dot{\varphi}_1 a_1 \cos(\varphi_1 + \alpha) & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (4)$$

$$\mathbf{J}_{T_2} = \frac{\partial \mathbf{r}_2}{\partial \mathbf{q}} = \begin{bmatrix} l \cos \varphi_1 & a_2 \cos \varphi_2 \\ l \sin \varphi_1 & a_2 \sin \varphi_2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \dot{\mathbf{J}}_{T_2} = \begin{bmatrix} -\dot{\varphi}_1 l \sin \varphi_1 & -\dot{\varphi}_2 a_2 \sin \varphi_2 \\ \dot{\varphi}_1 l \cos \varphi_1 & \dot{\varphi}_2 a_2 \cos \varphi_2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (5)$$

Từ hình vẽ 5.9 ta xác định được các véc tơ vận tốc góc

$$\boldsymbol{\omega}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\varphi}_1 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{\omega}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\varphi}_2 \end{bmatrix}, \quad \tilde{\boldsymbol{\omega}}_1 = \begin{bmatrix} 0 & -\dot{\varphi}_1 & 0 \\ \dot{\varphi}_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \tilde{\boldsymbol{\omega}}_2 = \begin{bmatrix} 0 & -\dot{\varphi}_2 & 0 \\ \dot{\varphi}_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (6)$$

Từ đó suy ra các ma trận *Jacobi* quay và các đạo hàm của chúng

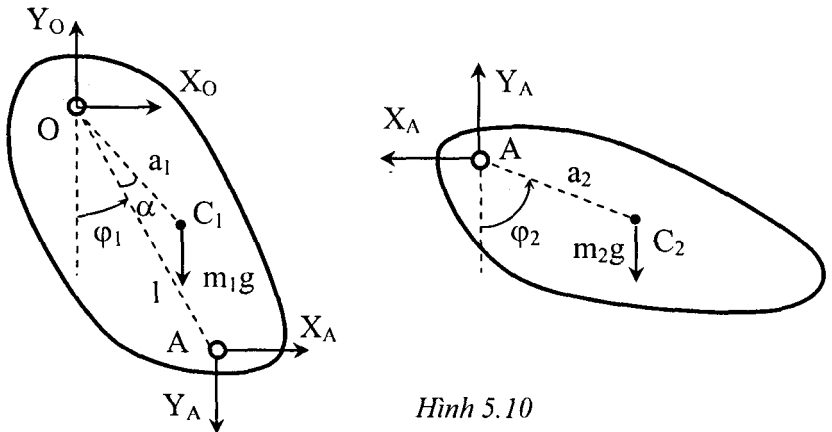
$$\mathbf{J}_{R_1} = \frac{\partial \boldsymbol{\omega}_1}{\partial \dot{\mathbf{q}}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \dot{\mathbf{J}}_{R_1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (7)$$

$$\mathbf{J}_{R_2} = \frac{\partial \boldsymbol{\omega}_2}{\partial \dot{\mathbf{q}}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \dot{\mathbf{J}}_{R_2} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (8)$$

Từ đầu bài ta có các ma trận quán tính khối

$$\mathbf{I}_{C_1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I_1 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{I}_{C_2} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I_2 \end{bmatrix} \quad (9)$$

Từ hình 5.10 ta dễ dàng xác định các véc tơ lực và các mômen ngẫu lực



Hình 5.10

$$\mathbf{f}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ -m_1 g \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} X_O + X_A \\ Y_O - Y_A \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{f}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ -m_2 g \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -X_A \\ Y_A \\ 0 \end{bmatrix} \quad (10)$$

$$l_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ (X_A - X_O)a_1 \cos(\varphi_1 + \alpha) + (Y_A - Y_O)a_1 \sin(\varphi_1 + \alpha) + X_A l \cos \varphi_1 - Y_A l \sin \varphi_1 \end{bmatrix} \quad (11)$$

$$l_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ X_A a_2 \cos \varphi_2 - Y_A a_2 \sin \varphi_2 \end{bmatrix} \quad (12)$$

Theo các công thức (3.17) và (3.18) các phương trình vi phân *Newton – Euler* của con lắc kép vật lý có dạng

$$\bar{\mathbf{M}}(\mathbf{q}, t)\ddot{\mathbf{q}} + \bar{\mathbf{k}}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) = \bar{\mathbf{Q}}$$

Trong đó

$$\bar{\mathbf{M}}(\mathbf{q}, t) = \begin{bmatrix} m_1 \mathbf{J}_{T1} \\ m_2 \mathbf{J}_{T2} \\ \mathbf{I}_{C1} \mathbf{J}_{R1} \\ \mathbf{I}_{C2} \mathbf{J}_{R2} \end{bmatrix}, \quad \bar{\mathbf{k}}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) = \begin{bmatrix} m_1 \dot{\mathbf{J}}_{T1} \dot{\mathbf{q}} \\ m_2 \dot{\mathbf{J}}_{T2} \dot{\mathbf{q}} \\ \mathbf{I}_{C1} \dot{\mathbf{J}}_{R1} \dot{\mathbf{q}} + \tilde{\omega}_1 \mathbf{I}_{C1} \omega_1 \\ \mathbf{I}_{C2} \dot{\mathbf{J}}_{R2} \dot{\mathbf{q}} + \tilde{\omega}_2 \mathbf{I}_{C2} \omega_2 \end{bmatrix}, \quad \bar{\mathbf{Q}} = \begin{bmatrix} \mathbf{f}_1 \\ \mathbf{f}_2 \\ l_1 \\ l_2 \end{bmatrix}$$

Thế các biểu thức từ (4) đến (12) vào (13) ta nhận được phương trình

$$\begin{bmatrix} m_1 a_1 \cos(\varphi_1 + \alpha) & 0 \\ m_1 a_1 \sin(\varphi_1 + \alpha) & 0 \\ 0 & 0 \\ m_2 l \cos \varphi_1 & m_2 a_2 \cos \varphi_2 \\ m_2 l \sin \varphi_1 & m_2 a_2 \sin \varphi_2 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ I_1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & I_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\varphi}_1 \\ \ddot{\varphi}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -m_1 a_1 \sin(\varphi_1 + \alpha) \dot{\varphi}_1^2 \\ m_1 a_1 \cos(\varphi_1 + \alpha) \dot{\varphi}_1^2 \\ 0 \\ -m_2 (l \sin \varphi_1 \dot{\varphi}_1^2 + a_2 \sin \varphi_2 \dot{\varphi}_2^2) \\ m_2 (l \cos \varphi_1 \dot{\varphi}_1^2 + a_2 \cos \varphi_2 \dot{\varphi}_2^2) \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} X_O + X_A \\ -m_1 g + Y_O - Y_A \\ 0 \\ -X_A \\ -m_2 g + Y_A \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ (X_A - X_O) a_1 \cos(\varphi_1 + \alpha) + (Y_A - Y_O) a_1 \sin(\varphi_1 + \alpha) + X_A l \cos \varphi_1 - Y_A l \sin \varphi_1 \\ 0 \\ 0 \\ X_A a_2 \cos \varphi_2 - Y_A a_2 \sin \varphi_2 \end{bmatrix} \quad (14)$$

Ta tiến hành khử các phản lực liên kết lý tưởng để đưa phương trình vi phân (14) về dạng tối giản bằng cách nhân bên trái phương trình (14) với ma trận *Jacobi* chuyển vị

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{J}}^T(q, t) &= [\mathbf{J}_{T1}^T, \mathbf{J}_{T2}^T, \mathbf{J}_{R1}^T, \mathbf{J}_{R2}^T] \\ &= \begin{bmatrix} a_1 \cos(\varphi_1 + \alpha) & a_1 \sin(\varphi_1 + \alpha) & 0 & l \cos \varphi_1 & l \sin \varphi_1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_2 \cos \varphi_2 & a_2 \sin \varphi_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (15)$$

Kết quả ta thu được hệ phương trình vi phân chuyển động dạng tối giản của mô hình con lắc kép vật lynch sau

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} m_1 a_1^2 + m_2 l^2 + I_1 & m_2 a_2 l \cos(\varphi_1 - \varphi_2) \\ m_2 a_2 l \cos(\varphi_1 - \varphi_2) & m_2 a_2^2 + I_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\varphi}_1 \\ \ddot{\varphi}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} m_2 a_2 l \dot{\varphi}_2^2 \sin(\varphi_1 - \varphi_2) \\ -m_2 a_2 l \dot{\varphi}_1^2 \sin(\varphi_1 - \varphi_2) \end{bmatrix} \\ & = \begin{bmatrix} -m_1 a_1 g \sin(\varphi_1 + \alpha) - m_2 l g \sin \varphi_1 \\ -m_2 a_2 g \sin \varphi_2 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (16)$$

§4 PHƯƠNG TRÌNH LAGRANGE LOẠI 2 CỦA HỆ NHIỀU VẬT

4.1 Thiết lập phương trình Lagrange loại hai

a) Một vài công thức động học cần thiết

Giả sử vị trí của mỗi chất điểm thuộc hệ là hàm của các tọa độ suy rộng và thời gian

$$\vec{r} = \vec{r}(q_1, q_2, \dots, q_m, t), \quad q_i = q_i(t) \quad (i=1, \dots, m) \quad (4.1)$$

Đạo hàm hệ thức (4.1) theo thời gian t ta được

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{v} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_i} \dot{q}_i + \frac{\partial \vec{r}}{\partial t}$$

Từ đó suy ra

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial \dot{q}_j} = \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_j} \quad (4.2)$$

Do $\vec{v} = \vec{v}(q_1, \dots, q_m, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_m, t)$ và $\frac{\partial \vec{r}}{\partial q_j} = \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_j}(q_1, \dots, q_n, t)$ nên ta có

$$\begin{aligned} \frac{\partial \vec{v}}{\partial q_j} &= \sum_{i=1}^m \frac{\partial^2 \vec{r}}{\partial q_i \partial q_j} \dot{q}_i + \frac{\partial^2 \vec{r}}{\partial q_j \partial t} \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \vec{r}}{\partial q_j} \right) &= \sum_{i=1}^m \frac{\partial^2 \vec{r}}{\partial q_i \partial q_j} \dot{q}_i + \frac{\partial^2 \vec{r}}{\partial q_j \partial t} \end{aligned}$$

So sánh hai công thức ta rút ra hệ thức

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \vec{r}}{\partial q_j} \right) = \frac{\partial}{\partial q_j} \left(\frac{d\vec{r}}{dt} \right) = \frac{\partial \vec{v}}{\partial q_j} \quad (4.3)$$

b) *Thiết lập phương trình Lagrange loại hai cho hệ n chất điểm*

Xét hệ hêlônôm gồm n chất điểm và có f bậc tự do. Như thế cơ hệ xác định bởi f tọa độ suy rộng đủ: q_1, q_2, \dots, q_f . Nguyên lý d'Alembert - Lagrange đối với hệ n chất điểm có dạng

$$\sum_{k=1}^n (\vec{F}_k^a - m_k \vec{a}_k) \cdot \delta \vec{r}_k = 0 \quad (4.4)$$

Từ (4.1) ta có

$$\delta \vec{r}_k = \sum_{i=1}^f \frac{\partial \vec{r}_k}{\partial q_i} \delta q_i \quad (4.5)$$

Thế (4.5) vào biểu thức (4.4) ta được hệ thức

$$\sum_{i=1}^f \left(\sum_{k=1}^n \vec{F}_k^a \cdot \frac{\partial \vec{r}_k}{\partial q_i} \right) \delta q_i - \sum_{i=1}^f \left(\sum_{k=1}^n m_k \frac{d^2 \vec{r}_k}{dt^2} \cdot \frac{\partial \vec{r}_k}{\partial q_i} \right) \delta q_i = 0 \quad (4.6)$$

Theo định nghĩa lực suy rộng ta có

$$Q_i = \sum_{k=1}^n \vec{F}_k^a \cdot \frac{\partial \vec{r}_k}{\partial q_i} \quad (4.7)$$

Bây giờ ta biến đổi biểu thức

$$K_i = \sum_{k=1}^n m_k \frac{d^2 \vec{r}_k}{dt^2} \cdot \frac{\partial \vec{r}_k}{\partial q_i} = \frac{d}{dt} \sum_{k=1}^n m_k \dot{\vec{r}}_k \cdot \frac{\partial \vec{r}_k}{\partial q_i} - \sum_{k=1}^n m_k \dot{\vec{r}}_k \cdot \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \vec{r}_k}{\partial q_i} \right) \quad (4.8)$$

Chú ý đến các công thức (4.2) và (4.3), biểu thức (4.8) có dạng

$$K_i = \frac{d}{dt} \sum_{k=1}^n m_k \bar{v}_k \cdot \frac{\partial \bar{v}_k}{\partial \dot{q}_i} - \sum_{k=1}^n m_k \bar{v}_k \cdot \frac{\partial \bar{v}_k}{\partial q_i} \quad (4.9)$$

Các đạo hàm riêng theo \dot{q}_i và q_i của biểu thức động năng $T = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n m_k \bar{v}_k^2$ có dạng

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} = \sum_{k=1}^n m_k \bar{v}_k \frac{\partial \bar{v}_k}{\partial \dot{q}_i}, \quad \frac{\partial T}{\partial q_i} = \sum_{k=1}^n m_k \bar{v}_k \frac{\partial \bar{v}_k}{\partial q_i} \quad (4.10)$$

Chú ý đến các công thức (4.10), biểu thức (4.9) có dạng

$$K_i = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} \quad (4.11)$$

Thế (4.7) và (4.11) vào phương trình (4.6) ta được

$$\sum_{i=1}^f \left[\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} - Q_i \right] \delta q_i = 0$$

Do các biến phân $\delta q_i (i=1, \dots, f)$ độc lập với nhau, nên ta có

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} = Q_i \quad (i=1, \dots, f) \quad (4.12)$$

Trong đó Q_i là các lực suy rộng. Các phương trình vi phân (4.12) được gọi là phương trình Lagrange loại hai, mô tả chuyển động của các hệ holoônôm.

Nếu sử dụng định nghĩa đạo hàm của một vô hướng theo biến véctơ (công thức (6.15) chương 1) hệ các phương trình (4.12) có thể viết gọn lại dưới dạng ma trận như sau

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \right)^T - \left(\frac{\partial T}{\partial \mathbf{q}} \right)^T = \mathbf{g} \quad (4.13)$$

hay

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \right) - \left(\frac{\partial T}{\partial \mathbf{q}} \right) = \mathbf{g}^T \quad (4.14)$$

Trong đó ta đưa vào ký hiệu

$$\mathbf{q} = \begin{bmatrix} q_1 \\ \vdots \\ q_f \end{bmatrix}, \quad \mathbf{g} = \begin{bmatrix} Q_1 \\ \vdots \\ Q_f \end{bmatrix} \quad (4.15)$$

Nếu ta phân các lực tác dụng lên cơ hệ thành các lực có thể và các lực không có thể thì lực suy rộng Q_i được tính theo công thức

$$Q_i = -\frac{\partial \Pi}{\partial q_i} + Q_i^{np} \quad (4.16)$$

Trong đó Q_i^{np} là lực suy rộng ứng với các lực không có thể.

Trong trường hợp lực tác dụng lên cơ hệ đều là các lực có thể thì $Q_i^{np} = 0$. Khi đó phương trình Lagrange loại hai có dạng

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} = -\frac{\partial \Pi}{\partial q_i}, \quad (i=1, \dots, f) \quad (4.17)$$

Nếu ta đưa vào hệ thức

$$L = T(q_1, \dots, q_f, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_f, t) - \Pi(q_1, \dots, q_f)$$

thì phương trình (4.17) có dạng

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0 \quad (i=1, \dots, f) \quad (4.18)$$

c) *Thiết lập phương trình Lagrange loại hai cho hệ p vật rắn*

Xét hệ hólônôm gồm p vật rắn và có f bậc tự do. Vị trí của cơ hệ được xác định bởi f tọa độ suy rộng đủ: q_1, q_2, \dots, q_f . Nguyên lý d'Alembert - Lagrange đối với hệ p vật rắn có dạng

$$\int_{(S)} (d\vec{F}^a - dm\ddot{\vec{r}}) \cdot \delta \vec{r} = 0 \quad (4.19)$$

Từ (4.1) ta có

$$\delta \vec{r} = \sum_{i=1}^f \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_i} \delta q_i \quad (4.20)$$

Thế (4.20) vào biểu thức (4.19) ta được hệ thức

$$\sum_{i=1}^f \left(\int_{(S)} d\vec{F}^a \cdot \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_i} \right) \delta q_i - \sum_{i=1}^f \left(\int_{(S)} dm \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} \cdot \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_i} \right) \delta q_i = 0$$

Theo định nghĩa lực suy rộng ta có

$$Q_i = \int_{(S)} d\vec{F}^a \cdot \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_i}$$

Bây giờ ta biến đổi biểu thức

$$K_i = \int_{(S)} dm \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} \cdot \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_i} = \frac{d}{dt} \int_{(S)} dm \dot{\vec{r}} \cdot \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_i} - \int_{(S)} dm \dot{\vec{r}} \cdot \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \vec{r}}{\partial q_i} \right)$$

Chú ý đến các công thức (4.2) và (4.3), biểu thức trên có dạng

$$K_i = \frac{d}{dt} \int_{(S)} dm \vec{v} \cdot \frac{\partial \vec{v}}{\partial \dot{q}_i} - \int_{(S)} dm \vec{v} \cdot \frac{\partial \vec{v}}{\partial q_i} \quad (4.21)$$

Các đạo hàm riêng theo \dot{q}_i và q_i của biểu thức động năng $T = \frac{1}{2} \int_{(S)} dm \vec{v}^2$ có dạng

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} = \int_{(S)} dm \vec{v} \cdot \frac{\partial \vec{v}}{\partial \dot{q}_i}, \quad \frac{\partial T}{\partial q_i} = \int_{(S)} dm \vec{v} \cdot \frac{\partial \vec{v}}{\partial q_i} \quad (4.22)$$

Chú ý đến các công thức (4.21) và (4.22) ta suy ra

$$K_i = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} \quad (4.23)$$

Thế (4.20) và (4.23) vào phương trình (4.19) ta được

$$\sum_{i=1}^f \left[\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} - Q_i \right] \delta q_i = 0$$

Do các biến phân $\delta q_i (i=1, \dots, f)$ là độc lập nhau, nên ta có

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} = Q_i \quad (i=1, \dots, f) \quad (4.24)$$

Trong đó Q_i là các lực suy rộng. Nếu ta phân các lực tác dụng lên cơ hệ thành các lực có thể và các lực không có thể thì lực suy rộng Q_i được tính theo công thức

$$Q_i = -\frac{\partial \Pi}{\partial q_i} + Q_i^{np} \quad (4.25)$$

Trong đó Q_i^{np} là lực suy rộng ứng với các lực không thể. Khi đó phương trình (4.24) có dạng

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} = -\frac{\partial \Pi}{\partial q_i} + Q_i^{np} \quad (i=1, \dots, f) \quad (4.26)$$

Các phương trình vi phân (4.26) được gọi là phương trình Lagrange loại hai, mô tả chuyển động của các hệ nhiều vật hõlônôm. Chú ý rằng ta có thể viết hệ phương trình (4.24) dưới dạng ma trận (4.13) hoặc (4.14).

4.2 Dạng thức Lagrange loại 2 của hệ nhiều vật

Xét cơ hệ gồm p vật rắn, chịu r liên kết hólônôm. Số bậc tự do của cơ hệ là $f = 6p - r$. Trong đoạn này dựa trên khái niệm ma trận Jacôbi, ta thiết lập dạng thức Lagrange loại 2 cho hệ nhiều vật hólônôm.

Ký hiệu các tọa độ suy rộng tối thiểu là

$$\mathbf{q} = [q_1, \dots, q_f]^T \quad (4.27)$$

Vị trí của mỗi vật rắn B_i ở trong hệ quy chiếu cố định $R_0 = Ox_0y_0z_0$ được xác định bởi vectơ xác định vị trí khối tâm và ma trận côsin chỉ hướng của vật rắn.

$$\mathbf{r}_{c_i} = \mathbf{r}_{c_i}(\mathbf{q}, t), \quad \mathbf{A}_i = \mathbf{A}_i(\mathbf{q}, t) \quad (4.28)$$

Để đơn giản, dưới đây ta chỉ xét các hệ hólônôm giữ và dừng. Khi đó biểu thức (4.28) có dạng

$$\mathbf{r}_{c_i} = \mathbf{r}_{c_i}(\mathbf{q}), \quad \mathbf{A}_i = \mathbf{A}_i(\mathbf{q}) \quad (4.29)$$

Trạng thái vận tốc của vật rắn B_i được xác định bởi vận tốc khối tâm và vận tốc góc của nó

$$\mathbf{v}_{c_i} = \frac{d\mathbf{r}_{c_i}}{dt} = \frac{\partial \mathbf{r}_{c_i}}{\partial \mathbf{q}} \dot{\mathbf{q}}, \quad \tilde{\omega}_i = \dot{\mathbf{A}}_i \mathbf{A}_i^T \quad (4.30)$$

Theo đoạn trên ta có

$$\mathbf{J}_{T_i} = \frac{\partial \mathbf{r}_{c_i}}{\partial \mathbf{q}}, \quad \mathbf{J}_{R_i} = \frac{\partial \tilde{\omega}_i}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \quad (4.31)$$

Vận tốc khối tâm vật rắn và vận tốc góc của nó theo trên có thể viết dưới dạng

$$\mathbf{v}_{c_i} = \mathbf{J}_{T_i}(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}}, \quad \tilde{\omega}_i = \mathbf{J}_{R_i}(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}} \quad (4.32)$$

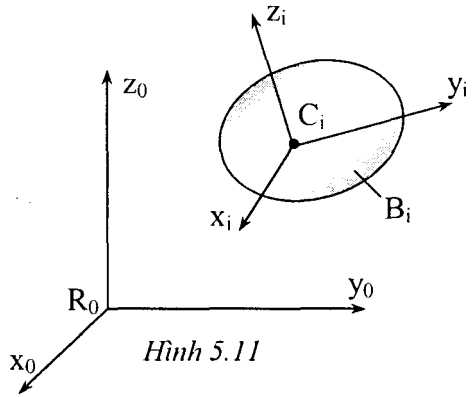
Trong chương 3 ta đã thiết lập biểu thức tính động năng của một vật rắn. Từ đó ta suy ra biểu thức động năng của hệ p vật rắn.

$$T = \sum_{i=1}^p T_i = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^p m_i \mathbf{v}_{c_i}^T \mathbf{v}_{c_i} + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^p \tilde{\omega}_i^T \mathbf{I}_i \tilde{\omega}_i \quad (4.33)$$

Trong (4.33) \mathbf{I}_i là ma trận của tenxơ quán tính của vật rắn thứ i đối với khối tâm C_i của nó ở trong hệ quy chiếu cố định R_0 .

Chú ý. Trong tính toán thực hành có khi người ta thay việc tính biểu thức

$\sum_{i=1}^p \tilde{\omega}_i^T \mathbf{I}_i \tilde{\omega}_i$ bằng tính biểu thức $\sum_{i=1}^p \omega_i^{(i)T} \mathbf{I}_i^{(i)} \omega_i^{(i)}$. Trong đó $\mathbf{I}_i^{(i)}$ là ma trận của tenxơ



Hình 5.11

quán tính của vật rắn đối với khối tâm C_i của nó ở trong hệ qui chiếu động $C_i x_i y_i z_i$ gắn liền vào vật B_i , còn $\omega_i^{(i)}$ là véc tơ đại số của $\bar{\omega}_i$ trong hệ qui chiếu $C_i x_i y_i z_i$.

Thế các biểu thức (4.32) vào biểu thức (4.33) ta được

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^p m_i (\mathbf{J}_{T_i} \dot{\mathbf{q}})^T \mathbf{J}_{T_i} \dot{\mathbf{q}} + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^p (\mathbf{J}_{R_i} \dot{\mathbf{q}})^T \mathbf{I}_i \mathbf{J}_{R_i} \dot{\mathbf{q}} \\ &= \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}^T \left[\sum_{i=1}^p (m_i \mathbf{J}_{T_i}^T \mathbf{J}_{T_i} + \mathbf{J}_{R_i}^T \mathbf{I}_i \mathbf{J}_{R_i}) \right] \dot{\mathbf{q}} \end{aligned} \quad (4.34)$$

Bây giờ ta đưa vào ký hiệu

$$\mathbf{M}(\mathbf{q}) = \sum_{i=1}^p (m_i \mathbf{J}_{T_i}^T \mathbf{J}_{T_i} + \mathbf{J}_{R_i}^T \mathbf{I}_i \mathbf{J}_{R_i}) \quad (4.35)$$

Biểu thức (4.35) được gọi là ma trận khối lượng suy rộng. Khi đó biểu thức động năng của hệ nhiều vật có dạng rất gọn như sau:

$$T = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{M}(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}} \quad (4.36)$$

Trong đó

$$\mathbf{M}(\mathbf{q}) = \begin{bmatrix} m_{11}(\mathbf{q}) & \cdots & m_{1f}(\mathbf{q}) \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ m_{f1}(\mathbf{q}) & \cdots & m_{ff}(\mathbf{q}) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{q} = \begin{bmatrix} q_1 \\ \vdots \\ q_f \end{bmatrix}, \quad \dot{\mathbf{q}} = \begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \vdots \\ \dot{q}_f \end{bmatrix}, \quad \ddot{\mathbf{q}} = \begin{bmatrix} \ddot{q}_1 \\ \vdots \\ \ddot{q}_f \end{bmatrix} \quad (4.37)$$

Biểu thức động năng (4.36) có thể viết lại dưới dạng như sau

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^f \sum_{j=1}^f m_{ij} (q_1, \dots, q_f) \dot{q}_i \dot{q}_j \quad (4.38)$$

Đạo hàm biểu thức động năng (4.38) theo các vận tốc suy rộng \dot{q}_j và các tọa độ suy rộng q_j ta được

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} = \sum_{k=1}^f m_{jk} \dot{q}_k, \quad \frac{\partial T}{\partial q_j} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^f \sum_{l=1}^f \frac{\partial m_{kl}}{\partial q_j} \dot{q}_k \dot{q}_l$$

Từ đó suy ra

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \right) = \sum_{k=1}^f m_{jk} \ddot{q}_k + \sum_{k=1}^f \sum_{l=1}^f \frac{\partial m_{jk}}{\partial q_l} \dot{q}_k \dot{q}_l$$

Thế các biểu thức trên vào phương trình Lagrange loại 2

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_j} = -\frac{\partial \Pi}{\partial q_j} + Q_j^{np} \quad (j=1, \dots, f) \quad (4.39)$$

ta được

$$\sum_{k=1}^f m_{jk} \ddot{q}_k + \sum_{k=1}^f \sum_{l=1}^f \left(m_{jk,l} - \frac{1}{2} m_{kl,j} \right) \dot{q}_k \dot{q}_l = -\frac{\partial \Pi}{\partial q_j} + Q_j^{np} \quad (j=1, \dots, f) \quad (4.40)$$

Trong đó ta sử dụng các ký hiệu

$$m_{jk,l} = \frac{\partial m_{jk}}{\partial q_l}, \quad m_{kl,j} = \frac{\partial m_{kl}}{\partial q_j} \quad (4.41)$$

Do ma trận khối lượng $\mathbf{M}(\mathbf{q})$ là ma trận đối xứng, nên ta có $m_{ij,k} = m_{jk,i} = m_{ki,j}$.

Do đó

phương trình (4.40) có thể viết lại dưới dạng như sau

$$\sum_{k=1}^f m_{jk} \ddot{q}_k + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^f \sum_{l=1}^f (m_{ij,k} + m_{jk,l} - m_{kl,j}) \dot{q}_k \dot{q}_l = -\frac{\partial \Pi}{\partial q_j} + Q_j^{np} \quad (j=1, \dots, f) \quad (4.42)$$

Phương trình (4.40) và (4.42) thường được gọi là dạng thức Lagrange loại 2 của hệ nhiều vật.

4.3 Các thí dụ áp dụng

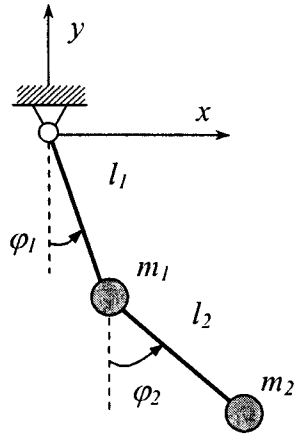
Thí dụ 5.4. Thành lập phương trình vi phân chuyển động của con lắc kép toán học bằng phương pháp dạng thức Lagrange loại hai. Cho biết m_1, m_2, l_1, l_2 (hình vẽ 5.12)

Lời giải. Chọn các góc, làm các tọa độ suy rộng ta có

$$\mathbf{q} = [\varphi_1, \varphi_2]^T$$

Từ hình vẽ 5.11 ta có

$$\mathbf{r}_1 = \begin{bmatrix} l_1 \sin \varphi_1 \\ -l_1 \cos \varphi_1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{r}_2 = \begin{bmatrix} l_1 \sin \varphi_1 + l_2 \sin \varphi_2 \\ -l_1 \cos \varphi_1 - l_2 \cos \varphi_2 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (1)$$



Hình 5.12

Từ (1) dễ dàng tính được các ma trận Jacobi tịnh tiến

$$\mathbf{J}_{T_1} = \frac{\partial \mathbf{r}_1}{\partial \mathbf{q}} = \begin{bmatrix} l_1 \cos \varphi_1 & 0 \\ l_1 \sin \varphi_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{J}_{T_2} = \frac{\partial \mathbf{r}_2}{\partial \mathbf{q}} = \begin{bmatrix} l_1 \cos \varphi_1 & l_2 \cos \varphi_2 \\ l_1 \sin \varphi_1 & l_2 \sin \varphi_2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (2)$$

Ma trận khối lượng suy rộng

$$\begin{aligned} \mathbf{M}(\mathbf{q}) &= \mathbf{J}_{\tau_1}^T m_1 \mathbf{J}_{\tau_1} + \mathbf{J}_{\tau_2}^T m_2 \mathbf{J}_{\tau_2} \\ &= \begin{bmatrix} (m_1 + m_2)l_1^2 & m_2 l_1 l_2 \cos(\varphi_1 - \varphi_2) \\ m_2 l_1 l_2 \cos(\varphi_1 - \varphi_2) & m_2 l_2^2 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (3)$$

Thế (3) vào biểu thức động năng ta được

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{M}(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}} \\ &= \frac{1}{2} \left[(m_1 + m_2)l_1^2 \dot{\varphi}_1^2 + 2m_2 l_1 l_2 \cos(\varphi_1 - \varphi_2) \dot{\varphi}_1 \dot{\varphi}_2 + m_2 l_2^2 \dot{\varphi}_2^2 \right] \end{aligned} \quad (4)$$

Từ hình vẽ (5.12) ta dễ dàng tìm được biểu thức thế năng của hệ

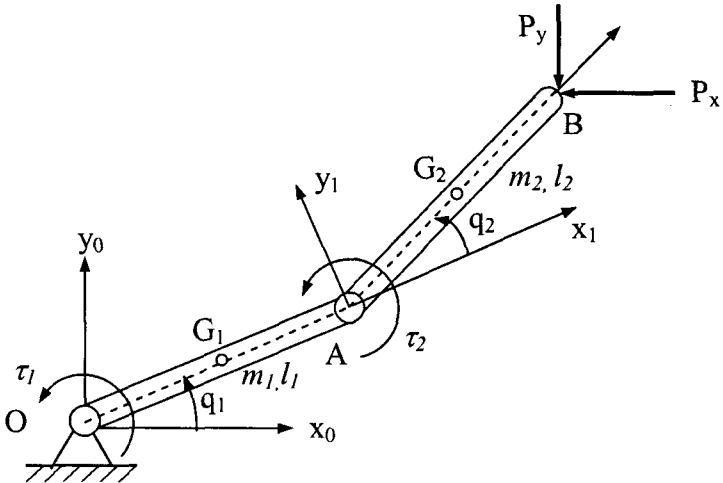
$$\Pi = -m_1 g l_1 \cos \varphi_1 - m_2 g (l_1 \cos \varphi_1 + l_2 \cos \varphi_2) \quad (5)$$

Thế các biểu thức động năng (4) và (5) vào phương trình Lagrange loại hai (3.14) ta được hệ các phương trình vi phân chuyển động của con lắc kép.

$$\begin{aligned} (m_1 + m_2)l_1^2 \ddot{\varphi}_1 + m_2 l_1 l_2 \ddot{\varphi}_2 \cos(\varphi_1 - \varphi_2) + m_2 l_1 l_2 \dot{\varphi}_2^2 \sin(\varphi_1 - \varphi_2) + (m_1 + m_2)g l_1 \sin \varphi_1 &= 0 \\ m_2 l_1 l_2 \ddot{\varphi}_1 \cos(\varphi_1 - \varphi_2) + m_2 l_2^2 \ddot{\varphi}_2 - m_2 l_1 l_2 \dot{\varphi}_1^2 \sin(\varphi_1 - \varphi_2) + m_2 g l_2 \sin \varphi_2 &= 0 \end{aligned} \quad (6)$$

Thí dụ 5.5. Cho mô hình cơ học rôbốt phẳng hai khâu như hình 5.13. Cho biết khối lượng các khâu là m_1, m_2 , độ dài các khâu là l_1, l_2 , mômen quán tính của các khâu đối với trục đi qua khối tâm và vuông góc với mặt phẳng hình vẽ là I_{z_1}, I_{z_2} . Khối tâm của mỗi khâu nằm ở giữa khâu. Lực điều khiển là P_x, P_y như hình vẽ.

Hãy thiết lập phương trình vi phân chuyển động của Rôbốt bằng dạng thức Lagrange loại 2. Chọn các tọa độ suy rộng tương đối như hình vẽ.



Hình 5.13

Lời giải. Nếu chọn các tọa độ suy rộng là các góc quay tuyệt đối như thí dụ 5.4 thì tính toán đơn giản hơn. Tuy nhiên trong bài này do yêu cầu của đầu bài ta phải chọn các tọa độ suy rộng tương đối như hình 5.13, $\mathbf{q} = [q_1, q_2]^T$.

Từ hình 5.13 ta dễ dàng xác định vị trí khối tâm

$$\mathbf{r}_1 = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}l_1 \cos q_1 \\ \frac{1}{2}l_1 \sin q_1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{r}_2 = \begin{bmatrix} l_1 \cos q_1 + \frac{1}{2}l_2 \cos(q_1 + q_2) \\ l_1 \sin q_1 + \frac{1}{2}l_2 \sin(q_1 + q_2) \\ 0 \end{bmatrix} \quad (1)$$

Từ (1) ta tính được các ma trận Jacobi tịnh tiến

$$\mathbf{J}_{\tau_1} = \frac{\partial \mathbf{r}_1}{\partial \mathbf{q}} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2}l_1 \sin q_1 & 0 \\ \frac{1}{2}l_1 \cos q_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (2)$$

$$\mathbf{J}_{\tau_2} = \frac{\partial \mathbf{r}_2}{\partial \mathbf{q}} = \begin{bmatrix} -l_1 \sin q_1 - \frac{1}{2}l_2 \sin(q_1 + q_2) & -\frac{1}{2}l_2 \sin(q_1 + q_2) \\ l_1 \cos q_1 + \frac{1}{2}l_2 \cos(q_1 + q_2) & \frac{1}{2}l_2 \cos(q_1 + q_2) \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (3)$$

Từ hình vẽ dễ dàng xác định vận tốc góc của các khâu

$$\boldsymbol{\omega}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{q}_1 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{\omega}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{q}_1 + \dot{q}_2 \end{bmatrix} \quad (4)$$

Từ (4) suy ra các ma trận Jacobi quay của các khâu

$$\mathbf{J}_{R_1} = \frac{\partial \boldsymbol{\omega}_1}{\partial \dot{\mathbf{q}}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{J}_{R_2} = \frac{\partial \boldsymbol{\omega}_2}{\partial \dot{\mathbf{q}}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \quad (5)$$

Các ma trận của các tenxơ quán tính của các khâu đối với khối tâm của chúng có dạng

$$\mathbf{I}_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I_{z1} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{I}_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I_{z2} \end{bmatrix} \quad (6)$$

Theo định nghĩa biểu thức ma trận khối lượng suy rộng có dạng

$$\mathbf{M}(\mathbf{q}) = \mathbf{J}_{T_1}^T m_1 \mathbf{J}_{T_1} + \mathbf{J}_{T_2}^T m_2 \mathbf{J}_{T_2} + \mathbf{J}_{R_1}^T \mathbf{I}_1 \mathbf{J}_{R_1} + \mathbf{J}_{R_2}^T \mathbf{I}_2 \mathbf{J}_{R_2} \quad (7)$$

Thế các biểu thức (2), (3), (5), (6) vào biểu thức (7) ta được

$$\mathbf{M}(\mathbf{q}) = \begin{bmatrix} m_1 \frac{l_1^2}{4} + m_2 \left(l_1^2 + \frac{l_2^2}{4} + l_1 l_2 \cos q_2 \right) + I_{z1} + I_{z2} & m_2 \left(\frac{l_2^2}{4} + \frac{l_1 l_2}{4} \cos q_2 \right) + I_{z2} \\ m_2 \left(\frac{l_2^2}{4} + \frac{l_1 l_2}{4} \cos q_2 \right) + I_{z2} & m_2 \frac{l_2^2}{4} + I_{z2} \end{bmatrix} \quad (8)$$

Thế (8) vào biểu thức động năng

$$T = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{M}(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}}$$

ta được

$$T = \frac{1}{2} \left\{ \left[m_1 \frac{l_1^2}{4} + m_2 \left(l_1^2 + \frac{l_2^2}{4} + l_1 l_2 \cos q_2 \right) + I_{z1} + I_{z2} \right] \dot{q}_1^2 + \left(m_2 \frac{l_2^2}{4} + I_{z2} \right) \dot{q}_2^2 + \left[m_2 \left(\frac{l_2^2}{2} + l_1 l_2 \cos q_2 \right) + 2I_{z2} \right] \dot{q}_1 \dot{q}_2 \right\} \quad (9)$$

Biểu thức thế năng của cơ hệ có dạng

$$\Pi = \frac{1}{2} m_1 g l_1 \sin q_1 + m_2 g \left[l_1 \sin q_1 + \frac{1}{2} l_2 \sin (q_1 + q_2) \right] \quad (10)$$

Công ảo của các lực suy rộng không có thể

$$\delta A = \tau_1 \delta q_1 + \tau_2 \delta q_2 - P_x \delta x_B - P_y \delta y_B \quad (11)$$

Từ hệ thức

$$x_B = l_1 \cos q_1 + l_2 \cos (q_1 + q_2)$$

$$y_B = l_1 \sin q_1 + l_2 \sin (q_1 + q_2)$$

ta suy ra

$$\delta x_B = \left[-l_1 \sin q_1 - l_2 \sin (q_1 + q_2) \right] \delta q_1 - l_2 \sin (q_1 + q_2) \delta q_2$$

$$\delta y_B = \left[l_1 \cos q_1 + l_2 \cos (q_1 + q_2) \right] \delta q_1 + l_2 \cos (q_1 + q_2) \delta q_2$$

Từ đó suy ra

$$Q_1^{pp} = \tau_1 + P_x [l_1 \sin q_1 + l_2 \sin(q_1 + q_2)] - P_y [l_1 \cos q_1 + l_2 \cos(q_1 + q_2)] \quad (12)$$

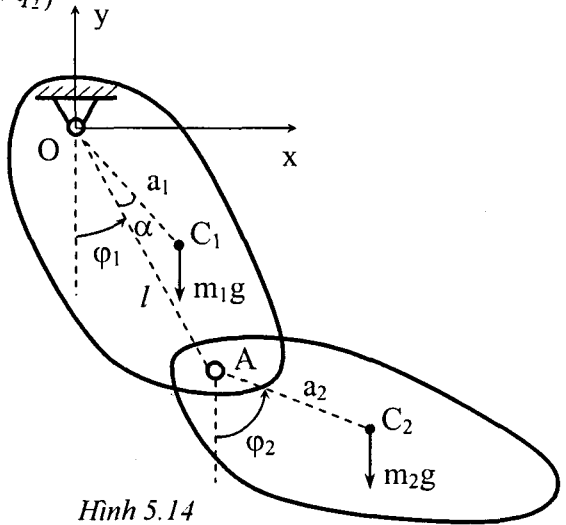
$$Q_2^{pp} = \tau_2 + P_x l_2 \sin(q_1 + q_2) - P_y l_2 \cos(q_1 + q_2) \quad (13)$$

Thế các biểu thức (9), (10), (12), (13) vào phương trình Lagrange loại hai ta được các phương trình vi phân chuyển động của rôbốt phẳng hai khâu

$$\begin{aligned} \tau_1 = & \left(I_{z_1} + I_{z_2} + m_2 l_1 l_2 \cos q_2 + \frac{m_1 l_1^2 + m_2 l_2^2}{4} + m_2 l_1^2 \right) \ddot{q}_1 + \left(I_{z_2} + \frac{m_2 l_2^2}{4} + \frac{m_2 l_1 l_2}{2} \cos q_2 \right) \ddot{q}_2 \\ & - m_2 l_1 l_2 \dot{q}_1 \dot{q}_2 \sin q_2 - \frac{1}{2} m_2 l_1 l_2 \dot{q}_2^2 \sin q_2 + g \left[l_1 \left(\frac{m_1}{2} + m_2 \right) \cos q_1 + \frac{m_2 l_2}{2} \cos(q_1 + q_2) \right] \\ & - P_x [l_1 \sin q_1 + l_2 \sin(q_1 + q_2)] + P_y [l_1 \cos q_1 + l_2 \cos(q_1 + q_2)] \end{aligned} \quad (14)$$

$$\begin{aligned} \tau_2 = & \left(I_{z_2} + \frac{m_2 l_2^2}{4} + \frac{m_2 l_1 l_2}{2} \cos q_2 \right) \ddot{q}_1 + \left(I_{z_2} + \frac{m_2 l_2^2}{4} \right) \ddot{q}_2 \\ & + \frac{1}{2} m_2 l_1 l_2 \dot{q}_1^2 \sin q_2 + \frac{1}{2} m_2 g l_2 \cos(q_1 + q_2) \\ & - P_x l_2 \sin(q_1 + q_2) + P_y l_2 \cos(q_1 + q_2) \end{aligned} \quad (15)$$

Thí dụ 5.6. Cho mô hình con lắc vật lý kép như hình 5.14. Cho biết khối lượng của các vật rắn là m_1, m_2 , mômen quán tính của chúng đối với các trục vuông góc hình vẽ và đi qua khối tâm tương ứng là I_1, I_2 . Gia tốc trọng trường là g . Cho biết các khoảng cách $OC_1 = a_1, AC_2 = a_2, OA = l$. Thiết lập phương trình vi phân chuyển động của hệ bằng phương pháp các phương trình Lagrange loại hai.



Hình 5.14

Lời giải. Chọn tọa độ suy rộng

$$\mathbf{q} = [\varphi_1, \varphi_2]^T \quad (1)$$

Từ hình 5.14 ta có thể xác định các vị trí khối tâm các khâu. Véc tơ tọa độ khối tâm của khâu 1

$$\mathbf{r}_1 = \begin{bmatrix} a_1 \sin(\varphi_1 + \alpha) \\ -a_1 \cos(\varphi_1 + \alpha) \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2)$$

Véc tơ tọa độ khối tâm của khâu 2

$$\mathbf{r}_2 = \begin{bmatrix} l \sin \varphi_1 + a_2 \sin \varphi_2 \\ -l \cos \varphi_1 - a_2 \cos \varphi_2 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3)$$

Từ (2) và (3) ta tính được các ma trận Jacobi tịnh tiến

$$\mathbf{J}_{T1} = \frac{\partial \mathbf{r}_1}{\partial \mathbf{q}} = \begin{bmatrix} a_1 \cos(\varphi_1 + \alpha) & 0 \\ a_1 \sin(\varphi_1 + \alpha) & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (4)$$

$$\mathbf{J}_{T2} = \frac{\partial \mathbf{r}_2}{\partial \mathbf{q}} = \begin{bmatrix} l \cos \varphi_1 & a_2 \cos \varphi_2 \\ l \sin \varphi_1 & a_2 \sin \varphi_2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (5)$$

Các véc tơ vận tốc góc

$$\boldsymbol{\omega}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\varphi}_1 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{\omega}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\varphi}_2 \end{bmatrix} \quad (6)$$

Các ma trận Jacobi quay

$$\mathbf{J}_{R1} = \frac{\partial \boldsymbol{\omega}_1}{\partial \dot{\mathbf{q}}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{J}_{R2} = \frac{\partial \boldsymbol{\omega}_2}{\partial \dot{\mathbf{q}}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (7)$$

Các ma trận mômen quán tính khối có dạng

$$\mathbf{I}_{C1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I_1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{I}_{C2} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I_2 \end{bmatrix} \quad (8)$$

Ma trận khối lượng

$$\mathbf{M} = \mathbf{J}_{T1}^T m_1 \mathbf{J}_{T1} + \mathbf{J}_{T2}^T m_2 \mathbf{J}_{T2} + \mathbf{J}_{R1}^T \mathbf{I}_{C1} \mathbf{J}_{R1} + \mathbf{J}_{R2}^T \mathbf{I}_{C2} \mathbf{J}_{R2} \quad (9)$$

Thay (4), (5), (7), (8) vào (9) ta thu được ma trận khối lượng

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} m_1 a_1^2 + m_2 l^2 + I_1 & m_2 a_2 l \cos(\varphi_1 - \varphi_2) \\ m_2 a_2 l \cos(\varphi_1 - \varphi_2) & m_2 a_2^2 + I_2 \end{bmatrix} \quad (10)$$

Động năng

$$T = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{M} \dot{\mathbf{q}} \quad (11)$$

Thay (1) và (10) vào (11) ta có

$$T = \frac{1}{2} \left(\dot{\varphi}_1^2 m_1 a_1^2 + \dot{\varphi}_1^2 m_2 l^2 + \dot{\varphi}_1^2 I_1 + 2\dot{\varphi}_1 \dot{\varphi}_2 m_2 a_2 l \cos(\varphi_1 - \varphi_2) + \dot{\varphi}_2^2 m_2 a_2^2 + \dot{\varphi}_2^2 I_2 \right) \quad (12)$$

Thế năng

$$\Pi = -m_1 g a_1 \cos(\varphi_1 + \alpha) - m_2 g (l \cos \varphi_1 + a_2 \cos \varphi_2) \quad (13)$$

Tính các đạo hàm

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}_1} \right) &= (m_1 a_1^2 + m_2 l^2 + I_1) \ddot{\varphi}_1 + m_2 l a_2 \cos(\varphi_1 - \varphi_2) \ddot{\varphi}_2 \\ &\quad - m_2 l a_2 \sin(\varphi_1 - \varphi_2) \dot{\varphi}_1 \dot{\varphi}_2 + m_2 l a_2 \sin(\varphi_1 - \varphi_2) \dot{\varphi}_2^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}_2} \right) &= m_2 l a_2 \cos(\varphi_1 - \varphi_2) \ddot{\varphi}_1 + (m_2 a_2^2 + I_2) \ddot{\varphi}_2 \\ &\quad - m_2 l a_2 \sin(\varphi_1 - \varphi_2) \dot{\varphi}_1^2 + m_2 l a_2 \sin(\varphi_1 - \varphi_2) \dot{\varphi}_1 \dot{\varphi}_2 \end{aligned}$$

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}_1} = -m_2 l a_2 \sin(\varphi_1 - \varphi_2) \dot{\varphi}_1 \dot{\varphi}_2$$

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}_2} = m_2 l a_2 \sin(\varphi_1 - \varphi_2) \dot{\varphi}_1 \dot{\varphi}_2$$

$$\frac{\partial \Pi}{\partial \varphi_1} = m_1 g a_1 \cos(\varphi_1 + \alpha) + m_2 g l \sin \varphi_1$$

$$\frac{\partial \Pi}{\partial \varphi_2} = m_2 g a_2 \cos \varphi_2$$

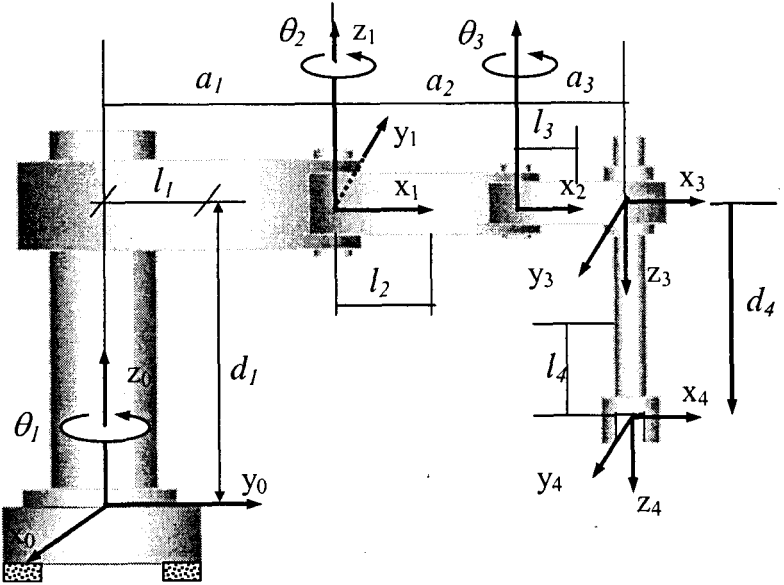
Thế các biểu thức trên vào phương trình Lagrange loại 2

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \right) - \frac{\partial T}{\partial \mathbf{q}} = - \frac{\partial \Pi}{\partial \mathbf{q}}$$

ta thu được hệ phương trình vi phân dao động của cơ hệ như sau

$$\begin{cases} (m_1 a_1^2 + m_2 l^2 + I_1) \ddot{\varphi}_1 + m_2 l a_2 \cos(\varphi_1 - \varphi_2) \ddot{\varphi}_2 + m_2 l a_2 \sin(\varphi_1 - \varphi_2) \dot{\varphi}_2^2 \\ \quad + m_1 g a_1 \sin(\varphi_1 + \alpha) + m_2 g l \sin \varphi_1 = 0 \\ m_2 l a_2 \cos(\varphi_1 - \varphi_2) \ddot{\varphi}_1 + (m_2 a_2^2 + I_2) \ddot{\varphi}_2 - m_2 l a_2 \sin(\varphi_1 - \varphi_2) \dot{\varphi}_1^2 \\ \quad + m_2 g a_2 \sin \varphi_2 = 0 \end{cases} \quad (14)$$

Thí dụ 5.7. Cho mô hình rôbốt SCARA 4 bậc tự do như hình vẽ 5.15. Trong đó các khớp 1, 2, 3 là các khớp quay, khớp 4 là khớp tịnh tiến. Khối lượng các khâu là m_1, m_2, m_3, m_4 . Các mômen quán tính chính của các khâu trong hệ qui chiếu gắn liền vào các khâu là I_{ix}, I_{iy}, I_{iz} ($i=1,2,3,4$). Các kích thước cho trên hình 5.15. Hãy thiết lập phương trình vi phân chuyển động của rôbốt.



Hình 5.15. Mô hình rôbốt SCARA 4 bậc tự do

Lời giải. Chọn tọa suy rộng (tọa độ tương đối) là :

$$\mathbf{q} = [\theta_1, \theta_2, \theta_3, d_4]^T = [q_1, q_2, q_3, q_4]^T.$$

Từ hình vẽ ta xác định:

- Bảng tham số Denavit-Hatenberg

Link	θ	d	a	α
1	q_1	d_1	a_1	0
2	q_2	0	a_2	0
3	q_3	0	a_3	π
4	0	q_4	0	0

- Bảng mô tả vị trí trọng tâm khối lượng và mô men quán tính khối của từng khâu

Khâu	Vị trí trọng tâm (so với gốc tọa độ gắn trên mỗi khớp)			Khối lượng	Mô men quán tính khối từng khâu (tính đối với hệ tọa độ đặt tại trọng tâm từng khâu và song song với tọa độ khớp)					
	x_C	y_C	z_C		I_{xx}	I_{yy}	I_{zz}	I_{xy}	I_{xz}	I_{yz}
1	$-(a_1-l_1)$	0	0	m_1	I_{1x}	I_{1y}	I_{1z}	0	0	0
2	$-(a_2-l_2)$	0	0	m_2	I_{2x}	I_{2y}	I_{2z}	0	0	0
3	$-(a_3-l_3)$	0	0	m_3	I_{3x}	I_{3y}	I_{3z}	0	0	0
4	0	0	$-l_4$	m_4	I_{4x}	I_{4y}	I_{4z}	0	0	0

Sử dụng hệ chương trình ROBOTDYN của Bộ môn Cơ học ứng dụng, Trường đại học Bách khoa Hà Nội, ta xác định được các ma trận Denavit-Hartenberg như sau

$$D_1 = \begin{bmatrix} C_1 & -S_1 & 0 & a_1 C_1 \\ S_1 & C_1 & 0 & a_1 S_1 \\ 0 & 0 & 1 & d_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (1)$$

$$D_2 = \begin{bmatrix} C_{12} & -S_{12} & 0 & a_1 C_1 + a_2 C_{12} \\ S_{12} & C_{12} & 0 & a_1 S_1 + a_2 S_{12} \\ 0 & 0 & 1 & d_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2)$$

$$D_3 = \begin{bmatrix} C_{123} & -S_{123} & 0 & a_1 C_1 + a_2 C_{12} + a_3 C_{123} \\ S_{123} & C_{123} & 0 & a_1 S_1 + a_2 S_{12} + a_3 S_{123} \\ 0 & 0 & -1 & d_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3)$$

$$D_4 = \begin{bmatrix} C_{123} & -S_{123} & 0 & a_1 C_1 + a_2 C_{12} + a_3 C_{123} \\ S_{123} & C_{123} & 0 & a_1 S_1 + a_2 S_{12} + a_3 S_{123} \\ 0 & 0 & -1 & d_1 - q_4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4)$$

Chú ý rằng trong thí dụ này và thí dụ sau, cần quan tâm đến các hệ qui chiếu động qui định như sau:

- Hệ qui chiếu khớp $O_i x_i y_i z_i$ là hệ qui chiếu động gốc tại O_i , xác định theo qui tắc Denavit-Hartenberg
- Hệ qui chiếu khâu $C_i x'_i y'_i z'_i$ là hệ qui chiếu động gắn và vật rắn B_i , gốc tại C_i có các trục song song với các trục của hệ qui chiếu $O_i x_i y_i z_i$

Từ đó dễ dàng xác định được các vị trí các khối tâm. Vị trí khối tâm khâu thứ nhất

$$\mathbf{r}_{C_1} = {}^{R_0} \mathbf{r}_{C_1} = \begin{bmatrix} a_1 C_1 \\ a_1 S_1 \\ d_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} C_1 & -S_1 & 0 \\ S_1 & C_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -(a_1 - l_1) \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_1 C_1 \\ l_1 S_1 \\ d_1 \end{bmatrix} \quad (5)$$

Đạo hàm biểu thức (5) theo thời gian ở trong hệ qui chiếu cố định ta được vận tốc khối tâm của khâu thứ nhất

$$\mathbf{v}_{C_1} = \dot{\mathbf{r}}_{C_1} = \begin{bmatrix} -l_1 \dot{\theta}_1 \sin \theta_1 \\ l_1 \dot{\theta}_1 \cos \theta_1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (6)$$

Vị trí khối tâm khâu thứ hai

$$\mathbf{r}_{C_2} = \begin{bmatrix} a_1 C_1 + a_2 C_{12} \\ a_1 S_1 + a_2 S_{12} \\ d_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} C_{12} & -S_{12} & 0 \\ S_{12} & C_{12} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -(a_2 - l_2) \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 C_1 + l_2 C_{12} \\ a_1 S_1 + l_2 S_{12} \\ d_1 \end{bmatrix} \quad (7)$$

Vận tốc khối tâm khâu thứ hai

$$\mathbf{v}_{C_2} = \dot{\mathbf{r}}_{C_2} = \begin{bmatrix} -a_1 \dot{\theta}_1 S_1 - l_2 \dot{\theta}_{12} S_{12} \\ a_1 \dot{\theta}_1 C_1 + l_2 \dot{\theta}_{12} C_{12} \\ 0 \end{bmatrix} \quad (8)$$

Vị trí khối tâm khâu thứ ba

$$\mathbf{r}_{C_3} = \begin{bmatrix} a_1 C_1 + a_2 C_{12} + a_3 C_{123} \\ a_1 S_1 + a_2 S_{12} + a_3 S_{123} \\ d_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} C_{123} & -S_{123} & 0 \\ S_{123} & C_{123} & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -(a_3 - l_3) \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 C_1 + a_2 C_{12} + l_3 C_{123} \\ a_1 S_1 + a_2 S_{12} + l_3 S_{123} \\ d_1 \end{bmatrix} \quad (9)$$

Vận tốc khối tâm của khâu thứ ba

$$\mathbf{v}_{C_3} = \dot{\mathbf{r}}_{C_3} = \begin{bmatrix} -a_1 \dot{\theta}_1 S_1 - l_2 \dot{\theta}_{12} S_{12} - l_3 \dot{\theta}_{123} S_{123} \\ a_1 \dot{\theta}_1 C_1 + l_2 \dot{\theta}_{12} C_{12} + l_3 \dot{\theta}_{123} S_{123} \\ 0 \end{bmatrix} \quad (10)$$

Vị trí khối tâm khâu thứ tư

$$\mathbf{r}_{C_4} = \begin{bmatrix} a_1 C_1 + a_2 C_{12} + a_3 C_{123} \\ a_1 S_1 + a_2 S_{12} + a_3 S_{123} \\ d_1 - q_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} C_{123} & -S_{123} & 0 \\ S_{123} & C_{123} & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -l_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 C_1 + a_2 C_{12} + a_3 C_{123} \\ a_1 S_1 + a_2 S_{12} + a_3 S_{123} \\ d_1 - q_4 + l_4 \end{bmatrix} \quad (11)$$

Vận tốc khối tâm của khâu thứ tư

$$\mathbf{v}_{C_4} = \dot{\mathbf{r}}_{C_4} = \begin{bmatrix} -a_1\dot{\theta}_1 S_1 - a_2\dot{\theta}_{12} S_{12} - a_3\dot{\theta}_{123} S_{123} \\ a_1\dot{\theta}_1 C_1 + a_2\dot{\theta}_{12} C_{12} + a_3\dot{\theta}_{123} C_{123} \\ 0 \end{bmatrix} \quad (12)$$

Cũng từ các ma trận Denavit-Hartenberg ta xác định được các ma trận côsin chỉ hướng của các khâu. Ma trận côsin chỉ hướng của khâu thứ nhất

$$\mathbf{A}_1 = \begin{bmatrix} C_1 & -S_1 & 0 \\ S_1 & C_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (13)$$

Ma trận côsin chỉ hướng của khâu thứ hai

$$\mathbf{A}_2 = \begin{bmatrix} C_{12} & -S_{12} & 0 \\ S_{12} & C_{12} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (14)$$

Ma trận côsin chỉ hướng của khâu thứ ba và khâu thứ tư

$$\mathbf{A}_3 = \begin{bmatrix} C_{123} & -S_{123} & 0 \\ S_{123} & C_{123} & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} = \mathbf{A}_4 \quad (15)$$

Toán tử sóng của vectơ vận tốc góc của khâu thứ nhất

$$\begin{aligned} \tilde{\boldsymbol{\omega}}_1^{(1)} &= \mathbf{A}_1^T \dot{\mathbf{A}}_1 \\ &= \begin{bmatrix} C_1 & S_1 & 0 \\ -S_1 & C_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\dot{\theta}_1 S_1 & -\dot{\theta}_1 C_1 & 0 \\ \dot{\theta}_1 C_1 & -\dot{\theta}_1 S_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -\dot{\theta}_1 & 0 \\ \dot{\theta}_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (16)$$

Từ đó suy ra vận tốc góc khâu thứ nhất trong hệ tọa độ khâu thứ nhất là

$$\boldsymbol{\omega}_1^{(1)} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dot{\theta}_1 \end{bmatrix}^T \quad (17)$$

Toán tử sóng của vectơ vận tốc góc của khâu thứ hai

$$\begin{aligned} \tilde{\boldsymbol{\omega}}_2^{(2)} &= \mathbf{A}_2^T \dot{\mathbf{A}}_2 \\ &= \begin{bmatrix} C_{12} & S_{12} & 0 \\ -S_{12} & C_{12} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -(\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2) S_{12} & -(\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2) C_{12} & 0 \\ (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2) C_{12} & -(\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2) S_{12} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -(\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2) & 0 \\ (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (18)$$

Từ đó suy ra vận tốc góc khâu thứ hai

$$\boldsymbol{\omega}_2^{(2)} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2 \end{bmatrix}^T \quad (19)$$

Toán tử sóng của véctơ vận tốc góc của khâu thứ ba

$$\begin{aligned} \tilde{\boldsymbol{\omega}}_3^{(3)} &= \tilde{\boldsymbol{\omega}}_4^{(4)} = \mathbf{A}_3^T \dot{\mathbf{A}}_3 \\ &= \begin{bmatrix} C_{123} & S_{123} & 0 \\ -S_{123} & C_{123} & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -(\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2 + \dot{\theta}_3)S_{123} & -(\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2 + \dot{\theta}_3)C_{12} & 0 \\ (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2 + \dot{\theta}_3)C_{123} & -(\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2 + \dot{\theta}_3)S_{123} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0 & -(\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2 + \dot{\theta}_3) & 0 \\ (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2 + \dot{\theta}_3) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (20)$$

Từ đó suy ra vận tốc góc khâu thứ ba và khâu thứ bốn

$$\boldsymbol{\omega}_3^{(3)} = \boldsymbol{\omega}_4^{(4)} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2 + \dot{\theta}_3 \end{bmatrix}^T \quad (21)$$

Các ma trận mômen quán tính của các khâu, tính đối với hệ toạ độ địa phương đặt tại trọng tâm của từng khâu và có các trục song song với hệ trục toạ độ khớp $O_i x_i y_i z_i$, có dạng như sau

$$\begin{aligned} \mathbf{I}_1^{(1)} &= \begin{bmatrix} I_{1x} & 0 & 0 \\ 0 & I_{1y} & 0 \\ 0 & 0 & I_{1z} \end{bmatrix}, & \mathbf{I}_2^{(2)} &= \begin{bmatrix} I_{2x} & 0 & 0 \\ 0 & I_{2y} & 0 \\ 0 & 0 & I_{2z} \end{bmatrix}, \\ \mathbf{I}_3^{(3)} &= \begin{bmatrix} I_{3x} & 0 & 0 \\ 0 & I_{3y} & 0 \\ 0 & 0 & I_{3z} \end{bmatrix}, & \mathbf{I}_4^{(4)} &= \begin{bmatrix} I_{4x} & 0 & 0 \\ 0 & I_{4y} & 0 \\ 0 & 0 & I_{4z} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Động năng của khâu thứ i

$$T_i = \frac{1}{2} m_i \mathbf{v}_{C_i}^T \mathbf{v}_{C_i} + \frac{1}{2} \boldsymbol{\omega}_i^{(i)T} \mathbf{I}_i^{(i)} \boldsymbol{\omega}_i^{(i)} \quad (i=1...4) \quad (22)$$

Biểu thức động năng của cả hệ

$$T = T_1 + T_2 + T_3 + T_4 \quad (23)$$

Biểu thức thế năng của hệ có dạng

$$\Pi = \begin{bmatrix} 0 & 0 & g \end{bmatrix} \{ m_1 \mathbf{r}_{C_1} + m_2 \mathbf{r}_{C_2} + m_3 \mathbf{r}_{C_3} + m_4 \mathbf{r}_{C_4} \} \quad (24)$$

Sử dụng chương trình ROBOTDYN ta thiết lập được các phương trình vi phân chuyển động của rôbốt SCARA bốn bậc tự do

$$\begin{aligned}
& m_{11}\ddot{q}_1 + m_{12}\ddot{q}_2 + m_{13}\ddot{q}_3 + m_{14}\ddot{q}_4 - a_1(\dot{q}_2 + \dot{q}_3)(\dot{q}_2 + 2\dot{q}_1 + \dot{q}_3)(m_3l_3 + m_4a_3)\sin(q_2 + q_3) \\
& - a_1\sin q_2(a_2m_3 + a_2m_4 + m_2l_2)\dot{q}_2^2 - (m_3l_3 + m_4a_3)\sin q_3(2\dot{q}_1 + \dot{q}_3)a_2\dot{q}_3 \\
& - 2(a_2\sin q_3(m_3l_3 + m_4a_3)\dot{q}_3 + \dot{q}_1a_1\sin q_2(a_2m_3 + a_2m_4 + m_2l_2))\dot{q}_2 = \tau_1 \quad (25)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& m_{21}\ddot{q}_1 + m_{22}\ddot{q}_2 + m_{23}\ddot{q}_3 + m_{24}\ddot{q}_4 + a_1\dot{q}_1^2(m_3l_3 + m_4a_3)\sin(q_2 + q_3) + \\
& ((m_4 + m_3)a_2 + m_2l_2)a_1\dot{q}_1^2\sin q_2 - 2\sin q_3a_2\dot{q}_3(m_3l_3 + m_4a_3)\dot{q}_1 - \\
& (m_3l_3 + m_4a_3)\sin q_3(\dot{q}_3 + 2\dot{q}_2)a_2\dot{q}_3 = \tau_2 \quad (26)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& m_{31}\ddot{q}_1 + m_{32}\ddot{q}_2 + m_{33}\ddot{q}_3 + m_{34}\ddot{q}_4 + a_1\dot{q}_1^2(m_3l_3 + m_4a_3)\sin(q_2 + q_3) + \\
& a_2\sin q_3(\dot{q}_2 + \dot{q}_1)^2(m_3l_3 + m_4a_3) = \tau_3 \quad (27)
\end{aligned}$$

$$m_{41}\ddot{q}_1 + m_{42}\ddot{q}_2 + m_{43}\ddot{q}_3 + m_{44}\ddot{q}_4 - m_4g = \tau_4 \quad (28)$$

Trong đó các thành phần của ma trận khối lượng có dạng như sau

$$\begin{aligned}
m_{11} = & I_{1z} + I_{2z} + I_{3z} + I_{4z} + m_1l_1^2 + m_2a_1^2 + 2m_2a_1l_2\cos q_2 + m_2l_2^2 + m_3a_2^2 + 2m_3a_2a_1\cos q_2 \\
& + 2m_3a_2l_3\cos q_3 + m_3a_1^2 + 2m_3a_1l_3\cos(q_2 + q_3) + m_3l_3^2 + m_4a_3^2 + 2m_4a_3a_2\cos q_3 \\
& + 2m_4a_3a_1\cos(q_2 + q_3) + m_4a_2^2 + 2m_4a_2a_1\cos q_2 + m_4a_1^2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
m_{12} = m_{21} = & I_{2z} + I_{3z} + I_{4z} + m_2a_1l_2\cos q_2 + m_2l_2^2 \\
& + m_3a_2^2 + m_3a_2a_1\cos q_2 + 2m_3a_2l_3\cos q_3 + m_3l_3a_1\cos(q_2 + q_3) + m_3l_3^2 \\
& + m_4a_3^2 + 2m_4a_3a_2\cos q_3 + m_4a_3a_1\cos(q_2 + q_3) + m_4a_2^2 + m_4a_2a_1\cos q_2
\end{aligned}$$

$$m_{14} = m_{41} = 0; \quad m_{24} = m_{42} = 0; \quad m_{34} = m_{43} = 0$$

$$m_{22} = I_{2z} + I_{3z} + I_{4z} + m_2l_2^2 + m_3a_2^2 + 2m_3a_2l_3\cos q_3 + m_3l_3^2 + m_4a_3^2 + 2m_4a_3a_2\cos q_3 + m_4a_2^2$$

$$m_{23} = m_{32} = I_{3z} + I_{4z} + m_3l_3a_2\cos q_3 + m_3l_3^2 + m_4a_3^2 + m_4a_3a_2\cos q_3$$

$$m_{33} = I_{3z} + m_3l_3^2 + I_{4z} + m_4a_3^2; \quad m_{44} = m_4$$

Thí dụ 5.8. Cho mô hình rôbốt PUMA 3 bậc tự do như hình vẽ 5.16. Trong đó các khớp 1, 2, 3 là các khớp quay. Khối lượng các khâu là m_1, m_2, m_3 . Các mômen quán tính chính của các khâu trong hệ qui chiếu gắn liền vào các khâu là I_{ix}, I_{iy}, I_{iz} ($i=1,2,3$). Các kích thước hình học cho trên hình vẽ. Hãy thiết lập phương trình vi phân chuyển động của rôbốt.

Lời giải. Chọn tọa suy rộng (trùng với tọa độ khớp) là

$$\mathbf{q} = [\theta_1, \theta_2, \theta_3]^T = [q_1, q_2, q_3]^T.$$

Từ hình vẽ ta xác định:

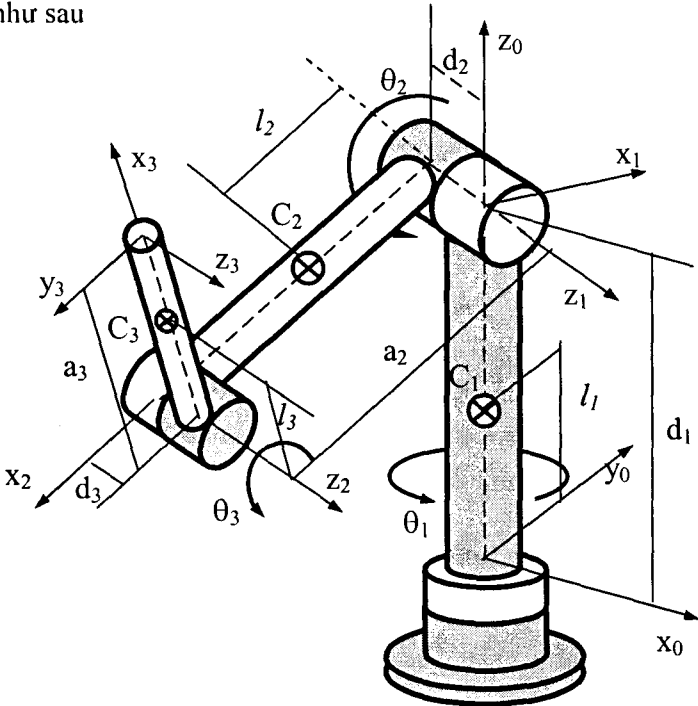
- Bảng tham số Denavit-Hartenberg

STT	θ	d	a	α	Biến khớp	Loại khớp
1	θ_1	d_1	0	$\pi/2$	θ_1	quay
2	θ_2	0	a_2	0	θ_2	quay
3	θ_3	0	a_3	0	θ_3	quay

- Bảng mô tả vị trí trọng tâm khối lượng và mô men quán tính khối của từng khâu

STT	Vị trí trọng tâm (so với gốc tọa độ gắn trên mỗi khớp)			Khối lượng	Mô men quán tính khối từng khâu (tính đối với hệ tọa độ đặt tại trọng tâm từng khâu và song song với tọa độ khớp)					
	x_{Ci}	y_{Ci}	z_{Ci}		I_{xx}	I_{yy}	I_{zz}	I_{xy}	I_{xz}	I_{yz}
1	0	$-(d_1-l_1)$	0	m_1	I_{1x}	I_{1y}	I_{1z}	0	0	0
2	$-(a_2-l_2)$	0	0	m_2	I_{2x}	I_{2y}	I_{2z}	0	0	0
3	$-(a_3-l_3)$	0	0	m_3	I_{3x}	I_{3y}	I_{3z}	0	0	0

Sử dụng hệ chương trình ROBOTDYN ta xác định được các ma trận Denavit-Hartenberg như sau



Hình 5.16. Mô hình rôbot PUMA 3 bậc tự do

$$\mathbf{D}_1 = \begin{bmatrix} C_1 & 0 & S_1 & 0 \\ S_1 & 0 & -C_1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & d_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (1)$$

$$\mathbf{D}_2 = \begin{bmatrix} C_1 C_2 & -C_1 S_2 & S_1 & d_1 C_1 + a_2 C_1 C_2 \\ S_1 C_2 & -S_1 S_2 & -C_1 & d_1 S_1 + a_2 S_1 C_2 \\ S_2 & C_2 & 0 & a_2 S_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2)$$

$$\mathbf{D}_3 = \begin{bmatrix} C_1 C_{23} & -C_1 S_{23} & S_1 & d_1 C_1 + a_2 C_1 C_2 + a_3 C_1 C_{23} \\ S_1 C_{23} & -S_1 S_{23} & -C_1 & d_1 S_1 + a_2 S_1 C_2 + a_3 S_1 C_{23} \\ S_{23} & C_{23} & 0 & a_2 S_2 + a_3 S_{23} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3)$$

Từ đó dễ dàng xác định được vị trí khối tâm khâu thứ nhất

$$\mathbf{r}_{C_1} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ d_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} C_1 & 0 & S_1 \\ S_1 & 0 & -C_1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ -(d_1 - l_1) \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ l_1 \end{bmatrix} \quad (4)$$

Đạo hàm biểu thức (5) theo thời gian ở trong hệ qui chiếu cố định ta được vận tốc khối tâm của khâu thứ nhất

$$\mathbf{v}_{C_1} = \dot{\mathbf{r}}_{C_1} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (5)$$

Vị trí khối tâm khâu thứ hai

$$\mathbf{r}_{C_2} = \begin{bmatrix} d_1 C_1 + a_2 C_1 C_2 \\ d_1 S_1 + a_2 S_1 C_2 \\ a_2 S_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} C_1 C_2 & -C_1 S_2 & S_1 \\ S_1 C_2 & -S_1 S_2 & -C_1 \\ S_2 & C_2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -(a_2 - l_2) \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_1 C_1 + l_2 C_1 C_2 \\ d_1 S_1 + l_2 S_1 C_2 \\ l_2 S_2 \end{bmatrix} \quad (6)$$

Vận tốc khối tâm khâu thứ hai

$$\mathbf{v}_{C_2} = \dot{\mathbf{r}}_{C_2} = \begin{bmatrix} -d_1 \dot{\theta}_1 S_1 - l_2 \dot{\theta}_1 S_1 C_2 - l_2 \dot{\theta}_2 C_1 S_2 \\ d_1 \dot{\theta}_1 C_1 + l_2 \dot{\theta}_1 C_1 C_2 - l_2 \dot{\theta}_2 S_1 S_2 \\ l_2 \dot{\theta}_2 C_2 \end{bmatrix} \quad (7)$$

Vị trí khối tâm khâu thứ ba

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_{C_3} &= \begin{bmatrix} d_1 C_1 + a_2 C_1 C_2 + a_3 C_1 C_{23} \\ d_1 S_1 + a_2 S_1 C_2 + a_3 S_1 C_{23} \\ a_2 S_2 + a_3 S_{23} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} C_1 C_{23} & -C_1 S_{23} & S_1 \\ S_1 C_{23} & -S_1 S_{23} & -C_1 \\ S_{23} & C_{23} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -(a_3 - l_3) \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} d_1 C_1 + a_2 C_1 C_2 + l_3 C_1 C_{23} \\ d_1 S_1 + a_2 S_1 C_2 + l_3 S_1 C_{23} \\ a_2 S_2 + l_3 S_{23} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (8)$$

Vận tốc khối tâm khâu thứ ba

$$\mathbf{v}_{C_3} = \dot{\mathbf{r}}_{C_3} = \begin{bmatrix} -d_1 \dot{\theta}_1 S_1 - a_2 \dot{\theta}_1 S_1 C_2 - a_2 \dot{\theta}_2 C_1 S_2 - l_3 \dot{\theta}_1 S_1 C_{23} - l_3 \dot{\theta}_{23} C_1 S_{23} \\ d_1 \dot{\theta}_1 C_1 + a_2 \dot{\theta}_1 C_1 C_2 - a_2 \dot{\theta}_2 S_1 S_2 + l_3 \dot{\theta}_1 C_1 C_{23} - l_3 \dot{\theta}_{23} S_1 S_{23} \\ a_2 \dot{\theta}_2 C_2 + l_3 \dot{\theta}_{23} C_{23} \end{bmatrix} \quad (9)$$

Cũng từ các ma trận Denavit-Hartenberg ta xác định được các ma trận côsin chỉ hướng của các khâu. Ma trận côsin chỉ hướng của khâu thứ nhất

$$\mathbf{A}_1 = \begin{bmatrix} C_1 & 0 & S_1 \\ S_1 & 0 & -C_1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (10)$$

Ma trận côsin chỉ hướng của khâu thứ hai

$$\mathbf{A}_2 = \begin{bmatrix} C_1 C_2 & -C_1 S_2 & S_1 \\ S_1 C_2 & -S_1 S_2 & -C_1 \\ S_2 & C_2 & 0 \end{bmatrix} \quad (11)$$

Ma trận côsin chỉ hướng của khâu thứ ba

$$\mathbf{A}_3 = \begin{bmatrix} C_1 C_{23} & -C_1 S_{23} & S_1 \\ S_1 C_{23} & -S_1 S_{23} & -C_1 \\ S_{23} & C_{23} & 0 \end{bmatrix} \quad (12)$$

Toán tử sóng của véctơ vận tốc góc của khâu thứ nhất

$$\begin{aligned} \tilde{\omega}_1^{(1)} &= \mathbf{A}_1^T \dot{\mathbf{A}}_1 \\ &= \begin{bmatrix} C_1 & S_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ S_1 & -C_1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -\dot{\theta}_1 S_1 & 0 & \dot{\theta}_1 C_1 \\ \dot{\theta}_1 C_1 & 0 & \dot{\theta}_1 S_1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (13)$$

hay

$$\tilde{\omega}_1^{(1)} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dot{\theta}_1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -\dot{\theta}_1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -\omega_{01z} & \omega_{01y} \\ \omega_{01z} & 0 & -\omega_{01x} \\ -\omega_{01y} & \omega_{01x} & 0 \end{bmatrix}$$

Suy ra vận tốc góc khâu thứ nhất

$$\omega_1^{(1)} = [0 \quad \dot{\theta}_1 \quad 0]^T$$

Toán tử sóng của véctơ vận tốc góc của khâu thứ hai

$$\begin{aligned} \tilde{\omega}_2^{(2)} &= \mathbf{A}_2^T \dot{\mathbf{A}}_2 \\ &= \begin{bmatrix} C_1 C_2 & S_1 C_2 & S_2 \\ -C_1 S_2 & -S_1 S_2 & C_2 \\ S_1 & -C_1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -\dot{\theta}_1 S_1 C_2 - \dot{\theta}_2 C_1 S_2 & \dot{\theta}_1 S_1 S_2 - \dot{\theta}_2 C_1 C_2 & -\dot{\theta}_1 C_1 \\ \dot{\theta}_1 C_1 C_2 - \dot{\theta}_2 S_1 S_2 & -\dot{\theta}_1 C_1 S_2 - \dot{\theta}_2 S_1 C_2 & \dot{\theta}_1 S_1 \\ \dot{\theta}_2 C_2 & -\dot{\theta}_2 S_2 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

hay

$$\tilde{\omega}_2^{(2)} = \begin{bmatrix} 0 & -\dot{\theta}_2 & \dot{\theta}_1 C_2 \\ \dot{\theta}_2 & 0 & -\dot{\theta}_1 S_2 \\ -\dot{\theta}_1 C_2 & \dot{\theta}_1 S_2 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -\omega_{02z} & \omega_{02y} \\ \omega_{02z} & 0 & -\omega_{02x} \\ -\omega_{02y} & \omega_{02x} & 0 \end{bmatrix}$$

Suy ra vận tốc góc khâu thứ hai

$$\omega_2^{(2)} = [\dot{\theta}_1 S_2 \quad \dot{\theta}_1 C_2 \quad \dot{\theta}_2]^T$$

Toán tử sóng của véctơ vận tốc góc của khâu thứ ba

$$\begin{aligned} \tilde{\omega}_3^{(3)} &= \mathbf{A}_3^T \dot{\mathbf{A}}_3 \\ &= \begin{bmatrix} C_1 C_{23} & S_1 C_{23} & S_{23} \\ -C_1 S_{23} & -S_1 S_{23} & C_{23} \\ S_1 & -C_1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -\dot{\theta}_1 S_1 C_{23} - \dot{\theta}_{23} C_1 S_{23} & \dot{\theta}_1 S_1 S_{23} - \dot{\theta}_{23} C_1 C_{23} & \dot{\theta}_1 C_1 \\ \dot{\theta}_1 C_1 C_{23} - \dot{\theta}_{23} S_1 S_{23} & -\dot{\theta}_1 C_1 S_{23} - \dot{\theta}_{23} S_1 C_{23} & \dot{\theta}_1 S_1 \\ \dot{\theta}_{23} C_{23} & -\dot{\theta}_{23} S_{23} & 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

hay

$$\tilde{\omega}_3^{(3)} = \begin{bmatrix} 0 & -\dot{\theta}_{23} & \dot{\theta}_1 C_{23} \\ \dot{\theta}_{23} & 0 & -\dot{\theta}_1 S_{23} \\ -\dot{\theta}_1 C_{23} & \dot{\theta}_1 S_{23} & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -\omega_{03z} & \omega_{03y} \\ \omega_{03z} & 0 & -\omega_{03x} \\ -\omega_{03y} & \omega_{03x} & 0 \end{bmatrix}$$

Suy ra vận tốc góc khâu thứ ba

$$\omega_3^{(3)} = [\dot{\theta}_1 S_{23} \quad \dot{\theta}_1 C_{23} \quad \dot{\theta}_{23}]^T$$

Động năng của khâu thứ i

$$T_i = \frac{1}{2} m_i \mathbf{v}_{C_i}^T \mathbf{v}_{C_i} + \frac{1}{2} \omega_i^{(i)T} \mathbf{I}_i^{(i)} \omega_i^{(i)}, \quad (i=1 \dots 3)$$

Biểu thức động năng của cả hệ

$$T = T_1 + T_2 + T_3$$

Biểu thức hàm thế năng của hệ

Thế năng của hệ

$$\Pi = [0 \quad 0 \quad g]^T \{m_1 \mathbf{r}_{C_1} + m_2 \mathbf{r}_{C_2} + m_3 \mathbf{r}_{C_3}\}$$

Sử dụng chương trình ROBOTDYN ta thiết lập được phương trình vi phân chuyển động của rôbốt như sau:

Phương trình 1

$$\begin{aligned} m_{11} \ddot{q}_1 + m_{12} \ddot{q}_2 + m_{13} \ddot{q}_3 + (I_{2x} - I_{2y} - m_2 l_2^2 - m_3 a_2^2) \dot{q}_1 \dot{q}_2 \sin(2q_2) \\ + \dot{q}_1 \sin(2q_2 + 2q_3) (I_{3x} - I_{3y} - m_3 l_3^2) (\dot{q}_2 + \dot{q}_3) \\ - (2\dot{q}_2 + \dot{q}_3) m_3 \dot{q}_1 a_2 l_3 \sin(2q_2 + q_3) - m_3 \dot{q}_1 \dot{q}_3 l_3 a_2 \sin q_3 = \tau_1 \end{aligned}$$

Phương trình 2

$$\begin{aligned} m_{21} \ddot{q}_1 + m_{22} \ddot{q}_2 + m_{23} \ddot{q}_3 - (2\dot{q}_2 + \dot{q}_3) \dot{q}_3 l_3 a_2 \sin q_3 + \frac{1}{2} (I_{2y} - I_{2x} + m_2 l_2^2) \dot{q}_1^2 \sin(2q_2) \\ + \frac{1}{2} \dot{q}_1^2 (I_{3y} - I_{3x} + m_3 l_3^2) \sin(2q_2 + 2q_3) + 1/2 m_3 \dot{q}_1^2 a_2^2 \sin(2q_2) \\ + m_3 \dot{q}_1^2 a_2 l_3 \sin(2q_2 + q_3) + (m_2 l_2 + m_3 a_2) g \cos q_2 + m_3 g l_3 \cos(q_2 + q_3) = \tau_2 \end{aligned}$$

Phương trình 3

$$\begin{aligned} m_{31} \ddot{q}_1 + m_{32} \ddot{q}_2 + m_{33} \ddot{q}_3 + \frac{1}{2} \dot{q}_1^2 (I_{3y} - I_{3x} + m_3 l_3^2) \sin(2q_2 + 2q_3) \\ + m_3 l_3 a_2 \left(\dot{q}_2^2 + \frac{1}{2} \dot{q}_1^2 \right) \sin q_3 + \frac{1}{2} m_3 \dot{q}_1^2 a_2 l_3 \sin(2q_2 + q_3) + m_3 g l_3 \cos(q_2 + q_3) = \tau_3 \end{aligned}$$

Trong đó

$$\begin{aligned} m_{11} = I_{1y} + I_{2x} \sin^2 q_2 + I_{2y} \cos^2 q_2 + I_{3x} \sin^2(q_2 + q_3) + I_{3y} \cos^2(q_2 + q_3) \\ + (m_2 l_2^2 + m_3 a_2^2) \cos^2 q_2 + m_3 l_3 (a_2 \cos q_3 + a_2 \cos(2q_2 + q_3) + l_3 \cos(q_2 + q_3)^2) \end{aligned}$$

$$m_{12} = m_{21} = m_{13} = m_{31} = 0$$

$$m_{22} = I_{2z} + I_{3z} + m_2 l_2^2 + m_3 (l_3^2 + a_2^2 + 2a_2 l_3 \cos q_3)$$

$$m_{23} = m_{32} = I_{3z} + m_3 l_3^2 + m_3 a_2 l_3 \cos q_3$$

$$m_{33} = I_{3z} + m_3 l_3^2$$

§5 CÁC PHƯƠNG TRÌNH KANE CỦA HỆ NHIỀU VẬT

Các phương trình Kane tuy mới được thiết lập vào những năm 60 của thế kỷ 20, nhưng sớm có một vị trí trong nghiên cứu động lực học hệ nhiều vật. Trong đoạn này, trước hết giới thiệu các khái niệm vận tốc riêng của điểm và vận tốc góc riêng của vật rắn, sau đó trình bày biểu thức tính lực hoạt động suy rộng và lực quán tính suy rộng. Trên cơ sở các khái niệm đó thiết lập các phương trình động lực Kane cho hệ p vật rắn. Lúc đầu Thomas R. Kane, giáo sư Trường Đại học Stanford (Hoa Kỳ), gọi phương trình mà ông thiết lập là dạng Lagrange của nguyên lý d'Alembert. Sau này mọi người lấy tên ông đặt tên cho phương trình này.

5.1 Các vận tốc riêng của điểm và các vận tốc góc riêng của vật rắn

a. Các vận tốc riêng của điểm (Partial velocities of points)

Xét một hệ gồm p vật rắn tùy ý. Giả sử vị trí của hệ được xác định bởi m tọa độ suy rộng q_1, q_2, \dots, q_m . Nói chung m lớn hơn số bậc tự do của hệ. Giả sử P là một điểm bất kỳ thuộc vật rắn B của hệ (hình 5.17). Vị trí của điểm P được xác định bởi véc tơ định vị \vec{r}^P

$$\vec{r}^P = \vec{r}^P(t, q_1, q_2, \dots, q_m) \quad (5.1)$$

Đạo hàm theo thời gian véc tơ \vec{r}^P ở trong hệ quy chiếu R , ta được

$${}^R \vec{v}^P = \frac{{}^R d\vec{r}^P}{dt} = \frac{{}^R \partial \vec{r}^P}{\partial t} + \sum_{k=1}^m \frac{{}^R \partial \vec{r}^P}{\partial q_k} \dot{q}_k \quad (5.2)$$

Trong đoạn này để cho gọn ta ký hiệu ${}^R \vec{v}^P = \vec{v}^P$, ${}^R \vec{a}^P = \vec{a}^P$. Bây giờ ta đưa vào các ký hiệu mới

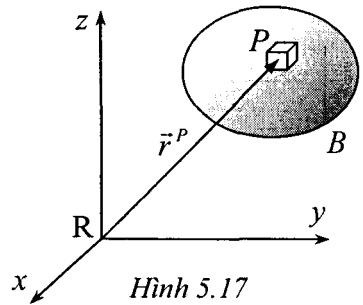
$$\vec{v}_t^P = \frac{\partial \vec{r}^P}{\partial t}, \quad \vec{v}_{q_k}^P = \frac{\partial \vec{r}^P}{\partial q_k} \quad (k=1, \dots, m) \quad (5.3)$$

Với ký hiệu trên, biểu thức (5.2) có thể viết lại dưới dạng

$$\vec{v}^P = \vec{v}_t^P + \sum_{k=1}^m \vec{v}_{q_k}^P \dot{q}_k \quad (5.4)$$

Định nghĩa 5.1. Véc tơ \vec{v}_t^P được gọi là vận tốc riêng theo biến t của điểm P trong hệ quy chiếu R . Véc tơ $\vec{v}_{q_k}^P$ ($k=1, \dots, m$) được gọi là véc tơ vận tốc riêng theo biến q_k của điểm P trong hệ quy chiếu R .

Phương trình (5.2) biểu diễn sự phụ thuộc tuyến tính của vận tốc ${}^R \vec{v}^P$ vào vận tốc suy rộng \dot{q}_k . Từ phương trình này ta dễ dàng suy ra biểu thức



Hình 5.17

$$\vec{v}_{ik}^P = \frac{{}^R \partial \vec{v}^P}{\partial \dot{q}_k} = \frac{{}^R \partial \vec{r}^P}{\partial q_k} \quad (5.5)$$

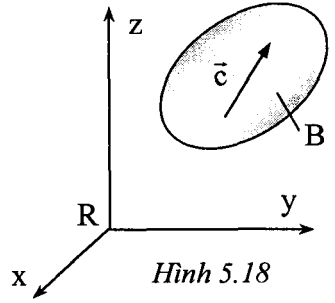
b. Các vận tốc góc riêng của vật rắn (Partial angular velocities of bodies)

Giả thử B là một vật rắn bất kỳ của một hệ nhiều vật. Lấy \vec{c} là một véctơ tùy ý của vật rắn B (hình 5.18). Véctơ \vec{c} là hàm của các tọa độ suy rộng q_1, q_2, \dots, q_m và t

$$\vec{c} = \vec{c}(t, q_1, q_2, \dots, q_m) \quad (5.6)$$

Theo định nghĩa vận tốc góc của vật rắn trong chương 2 ta có

$$\frac{{}^R d\vec{c}}{dt} = {}^R \vec{\omega}^B \times \vec{c} \quad (5.7)$$



Đạo hàm véctơ \vec{c} theo thời gian t ở trong hệ quy chiếu R ta có

$$\frac{{}^R d\vec{c}}{dt} = \frac{{}^R \partial \vec{c}}{\partial t} + \sum_{k=1}^m \frac{{}^R \partial \vec{c}}{\partial q_k} \dot{q}_k = {}^R \vec{\omega}^B \times \vec{c} \quad (5.8)$$

Bây giờ ta đưa vào các ký hiệu

$$\frac{{}^R \partial \vec{c}}{\partial t} = {}^R \vec{\omega}_t^B \times \vec{c}, \quad \frac{{}^R \partial \vec{c}}{\partial q_k} = {}^R \vec{\omega}_{q_k}^B \times \vec{c} \quad (5.9)$$

Thế các biểu thức (5.9) vào phương trình (5.8) ta được

$$\frac{{}^R d\vec{c}}{dt} = {}^R \vec{\omega}^B \times \vec{c} = {}^R \vec{\omega}_t^B \times \vec{c} + \sum_{k=1}^m ({}^R \vec{\omega}_{q_k}^B \times \vec{c}) \dot{q}_k = \left({}^R \vec{\omega}_t^B + \sum_{k=1}^m {}^R \vec{\omega}_{q_k}^B \dot{q}_k \right) \times \vec{c} \quad (5.10)$$

Do \vec{c} là một véctơ tùy ý khác không của vật rắn B và do phương trình (5.10) đúng với mọi véctơ, nên ta có hệ thức

$${}^R \vec{\omega}^B = {}^R \vec{\omega}_t^B + \sum_{k=1}^m {}^R \vec{\omega}_{q_k}^B \dot{q}_k \quad (5.11)$$

Từ công thức (5.11) ta suy ra

$$\frac{\partial {}^R \vec{\omega}^B}{\partial \dot{q}_k} = {}^R \vec{\omega}_{q_k}^B \quad (5.12)$$

Định nghĩa 5.2. Véctơ ${}^R \vec{\omega}_t^B$ được gọi là vận tốc góc riêng theo biến t của vật rắn B trong hệ quy chiếu R. Véctơ ${}^R \vec{\omega}_{q_k}^B$ được gọi là véctơ vận tốc góc riêng theo biến q_k của vật rắn B trong hệ quy chiếu R.

Chú ý. Tương tự như định lý 2.1 trong chương II, ta có thể chứng minh các công thức sau

$${}_{R_0} \vec{\omega}_t^B = \vec{e}_1^{(1)} \left(\frac{{}_{R_0} \partial \vec{e}_2^{(1)}}{\partial t} \cdot \vec{e}_3^{(1)} \right) + \vec{e}_2^{(1)} \left(\frac{{}_{R_0} \partial \vec{e}_3^{(1)}}{\partial t} \cdot \vec{e}_1^{(1)} \right) + \vec{e}_3^{(1)} \left(\frac{{}_{R_0} \partial \vec{e}_1^{(1)}}{\partial t} \cdot \vec{e}_2^{(1)} \right) \quad (5.13)$$

$${}_{R_0} \vec{\omega}_{q_k}^B = \vec{e}_1^{(1)} \left(\frac{{}_{R_0} \partial \vec{e}_2^{(1)}}{\partial q_k} \cdot \vec{e}_3^{(1)} \right) + \vec{e}_2^{(1)} \left(\frac{{}_{R_0} \partial \vec{e}_3^{(1)}}{\partial q_k} \cdot \vec{e}_1^{(1)} \right) + \vec{e}_3^{(1)} \left(\frac{{}_{R_0} \partial \vec{e}_1^{(1)}}{\partial q_k} \cdot \vec{e}_2^{(1)} \right) \quad (5.14)$$

c) Các thí dụ áp dụng

Thí dụ 5.9. Cho một điểm P chuyển động trong không gian ba chiều. Hãy tìm các vận tốc riêng của điểm P theo các tọa độ Descartes vuông góc.

Lời giải. Từ hình 5.19 ta có

$$\vec{r} = x\vec{e}_x + y\vec{e}_y + z\vec{e}_z \quad (1)$$

$$\vec{v} = \dot{x}\vec{e}_x + \dot{y}\vec{e}_y + \dot{z}\vec{e}_z \quad (2)$$

Như thế trong thí dụ này ta ký hiệu $q_1 = x, q_2 = y, q_3 = z$. Theo công thức (5.3), từ (1) ta suy ra

$$\vec{v}_t = 0, \vec{v}_x = \vec{e}_x, \vec{v}_y = \vec{e}_y, \vec{v}_z = \vec{e}_z \quad (3)$$

Trong thí dụ này các véctơ vận tốc riêng theo các biến x, y, z là các véctơ đơn vị trên các trục của hệ tọa độ vuông góc.

Thí dụ 5.10. Cho một điểm P chuyển động trên mặt phẳng. Hãy tìm các vận tốc riêng của điểm P trong hệ tọa độ cực.

Lời giải. Từ hình vẽ 5.20 ta có

$$\vec{r} = r\vec{e}_r \quad (1)$$

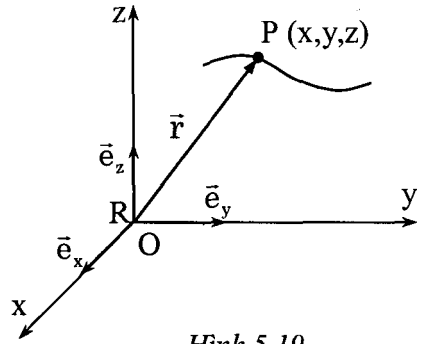
Đạo hàm biểu thức (1) theo t ở trong hệ tọa độ cố định ta được

$$\vec{v} = \dot{r}\vec{e}_r + r\dot{\theta}\vec{e}_\theta \quad (2)$$

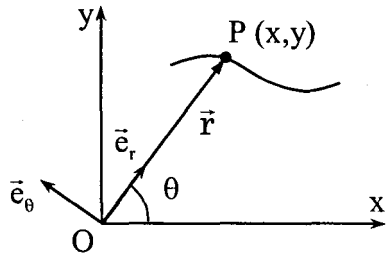
So sánh (2) với (5.2) ta có

$$\vec{v}_t = 0, \vec{v}_r = \vec{e}_r, \vec{v}_\theta = r\vec{e}_\theta, \quad (3)$$

Trong trường hợp này véctơ vận tốc riêng \vec{v}_r là véctơ đơn vị \vec{e}_r , còn véctơ vận tốc riêng \vec{v}_θ không phải là véctơ đơn vị \vec{e}_θ và có thứ nguyên khác với thứ nguyên của \vec{v}_θ .



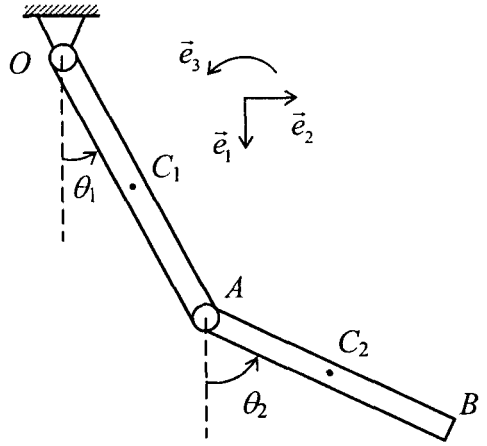
Hình 5.19



Hình 5.20

Thí dụ 5.11. Cho con lắc kép chuyển động trong mặt phẳng thẳng đứng như hình vẽ 5.21. Để đơn giản giả thiết khối tâm các thanh nằm ở giữa các thanh. Cho biết chiều dài các thanh $OA = l_1$, $AB = l_2$. Hãy xác định các vận tốc riêng của các khối tâm và các vận tốc góc riêng của các thanh.

Lời giải. Ta chọn các vectơ đơn vị $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ như trên hình vẽ. Thanh OA là vật rắn B_1 , thanh AB là vật rắn B_2 . Từ hình 5.21 ta có tọa độ các khối tâm C_1, C_2 là



Hình 5.21

$$\vec{r}^{C_1} = \frac{l_1}{2} (\sin \theta_1 \vec{e}_2 + \cos \theta_1 \vec{e}_1) \quad (1)$$

$$\vec{r}^{C_2} = l_1 (\sin \theta_1 \vec{e}_2 + \cos \theta_1 \vec{e}_1) + \frac{l_2}{2} (\sin \theta_2 \vec{e}_2 + \cos \theta_2 \vec{e}_1) \quad (2)$$

Đạo hàm các biểu thức (1) và (2) theo thời gian t ở trong hệ quy chiếu cố định ta được

$$\vec{v}^{C_1} = \frac{l_1}{2} \dot{\theta}_1 (\cos \theta_1 \vec{e}_2 - \sin \theta_1 \vec{e}_1) \quad (3)$$

$$\vec{v}^{C_2} = l_1 \dot{\theta}_1 (\cos \theta_1 \vec{e}_2 - \sin \theta_1 \vec{e}_1) + \frac{l_2}{2} \dot{\theta}_2 (\cos \theta_2 \vec{e}_2 - \sin \theta_2 \vec{e}_1) \quad (4)$$

Từ hình vẽ 5.21 ta có

$$\vec{\omega}^{B_1} = \dot{\theta}_1 \vec{e}_3, \quad \vec{\omega}^{B_2} = \dot{\theta}_2 \vec{e}_3 \quad (5)$$

Từ (3), (4), (5) ta suy ra các vận tốc riêng và các vận tốc góc riêng

$$\vec{v}_{\dot{\theta}_1}^{C_1} = \frac{l_1}{2} (\cos \theta_1 \vec{e}_2 - \sin \theta_1 \vec{e}_1), \quad \vec{v}_{\dot{\theta}_2}^{C_1} = 0 \quad (6)$$

$$\vec{v}_{\dot{\theta}_1}^{C_2} = l_1 (\cos \theta_1 \vec{e}_2 - \sin \theta_1 \vec{e}_1), \quad \vec{v}_{\dot{\theta}_2}^{C_2} = \frac{l_2}{2} (\cos \theta_2 \vec{e}_2 - \sin \theta_2 \vec{e}_1) \quad (7)$$

$$\vec{\omega}_{\dot{\theta}_1}^{B_1} = \vec{e}_3, \quad \vec{\omega}_{\dot{\theta}_2}^{B_1} = 0, \quad \vec{\omega}_{\dot{\theta}_1}^{B_2} = 0, \quad \vec{\omega}_{\dot{\theta}_2}^{B_2} = \vec{e}_3 \quad (8)$$

d. Hình chiếu của các vectơ vận tốc riêng của điểm trên các trục tọa độ

Theo công thức (5.4) vận tốc góc của điểm P có dạng

$$\vec{v}^P = \vec{v}_t^P + \sum_{k=1}^m \vec{v}_{\dot{q}_k}^P \dot{q}_k \quad (5.15)$$

Xét chuyển động của vật rắn B ở trong hệ quy chiếu $R\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ (hình 5.22). Khi đó ta có thể chiếu các vectơ $\vec{v}_i^P, \vec{v}_{\dot{q}_k}^P$ lên các trục của hệ tọa độ này

$$\vec{v}_i^P = v_{i1}^P \vec{e}_1 + v_{i2}^P \vec{e}_2 + v_{i3}^P \vec{e}_3 \quad (5.16)$$

$$\vec{v}_{\dot{q}_k}^P = v_{\dot{q}_k 1}^P \vec{e}_1 + v_{\dot{q}_k 2}^P \vec{e}_2 + v_{\dot{q}_k 3}^P \vec{e}_3 \quad (5.17)$$

Trong đó v_{ii}^P là hình chiếu của vectơ riêng \vec{v}_i^P lên trục \vec{e}_i còn $v_{\dot{q}_k i}^P$ là hình chiếu của vectơ riêng $\vec{v}_{\dot{q}_k}^P$ lên trục \vec{e}_i .

Thế các biểu thức (5.16), (5.17) vào phương trình (5.15) ta được

$$\vec{v}^P = \left(v_{r1}^P + \sum_{k=1}^m v_{\dot{q}_k 1}^P \dot{q}_k \right) \vec{e}_1 + \left(v_{r2}^P + \sum_{k=1}^m v_{\dot{q}_k 2}^P \dot{q}_k \right) \vec{e}_2 + \left(v_{r3}^P + \sum_{k=1}^m v_{\dot{q}_k 3}^P \dot{q}_k \right) \vec{e}_3 \quad (5.18)$$

Để đơn giản ta xét trường hợp cơ hệ chịu liên kết dừng, $\vec{r}^P = \vec{r}^P(q_1, \dots, q_f)$ phương trình (5.18) có dạng

$$\vec{v}^P = \left(\sum_{k=1}^m v_{\dot{q}_k 1}^P \dot{q}_k \right) \vec{e}_1 + \left(\sum_{k=1}^m v_{\dot{q}_k 2}^P \dot{q}_k \right) \vec{e}_2 + \left(\sum_{k=1}^m v_{\dot{q}_k 3}^P \dot{q}_k \right) \vec{e}_3 \quad (5.19)$$

Đạo hàm biểu thức (5.19) theo thời gian ở trong hệ quy chiếu R ta được vectơ gia tốc của điểm P

$$\vec{a}^P = \sum_{k=1}^m (v_{\dot{q}_k 1}^P \ddot{q}_k + \dot{v}_{\dot{q}_k 1}^P \dot{q}_k) \vec{e}_1 + \sum_{k=1}^m (v_{\dot{q}_k 2}^P \ddot{q}_k + \dot{v}_{\dot{q}_k 2}^P \dot{q}_k) \vec{e}_2 + \sum_{k=1}^m (v_{\dot{q}_k 3}^P \ddot{q}_k + \dot{v}_{\dot{q}_k 3}^P \dot{q}_k) \vec{e}_3 \quad (5.20)$$

e. Hình chiếu của vectơ vận tốc góc riêng của vật rắn trên các trục tọa độ

Theo công thức (5.11), biểu thức vận tốc góc của vật rắn có dạng

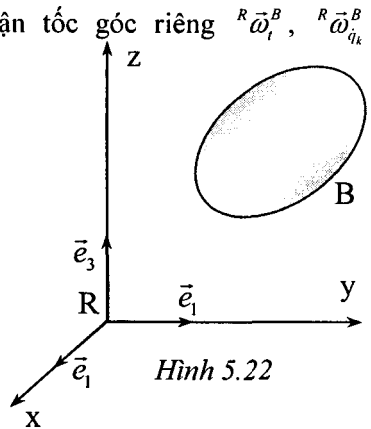
$${}^R \vec{\omega}^B = {}^R \vec{\omega}_i^B + \sum_{k=1}^m {}^R \vec{\omega}_{\dot{q}_k}^B \dot{q}_k$$

Trong hệ quy chiếu $R = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ các vectơ vận tốc góc riêng ${}^R \vec{\omega}_i^B, {}^R \vec{\omega}_{\dot{q}_k}^B$ ($k=1, \dots, f$) của vật rắn B có thể biểu diễn dưới dạng

$${}^R \vec{\omega}_i^B = {}^R \omega_{i1}^B \vec{e}_1 + {}^R \omega_{i2}^B \vec{e}_2 + {}^R \omega_{i3}^B \vec{e}_3 \quad (5.21)$$

$${}^R \vec{\omega}_{\dot{q}_k}^B = {}^R \omega_{\dot{q}_k 1}^B \vec{e}_1 + {}^R \omega_{\dot{q}_k 2}^B \vec{e}_2 + {}^R \omega_{\dot{q}_k 3}^B \vec{e}_3 \quad (5.22)$$

Trong đó ${}^R \omega_{ii}^B$ là hình chiếu của vận tốc góc riêng ${}^R \vec{\omega}_i^B$ trên các trục tọa độ, còn ${}^R \omega_{\dot{q}_k i}^B$ ($i=1, 2, 3$) là hình chiếu của vận tốc góc riêng ${}^R \vec{\omega}_{\dot{q}_k}^B$ trên các trục tọa độ.



Thế các biểu thức (5.22), (5.23) vào biểu thức (5.11) ta được

$${}^R \vec{\omega}^B = \left({}^R \omega_{i1}^B + \sum_{k=1}^m {}^R \omega_{\dot{q}_k 1}^B \dot{q}_k \right) \vec{e}_1 + \left({}^R \omega_{i2}^B + \sum_{k=1}^m {}^R \omega_{\dot{q}_k 2}^B \dot{q}_k \right) \vec{e}_2 + \left({}^R \omega_{i3}^B + \sum_{k=1}^m {}^R \omega_{\dot{q}_k 3}^B \dot{q}_k \right) \vec{e}_3 \quad (5.23)$$

Trong trường hợp cơ hệ chịu các liên kết dừng, biểu thức (5.24) có dạng

$${}^R \vec{\omega}^B = \left(\sum_{k=1}^m {}^R \omega_{\dot{q}_k 1}^B \dot{q}_k \right) \vec{e}_1 + \left(\sum_{k=1}^m {}^R \omega_{\dot{q}_k 2}^B \dot{q}_k \right) \vec{e}_2 + \left(\sum_{k=1}^m {}^R \omega_{\dot{q}_k 3}^B \dot{q}_k \right) \vec{e}_3 \quad (5.24)$$

Đạo hàm theo thời gian ở trong hệ quy chiếu R biểu thức (5.24) ta nhận được vectơ gia tốc góc của vật rắn B

$${}^R \vec{\alpha}^B = \sum_{k=1}^m \left({}^R \omega_{\dot{q}_k 1}^B \ddot{q}_k + {}^R \dot{\omega}_{\dot{q}_k 1}^B \dot{q}_k \right) \vec{e}_1 + \sum_{k=1}^m \left({}^R \omega_{\dot{q}_k 2}^B \ddot{q}_k + {}^R \dot{\omega}_{\dot{q}_k 2}^B \dot{q}_k \right) \vec{e}_2 + \sum_{k=1}^m \left({}^R \omega_{\dot{q}_k 3}^B \ddot{q}_k + {}^R \dot{\omega}_{\dot{q}_k 3}^B \dot{q}_k \right) \vec{e}_3 \quad (5.25)$$

5.2. Lực hoạt động suy rộng và lực quán tính suy rộng

a) Lực hoạt động suy rộng của hệ các vật rắn

Thu gọn các lực hoạt động tác dụng lên vật rắn B_k về khối tâm C_k của nó ta được một lực \vec{F}_k^a và một ngẫu lực \vec{M}_k^a .

Định nghĩa 5.3. Lực hoạt động suy rộng của hệ p vật rắn ứng với tọa độ suy rộng q_i được định nghĩa bởi biểu thức sau

$$Q_i = \sum_{k=1}^p \left(\vec{F}_k^a \cdot \frac{\partial \vec{r}_k}{\partial q_i} + \vec{M}_k^a \cdot \frac{\partial \vec{\omega}_k}{\partial \dot{q}_i} \right) = \sum_{k=1}^p \left(\vec{F}_k^a \cdot \vec{v}_{\dot{q}_i}^{C_k} + \vec{M}_k^a \cdot \vec{\omega}_{\dot{q}_i}^{B_k} \right), \quad (i=1, \dots, m) \quad (5.26)$$

Thí dụ 5.12: Cho thanh thẳng đồng chất dài l, quay quanh một điểm O cố định. Ở đầu thanh có lò xo xoắn với hệ số cứng là k. Chọn tọa độ suy rộng là góc quay θ . Tìm lực suy rộng tương ứng.

Lời giải. Từ hình vẽ 5.23 ta có vectơ xác định vị trí khối tâm của thanh

$$\vec{r}^C = \frac{1}{2} l \vec{e}_r \quad (1)$$

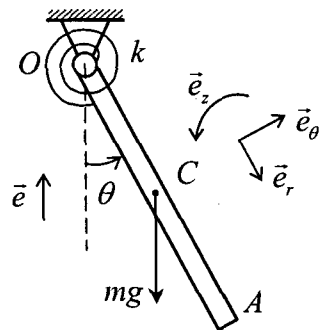
Đạo hàm hệ thức (1) theo t ở trong hệ quy chiếu cố định ta được

$$\vec{v}^C = \frac{1}{2} l \dot{\theta} \vec{e}_\theta \quad (2)$$

Vận tốc góc của thanh là

$$\vec{\omega} = \dot{\theta} \vec{e}_z \quad (3)$$

Từ đó ta dễ dàng tính được vận tốc riêng của khối tâm và vận tốc góc riêng của thanh



Hình 5.23

$$\vec{v}_\theta^C = \frac{1}{2}l\vec{e}_\theta, \quad \vec{\omega}_\theta = \vec{e}_z \quad (4)$$

Lực hoạt động và ngẫu lực hoạt động tác dụng lên thanh là

$$\vec{F}^a = -mg\vec{e}_z, \quad \vec{M}^a = -k\theta\vec{e}_z \quad (5)$$

Từ đó suy ra lực hoạt động suy rộng ứng với tọa độ suy rộng θ là

$$Q_\theta = -mg\vec{e}_z \cdot \vec{v}_\theta^C - k\theta\vec{e}_z \cdot \vec{\omega}_\theta = -\frac{1}{2}mgl \sin \theta - k\theta \quad (6)$$

b) *Lực quán tính suy rộng của vật rắn*

Thu gọn hệ lực quán tính của vật rắn B_k về khối tâm C_k của nó ta được một lực \vec{F}_k^* và một ngẫu lực \vec{M}_k^*

$$\vec{F}_k^* = -m_k \vec{a}^{C_k} \quad (5.27)$$

$$\vec{M}_k^* = -\vec{I}_{C_k} \cdot \vec{\alpha}_k - \vec{\omega}_k \times (\vec{I}_{C_k} \cdot \vec{\omega}_k) \quad (5.28)$$

Trong đó m_k là khối lượng của vật rắn B_k , \vec{I}_{C_k} là tenxơ quán tính khối của vật rắn đối với khối tâm C_k của nó, $\vec{\omega}_k$ là vận tốc góc của vật rắn, $\vec{\alpha}_k$ là gia tốc của vật rắn, \vec{a}^{C_k} là gia tốc khối tâm C_k của vật rắn.

Chú ý. Trong trường hợp vật rắn phẳng chuyển động trong mặt phẳng của nó biểu thức \vec{M}_k^* có dạng khá đơn giản như sau

$$\vec{M}_k^* = -I_{C_k} \vec{\alpha}_k \quad (5.29)$$

Định nghĩa 5.4. Lực quán tính suy rộng của hệ p vật rắn ứng với tọa độ suy rộng q_i được định nghĩa bởi biểu thức sau

$$Q_i^* = \sum_{k=1}^p (\vec{F}_k^* \cdot \frac{\partial \vec{r}_k}{\partial q_i} + \vec{M}_k^* \cdot \frac{\partial \vec{\omega}_k}{\partial \dot{q}_i}) = \sum_{k=1}^p (\vec{F}_k^* \cdot \vec{v}_{q_i}^{C_k} + \vec{M}_k^* \cdot \vec{\omega}_{q_i}^{B_k}) \quad (i=1, \dots, m) \quad (5.30)$$

Thí dụ 5.13. Cho mô hình con lắc vật lý đơn như hình 5.24. Cho biết thanh OA đồng chất dài l, thiết diện không đổi, khối lượng là m. Tìm biểu thức lực quán tính suy rộng ứng với tọa độ suy rộng θ .

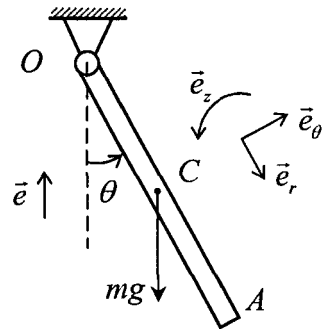
Lời giải. Theo thí dụ 5.12 ta có

$$\vec{v}^C = \frac{1}{2}l\dot{\theta}\vec{e}_\theta \quad (1)$$

Đạo hàm (1) ta được

$$\vec{a}^C = \frac{1}{2}l\ddot{\theta}\vec{e}_\theta - \frac{1}{2}l\dot{\theta}^2\vec{e}_r \quad (2)$$

Từ hình vẽ 5.24 ta có biểu thức xác định vận tốc góc và gia tốc góc của vật rắn



Hình 5.24

$$\vec{\omega} = \dot{\theta} \vec{e}_3, \quad \vec{\alpha} = \ddot{\theta} \vec{e}_3 \quad (3)$$

Từ (2) và (3) ta suy ra

$$\vec{F}^* = -m\vec{a}^C = -\frac{1}{2}ml\ddot{\theta}\vec{e}_\theta + \frac{1}{2}ml\dot{\theta}^2\vec{e}_r \quad (4)$$

$$\vec{M}^* = -I_C\vec{\alpha} = -\frac{1}{12}ml^2\ddot{\theta}\vec{e}_3 \quad (5)$$

Từ (1) và (3) ta suy ra biểu thức vận tốc riêng và vận tốc góc riêng ứng với θ

$$\vec{v}_\theta^C = \frac{1}{2}l\dot{\theta}\vec{e}_\theta, \quad \vec{\omega}_\theta = \dot{\theta}\vec{e}_3 \quad (6)$$

Biểu thức (5.30) trong thí dụ này có dạng

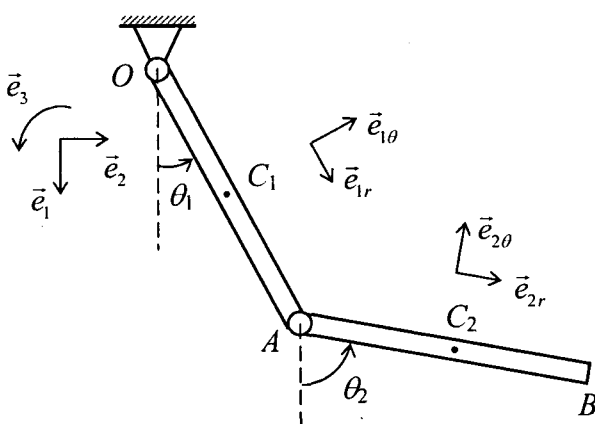
$$Q_\theta^* = \vec{F}^* \cdot \vec{v}_\theta^C + \vec{M}^* \cdot \vec{\omega}_\theta^B \quad (7)$$

Thế (4), (5), (6) vào (7) ta được biểu thức xác định lực quán tính suy rộng

$$Q_\theta^* = \vec{v}_\theta^C \cdot \vec{F}^* + \vec{\omega}_\theta \cdot \vec{M}^* = -\frac{ml^2}{4}\ddot{\theta} - \frac{ml^2}{12}\ddot{\theta} = -\frac{ml^2}{3}\ddot{\theta} \quad (8)$$

Thí dụ 5.14. Cho mô hình rôbốt phẳng hai khâu như hình 5.25. Cho biết chiều dài các thanh $OA = l_1$, $AB = l_2$. Các thanh thẳng đồng chất thiết diện không đổi có khối lượng tương ứng là m_1, m_2 . Hãy xác định các lực quán tính suy rộng tương ứng với các tọa độ suy rộng θ_1, θ_2 .

Lời giải. Từ hình vẽ 5.25 ta tính được vận tốc và gia tốc các khối tâm của các thanh là



Hình 5.25

$$\vec{v}^{C_1} = \frac{1}{2}l_1\dot{\theta}_1\vec{e}_{1\theta}, \quad (1)$$

$$\vec{a}^{C_1} = \frac{1}{2}l_1\ddot{\theta}_1\vec{e}_{1\theta} - \frac{1}{2}l_1\dot{\theta}_1^2\vec{e}_{1r} \quad (2)$$

$$\vec{v}^{C_2} = l_1\dot{\theta}_1\vec{e}_{1\theta} + \frac{1}{2}l_2\dot{\theta}_2\vec{e}_{2\theta} \quad (3)$$

$$\vec{a}^{C_2} = l_1\ddot{\theta}_1\vec{e}_{1\theta} - l_1\dot{\theta}_1^2\vec{e}_{1r} + \frac{1}{2}l_2\ddot{\theta}_2\vec{e}_{2\theta} - \frac{1}{2}l_2\dot{\theta}_2^2\vec{e}_{2r} \quad (4)$$

Vận tốc góc và gia tốc góc của thanh OA (vật rắn B_1) và thanh AB (vật rắn B_2) là

$$\vec{\omega}^{B_1} = \dot{\theta}_1\vec{e}_3, \quad \vec{\omega}^{B_2} = \dot{\theta}_2\vec{e}_3 \quad (5)$$

$$\vec{\alpha}^{B_1} = \ddot{\theta}_1\vec{e}_3, \quad \vec{\alpha}^{B_2} = \ddot{\theta}_2\vec{e}_3 \quad (6)$$

Quan hệ giữa các vectơ đơn vị của các hệ quy chiếu động và vectơ đơn vị của hệ quy chiếu cố định $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ có dạng như sau

$$\vec{e}_{1r} = \cos(\theta_2 - \theta_1)\vec{e}_{2r} - \sin(\theta_2 - \theta_1)\vec{e}_{2\theta} = \cos\theta_1\vec{e}_1 + \sin\theta_1\vec{e}_2 \quad (7)$$

$$\vec{e}_{1\theta} = \sin(\theta_2 - \theta_1)\vec{e}_{2r} + \cos(\theta_2 - \theta_1)\vec{e}_{2\theta} = -\sin\theta_1\vec{e}_1 + \cos\theta_1\vec{e}_2 \quad (8)$$

$$\vec{e}_{2r} = \cos(\theta_2 - \theta_1)\vec{e}_{1r} + \sin(\theta_2 - \theta_1)\vec{e}_{1\theta} = \cos\theta_2\vec{e}_1 + \sin\theta_2\vec{e}_2 \quad (9)$$

$$\vec{e}_{2\theta} = \sin(\theta_2 - \theta_1)\vec{e}_{1r} - \cos(\theta_2 - \theta_1)\vec{e}_{1\theta} = -\sin\theta_2\vec{e}_1 + \cos\theta_2\vec{e}_2 \quad (10)$$

Thu gọn hệ lực quán tính của thanh OA về khối tâm C_1 của nó ta được một lực \vec{F}_1^* và một ngẫu lực \vec{M}_1^*

$$\vec{F}_1^* = -m_1\vec{a}^{C_1} = \frac{1}{2}m_1l_1\dot{\theta}_1^2\vec{e}_{1r} - \frac{1}{2}m_1l_1\ddot{\theta}_1\vec{e}_{1\theta}, \quad \vec{M}_1^* = -I_{C_1}\ddot{\theta}_1\vec{e}_3 \quad (11)$$

Thế các biểu thức (7), (8) vào (11) và thay $I_{C_1} = \frac{1}{12}m_1l_1^2$ ta được

$$\vec{F}_1^* = -m_1\vec{a}^{C_1} = \frac{1}{2}m_1l_1(\dot{\theta}_1^2 \cos\theta_1 + \ddot{\theta}_1 \sin\theta_1)\vec{e}_1 + \frac{1}{2}m_1l_1(\dot{\theta}_1^2 \sin\theta_1 - \ddot{\theta}_1 \cos\theta_1)\vec{e}_2 \quad (12)$$

$$\vec{M}_1^* = -\frac{1}{12}m_1l_1^2\ddot{\theta}_1\vec{e}_3 \quad (13)$$

Thu gọn hệ lực quán tính của thanh AB về khối tâm C_2 của nó ta được một lực \vec{F}_2^* và một ngẫu lực \vec{M}_2^*

$$\vec{F}_2^* = -m_2\vec{a}^{C_2} = m_2l_1\dot{\theta}_1^2\vec{e}_{1r} - m_2l_1\ddot{\theta}_1\vec{e}_{1\theta} + \frac{1}{2}m_2l_2\dot{\theta}_2^2\vec{e}_{2r} - \frac{1}{2}m_2l_2\ddot{\theta}_2\vec{e}_{2\theta}, \quad \vec{M}_2^* = -I_{C_2}\ddot{\theta}_2\vec{e}_3 \quad (14)$$

Thế (7), (8), (9) và (10) vào (14) ta được

$$\begin{aligned} \vec{F}_2^* = m_2 \left[l_1(\dot{\theta}_1^2 \cos\theta_1 + \ddot{\theta}_1 \sin\theta_1) + \frac{1}{2}l_2(\dot{\theta}_2^2 \cos\theta_2 + \ddot{\theta}_2 \sin\theta_2) \right] \vec{e}_1 \\ + m_2 \left[l_1(\dot{\theta}_1^2 \sin\theta_1 - \ddot{\theta}_1 \cos\theta_1) + \frac{1}{2}l_2(\dot{\theta}_2^2 \sin\theta_2 - \ddot{\theta}_2 \cos\theta_2) \right] \vec{e}_2 \end{aligned} \quad (15)$$

$$\vec{M}_2^* = -I_{C_2}\ddot{\alpha}_2 = -\frac{1}{12}m_2l_2^2\ddot{\theta}_2\vec{e}_3 \quad (16)$$

Từ các công thức (1), (3), (5) ta suy ra các vận tốc riêng và các vận tốc góc riêng

$$\vec{v}_{\theta_1}^{C_1} = \frac{1}{2}l_1\dot{\theta}_1\vec{e}_{1\theta} = -\frac{1}{2}l_1\dot{\theta}_1\sin\theta_1\vec{e}_1 + \frac{1}{2}l_1\dot{\theta}_1\cos\theta_1\vec{e}_2, \quad \vec{v}_{\theta_2}^{C_1} = 0 \quad (17)$$

$$\vec{v}_{\theta_1}^{C_2} = l_1\dot{\theta}_1\vec{e}_{1\theta} = -l_1\dot{\theta}_1\sin\theta_1\vec{e}_1 + l_1\dot{\theta}_1\cos\theta_1\vec{e}_2 \quad (18)$$

$$\vec{v}_{\theta_2}^{C_2} = \frac{1}{2}l_2\dot{\theta}_2\vec{e}_{2\theta} = -\frac{1}{2}l_2\dot{\theta}_2\sin\theta_2\vec{e}_1 + \frac{1}{2}l_2\dot{\theta}_2\cos\theta_2\vec{e}_2 \quad (19)$$

$$\vec{\omega}_{\theta_1}^{B_2} = 0, \quad \vec{\omega}_{\theta_2}^{B_2} = \vec{e}_3, \quad \vec{\omega}_{\theta_1}^{B_1} = \vec{e}_3, \quad \vec{\omega}_{\theta_2}^{B_1} = 0 \quad (20)$$

Thế các biểu thức trên vào công thức tính lực quán tính suy rộng

$$Q_i^* = \sum_{k=1}^2 (\bar{v}_{\dot{q}_i}^{C_k} \cdot \bar{F}_k^* + \bar{\omega}_{\dot{q}_i}^{B_k} \cdot \bar{M}_k^*), \quad (i=1,2)$$

ta được

$$Q_{\theta_1}^* = -\frac{1}{3}(m_1 + 3m_2)l_1^2 \ddot{\theta}_1 - \frac{1}{2}m_2 l_1 l_2 \ddot{\theta}_2 \cos(\theta_2 - \theta_1) + \frac{1}{2}m_2 l_1 l_2 \dot{\theta}_2^2 \sin(\theta_2 - \theta_1) \quad (21)$$

$$Q_{\theta_2}^* = -\frac{1}{3}m_2 l_2^2 \ddot{\theta}_2 - \frac{1}{2}m_2 l_1 l_2 \ddot{\theta}_1 \cos(\theta_2 - \theta_1) + \frac{1}{2}m_2 l_1 l_2 \dot{\theta}_1^2 \sin(\theta_2 - \theta_1) \quad (22)$$

5.3 Thiết lập các phương trình Kane cho hệ nhiều vật

a) Các phép biến đổi chung

Thu gọn hệ các lực tác dụng lên vật rắn B_k về khối tâm C_k của nó ta được một lực \bar{F}_k và một ngẫu lực \bar{M}_k

$$\bar{F}_k = \bar{F}_k^a + \bar{F}_k^c \quad (k=1, \dots, p) \quad (5.31)$$

$$\bar{M}_k = \bar{M}_k^a + \bar{M}_k^c \quad (k=1, \dots, p) \quad (5.32)$$

Thu gọn hệ các lực quán tính của vật rắn B_k về khối tâm C_k của nó ta được ta được một lực quán tính \bar{F}_k^* và một ngẫu lực quán tính \bar{M}_k^*

$$\bar{F}_k^* = -m_k \bar{a}_k \quad (5.33)$$

$$\bar{M}_k^* = -\bar{I}_k \cdot \bar{\alpha}_k - \bar{\omega}_k \times (\bar{I}_k \cdot \bar{\omega}_k) \quad (5.34)$$

Theo nguyên lý d'Alembert ta có

$$\bar{F}_k^a + \bar{F}_k^c + \bar{F}_k^* = \bar{0} \quad (k=1, \dots, p) \quad (5.35)$$

$$\bar{M}_k^a + \bar{M}_k^c + \bar{M}_k^* = \bar{0} \quad (k=1, \dots, p) \quad (5.36)$$

Nhân vô hướng phương trình (5.35) với độ dời ảo $\delta \bar{r}_k$ của khối tâm, phương trình (5.36) với độ quay ảo $\delta \bar{\varphi}_k$ của vật rắn B_k rồi cộng lại ta được

$$\sum_{k=1}^p (\bar{F}_k^a + \bar{F}_k^c + \bar{F}_k^*) \cdot \delta \bar{r}_k + \sum_{k=1}^p (\bar{M}_k^a + \bar{M}_k^c + \bar{M}_k^*) \cdot \delta \bar{\varphi}_k = 0 \quad (5.37)$$

Theo giả thiết liên kết lý tưởng ta có

$$\sum_{k=1}^p (\bar{F}_k^c \cdot \delta \bar{r}_k + \bar{M}_k^c \cdot \delta \bar{\varphi}_k) = 0 \quad (5.38)$$

Phương trình (5.37) bây giờ có dạng

$$\sum_{k=1}^p (\bar{F}_k^a + \bar{F}_k^*) \cdot \delta \bar{r}_k + \sum_{k=1}^p (\bar{M}_k^a + \bar{M}_k^*) \cdot \delta \bar{\varphi}_k = 0 \quad (5.39)$$

Từ phần động học ta có các quan hệ

$$\vec{r}_k = \vec{r}_k(q_1, \dots, q_m, t)$$

$$\vec{\varphi}_k = \vec{\varphi}_k(q_1, \dots, q_m, t)$$

Từ đó suy ra

$$\delta \vec{r}_k = \sum_{i=1}^m \frac{\partial \vec{r}_k}{\partial q_i} \delta q_i = \sum_{i=1}^m \frac{\partial \vec{v}_k}{\partial \dot{q}_i} \delta q_i \quad (5.40)$$

$$\delta \vec{\varphi}_k = \sum_{i=1}^m \frac{\partial \vec{\varphi}_k}{\partial q_i} \delta q_i = \sum_{i=1}^m \frac{\partial \vec{\omega}_k}{\partial \dot{q}_i} \delta q_i \quad (5.41)$$

Thế các biểu thức (5.40) và (5.41) vào phương trình (5.39) ta được

$$\sum_{i=1}^m \left(\sum_{k=1}^p \vec{F}_k^a \cdot \frac{\partial \vec{r}_k}{\partial q_i} + \vec{M}_k^a \cdot \frac{\partial \vec{\omega}_k}{\partial \dot{q}_i} \right) \delta q_i + \sum_{i=1}^m \left(\sum_{k=1}^p \vec{F}_k^* \cdot \frac{\partial \vec{r}_k}{\partial q_i} + \vec{M}_k^* \cdot \frac{\partial \vec{\omega}_k}{\partial \dot{q}_i} \right) \delta q_i = 0 \quad (5.42)$$

Theo định nghĩa lực hoạt động suy rộng và lực quán tính suy rộng

$$Q_i = \sum_{k=1}^p \left(\vec{F}_k^a \cdot \frac{\partial \vec{r}_k}{\partial q_i} + \vec{M}_k^a \cdot \frac{\partial \vec{\omega}_k}{\partial \dot{q}_i} \right), \quad (i=1, \dots, m) \quad (5.43)$$

$$Q_i^* = \sum_{k=1}^p \left(\vec{F}_k^* \cdot \frac{\partial \vec{r}_k}{\partial q_i} + \vec{M}_k^* \cdot \frac{\partial \vec{\omega}_k}{\partial \dot{q}_i} \right), \quad (i=1, \dots, m) \quad (5.44)$$

Do đó phương trình (5.42) có dạng

$$\sum_{i=1}^m (Q_i + Q_i^*) \delta q_i = 0 \quad (5.45)$$

b) Các phương trình Kane cho hệ nhiều vật rắn hólônôm

Đối với hệ các vật rắn hólônôm f bậc tự do, ta chọn các tọa độ suy rộng độc lập (các tọa độ suy rộng tối thiểu) q_1, q_2, \dots, q_f xác định vị trí của hệ. Do các δq_i ($i=1, \dots, f$) độc lập tuyến tính, từ (5.45) ta suy ra các phương trình Kane cho hệ nhiều vật hólônôm

$$Q_i + Q_i^* = 0 \quad (i=1, \dots, f) \quad (5.46)$$

c) Các phương trình Kane cho hệ nhiều vật rắn phi hólônôm

Xét hệ p vật rắn. Vị trí của hệ được xác định bởi m tọa độ suy rộng dư q_1, q_2, \dots, q_m . Giả sử hệ chịu r liên kết hólônôm

$$f_i(q_1, q_2, \dots, q_m, t) = 0 \quad (i=1, 2, \dots, r) \quad (5.47)$$

và s liên kết phi hólônôm tuyến tính

$$\sum_{k=1}^m a_{jk} \dot{q}_k + a_{j0} = 0 \quad (j=1, 2, \dots, s) \quad (5.48)$$

Từ (5.47) và (5.48) ta suy ra các phương trình ràng buộc các biến phân δq_k (các di chuyển ảo)

$$\sum_{k=1}^m \frac{\partial f_i}{\partial q_k} \delta q_k = 0 \quad (i=1,2,\dots,r) \quad (5.49)$$

$$\sum_{k=1}^m a_{jk} \delta q_k = 0 \quad (j=1,2,\dots,s) \quad (5.50)$$

Ta đưa vào các ký hiệu

$$b_k = Q_k + Q_k^*, \quad (k=1,\dots,m) \quad (5.51)$$

Khi đó ta có

$$\mathbf{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}, \quad \mathbf{s} = \begin{bmatrix} \delta q_1 \\ \vdots \\ \delta q_m \end{bmatrix} \quad (5.52)$$

Phương trình (5.45) có thể được viết lại dưới dạng

$$\mathbf{s}^T \mathbf{b} = 0 \quad (5.53)$$

Bây giờ ta đưa thêm vào ký hiệu

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial q_1} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial q_m} \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial f_r}{\partial q_1} & \dots & \frac{\partial f_r}{\partial q_m} \\ a_{11} & \dots & a_{1m} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{s1} & \dots & a_{sm} \end{bmatrix} \quad (5.54)$$

Với các ký hiệu trên hai hệ phương trình (5.49) và (5.50) có thể biểu diễn dưới dạng ma trận như sau

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{s} = \mathbf{0} \quad (5.55)$$

Theo định lý nhân tử Lagrange, từ (5.53) và (5.55) ta suy ra

$$\mathbf{b} + \mathbf{A}^T \boldsymbol{\lambda} = \mathbf{0} \quad (5.56)$$

Trong đó

$$\boldsymbol{\lambda} = [\lambda_1, \dots, \lambda_r, \mu_1, \dots, \mu_s]^T \quad (5.57)$$

là các nhân tử Lagrange. Từ biểu thức (5.56) ta suy ra

$$Q_k + Q_k^* + \sum_{i=1}^r \lambda_i \frac{\partial f_i}{\partial q_k} + \sum_{j=1}^s \mu_j a_{jk} = 0 \quad (k=1,2,\dots,m) \quad (5.58)$$

Hệ các phương trình (5.58) được gọi là các phương trình Kane dạng nhân tử cho hệ nhiều vật phi hêlônôm với các liên kết phi hêlônôm tuyến tính. Cùng với m phương trình vi phân (5.58) ta còn có r phương trình liên kết hêlônôm (5.47) và s phương trình liên kết phi hêlônôm tuyến tính (5.48). Như thế ta có hệ $m+r+s$ phương trình vi phân đại số. Chúng được sử dụng để xác định m tọa độ suy rộng dư, r nhân tử λ_i và s nhân tử μ_j .

Chú ý. Trong trường hợp hệ chịu các liên kết hêlônôm các phương trình Kane dạng nhân tử có dạng

$$Q_k + Q_k^* + \sum_{i=1}^r \lambda_i \frac{\partial f_i}{\partial q_k} = 0 \quad (k=1,2,\dots,m) \tag{5.59}$$

$$f_i(q_1, q_2, \dots, q_m, t) = 0 \quad (i=1,2,\dots,r) \tag{5.60}$$

5.4 Các thí dụ áp dụng

Thí dụ 5.15. Cho mô hình con lắc toán học kép toán học như hình vẽ. Khối lượng các chất điểm tương ứng là m_1, m_2 . Áp dụng các phương trình Kane, thiết lập các phương trình vi phân chuyển động của cơ hệ.

Lời giải. Vị trí của cơ hệ được xác định bởi hai tọa độ suy rộng độc lập θ_1, θ_2 . Từ hình 5.26 ta dễ dàng xác định vị trí các chất điểm

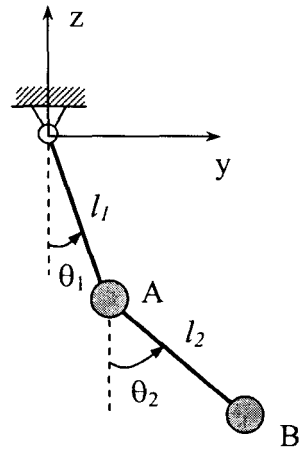
$$\mathbf{r}^A = \begin{bmatrix} 0 \\ l_1 \sin \theta_1 \\ -l_1 \cos \theta_1 \end{bmatrix} \tag{1}$$

$$\mathbf{r}^B = \mathbf{r}^A + \begin{bmatrix} 0 \\ l_2 \sin \theta_2 \\ -l_2 \cos \theta_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ l_1 \sin \theta_1 + l_2 \sin \theta_2 \\ -l_1 \cos \theta_1 - l_2 \cos \theta_2 \end{bmatrix} \tag{2}$$

Từ (1) và (2) ta tính được các vận tốc riêng :

$$\mathbf{v}_{\theta_1}^A = \frac{{}^R \partial \mathbf{r}^A}{\partial \theta_1} = \begin{bmatrix} 0 \\ l_1 \cos \theta_1 \\ l_1 \sin \theta_1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_{\theta_2}^A = \frac{{}^R \partial \mathbf{r}^A}{\partial \theta_2} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{3}$$

$$\mathbf{v}_{\theta_1}^B = \frac{{}^R \partial \mathbf{r}^B}{\partial \theta_1} = \begin{bmatrix} 0 \\ l_1 \cos \theta_1 \\ l_1 \sin \theta_1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_{\theta_2}^B = \frac{{}^R \partial \mathbf{r}^B}{\partial \theta_2} = \begin{bmatrix} 0 \\ l_2 \cos \theta_2 \\ l_2 \sin \theta_2 \end{bmatrix} \tag{4}$$



Hình 5.26

Đạo hàm hai lần theo thời gian các công thức (1) và (2) ta xác định được gia tốc của các chất điểm A và B

$$\mathbf{a}^A = \frac{{}^R d^2 \mathbf{r}^A}{dt^2} = \begin{bmatrix} 0 \\ -l_1 \sin \theta_1 \dot{\theta}_1^2 + l_1 \cos \theta_1 \ddot{\theta}_1 \\ l_1 \cos \theta_1 \dot{\theta}_1^2 + l_1 \sin \theta_1 \ddot{\theta}_1 \end{bmatrix} \quad (5)$$

$$\mathbf{a}^B = \frac{{}^R d^2 \mathbf{r}^B}{dt^2} = \begin{bmatrix} 0 \\ -l_1 \sin \theta_1 \dot{\theta}_1^2 + l_1 \cos \theta_1 \ddot{\theta}_1 - l_2 \sin \theta_2 \dot{\theta}_2^2 + l_2 \cos \theta_2 \ddot{\theta}_2 \\ l_1 \cos \theta_1 \dot{\theta}_1^2 + l_1 \sin \theta_1 \ddot{\theta}_1 + l_2 \cos \theta_2 \dot{\theta}_2^2 + l_2 \sin \theta_2 \ddot{\theta}_2 \end{bmatrix} \quad (6)$$

Các lực hoạt động tác dụng lên chất điểm là các trọng lượng của chúng

$$\mathbf{F}_A^a = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -m_1 g \end{bmatrix}, \quad \mathbf{F}_B^a = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -m_2 g \end{bmatrix} \quad (7)$$

Các lực quán tính tác dụng lên các chất điểm là

$$\mathbf{F}_A^* = -m_1 \mathbf{a}^A = m_1 \begin{bmatrix} 0 \\ l_1 \sin \theta_1 \dot{\theta}_1^2 - l_1 \cos \theta_1 \ddot{\theta}_1 \\ -l_1 \cos \theta_1 \dot{\theta}_1^2 - l_1 \sin \theta_1 \ddot{\theta}_1 \end{bmatrix} \quad (8)$$

$$\mathbf{F}_B^* = -m_2 \mathbf{a}^B = m_2 \begin{bmatrix} 0 \\ l_1 \sin \theta_1 \dot{\theta}_1^2 - l_1 \cos \theta_1 \ddot{\theta}_1 + l_2 \sin \theta_2 \dot{\theta}_2^2 - l_2 \cos \theta_2 \ddot{\theta}_2 \\ -l_1 \cos \theta_1 \dot{\theta}_1^2 + l_1 \sin \theta_1 \ddot{\theta}_1 - l_2 \cos \theta_2 \dot{\theta}_2^2 - l_2 \sin \theta_2 \ddot{\theta}_2 \end{bmatrix} \quad (9)$$

Lực hoạt động suy rộng ứng với toạ độ suy rộng thứ nhất θ_1 :

$$\begin{aligned} Q_{\theta_1} &= (\mathbf{F}_A^a)^T \mathbf{v}_{\theta_1}^A + (\mathbf{F}_B^a)^T \mathbf{v}_{\theta_1}^B \\ Q_{\theta_1} &= [0 \quad 0 \quad -m_1 g] \begin{bmatrix} 0 \\ l_1 \cos \theta_1 \\ l_1 \sin \theta_1 \end{bmatrix} + [0 \quad 0 \quad -m_2 g] \begin{bmatrix} 0 \\ l_1 \cos \theta_1 \\ l_1 \sin \theta_1 \end{bmatrix} \\ Q_{\theta_1} &= -(m_1 + m_2) g l_1 \sin \theta_1 \end{aligned} \quad (10)$$

Lực hoạt động suy rộng ứng với toạ độ suy rộng thứ hai θ_2

$$\begin{aligned} Q_{\theta_2} &= (\mathbf{F}_A^a)^T \mathbf{v}_{\theta_2}^A + (\mathbf{F}_B^a)^T \mathbf{v}_{\theta_2}^B \\ Q_{\theta_2} &= [0 \quad 0 \quad m_1 g] \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + [0 \quad 0 \quad m_2 g] \begin{bmatrix} 0 \\ l_2 \cos \theta_2 \\ l_2 \sin \theta_2 \end{bmatrix} \\ Q_{\theta_2} &= -m_2 g l_2 \sin \theta_2 \end{aligned} \quad (11)$$

Lực quán tính suy rộng ứng với tọa độ suy rộng thứ nhất θ_1 là

$$\begin{aligned}
 Q_{\theta_1}^* &= (\mathbf{v}_{\theta_1}^A)^T \mathbf{F}_A^* + (\mathbf{v}_{\theta_1}^B)^T \mathbf{F}_B^* \\
 Q_{\theta_1}^* &= m_1 \begin{bmatrix} 0 & l_1 \cos \theta_1 & l_1 \sin \theta_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ l_1 \sin \theta_1 \dot{\theta}_1^2 - l_1 \cos \theta_1 \ddot{\theta}_1 \\ -l_1 \cos \theta_1 \dot{\theta}_1^2 - l_1 \sin \theta_1 \ddot{\theta}_1 \end{bmatrix} \\
 &+ m_2 \begin{bmatrix} 0 & l_1 \cos \theta_1 & l_1 \sin \theta_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ l_1 \sin \theta_1 \dot{\theta}_1^2 - l_1 \cos \theta_1 \ddot{\theta}_1 + l_2 \sin \theta_2 \dot{\theta}_2^2 - l_2 \cos \theta_2 \ddot{\theta}_2 \\ -l_1 \cos \theta_1 \dot{\theta}_1^2 - l_1 \sin \theta_1 \ddot{\theta}_1 - l_2 \cos \theta_2 \dot{\theta}_2^2 - l_2 \sin \theta_2 \ddot{\theta}_2 \end{bmatrix} \\
 Q_{\theta_1}^* &= - \left[l_1^2 (m_1 + m_2) \ddot{\theta}_1 + l_1 l_2 m_2 \dot{\theta}_2^2 \sin(\theta_1 - \theta_2) + l_1 l_2 m_2 \ddot{\theta}_2 \cos(\theta_1 - \theta_2) \right] \quad (12)
 \end{aligned}$$

Lực quán tính suy rộng ứng với tọa độ suy rộng thứ hai θ_2 là

$$\begin{aligned}
 Q_{\theta_2}^* &= (\mathbf{v}_{\theta_2}^A)^T \mathbf{F}_A^* + (\mathbf{v}_{\theta_2}^B)^T \mathbf{F}_B^* \\
 Q_{\theta_2}^* &= m_1 \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ l_1 \sin \theta_1 \dot{\theta}_1^2 - l_1 \cos \theta_1 \ddot{\theta}_1 \\ -l_1 \cos \theta_1 \dot{\theta}_1^2 - l_1 \sin \theta_1 \ddot{\theta}_1 \end{bmatrix} \\
 &+ m_2 \begin{bmatrix} 0 & l_1 \cos \theta_1 & l_1 \sin \theta_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ l_1 \sin \theta_1 \dot{\theta}_1^2 - l_1 \cos \theta_1 \ddot{\theta}_1 + l_2 \sin \theta_2 \dot{\theta}_2^2 - l_2 \cos \theta_2 \ddot{\theta}_2 \\ -l_1 \cos \theta_1 \dot{\theta}_1^2 - l_1 \sin \theta_1 \ddot{\theta}_1 - l_2 \cos \theta_2 \dot{\theta}_2^2 - l_2 \sin \theta_2 \ddot{\theta}_2 \end{bmatrix} \\
 Q_{\theta_2}^* &= -m_2 l_2 \left[l_1 l_2 \ddot{\theta}_1 \cos(\theta_1 - \theta_2) - l_1 l_2 \dot{\theta}_1^2 \sin(\theta_1 - \theta_2) + l_2^2 \ddot{\theta}_2 \right] \quad (13)
 \end{aligned}$$

Thế các biểu thức trên vào phương trình Kane

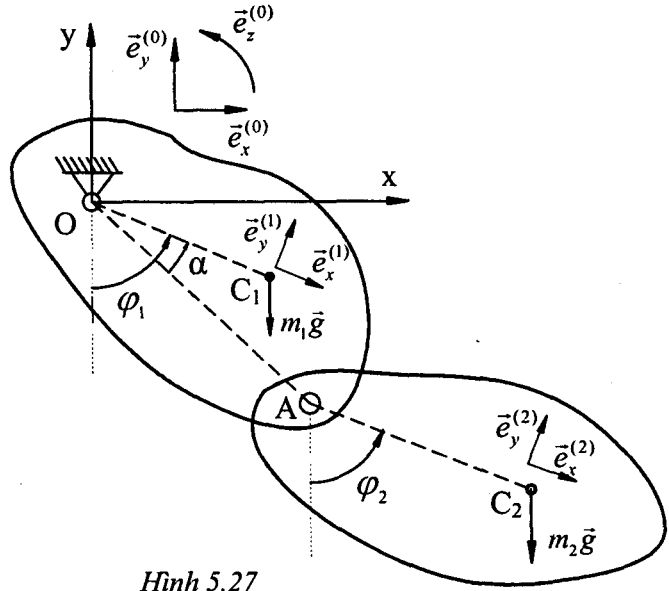
$$Q_i + Q_i^* = 0, \quad i=1,2 \quad (14)$$

ta được hai phương trình vi phân chuyển động của con lắc kép toán học

$$l_1 (m_1 + m_2) \ddot{\theta}_1 + l_2 m_2 \dot{\theta}_2^2 \sin(\theta_1 - \theta_2) + l_2 m_2 \ddot{\theta}_2 \cos(\theta_1 - \theta_2) + (m_1 + m_2) g l_1 \sin \theta_1 = 0 \quad (15)$$

$$l_1 \ddot{\theta}_1 \cos(\theta_1 - \theta_2) - l_1 \dot{\theta}_1^2 \sin(\theta_1 - \theta_2) + l_2 \ddot{\theta}_2 + g \sin \theta_2 = 0 \quad (16)$$

Thí dụ 5.16. Cho hệ con lắc kép vật lý như hình 5.27. Cho biết $OA = l$; $OCI = a_1$; $AC_2 = a_2$, khối lượng các khâu m_1, m_2 , mômen quán tính đối với các trục thẳng đứng đi qua khối tâm là I_1, I_2 . Áp dụng các phương trình Kane thiết lập các phương trình vi phân chuyển động của hệ.



Hình 5.27

Lời giải. Từ hình vẽ 5.27 ta dễ dàng xác định vị trí khối tâm C_1 và vị trí khối tâm C_2

$$\vec{r}^{C_1} = a_1 \vec{e}_x^{(1)} = a_1 (\sin \varphi_1 \vec{e}_x^{(0)} - \cos \varphi_1 \vec{e}_y^{(0)}) \quad (1)$$

$$\vec{r}^{C_2} = \vec{OA} + \vec{AC}_2 = [l \sin(\varphi_1 - \alpha) \vec{e}_x^{(0)} - l \cos(\varphi_1 - \alpha) \vec{e}_y^{(0)}] + [a_2 \sin \varphi_2 \vec{e}_x^{(0)} - a_2 \cos \varphi_2 \vec{e}_y^{(0)}] \quad (2)$$

Từ (1) đạo hàm theo thời gian ở trong hệ qui chiếu cố định ta được vận tốc khối tâm C_1

$$\vec{v}^{C_1} = \frac{d\vec{r}^{C_1}}{dt} = a_1 \cos \varphi_1 \dot{\varphi}_1 \vec{e}_x^{(0)} + a_1 \sin \varphi_1 \dot{\varphi}_1 \vec{e}_y^{(0)} \quad (3)$$

Từ (3) suy ra các vận tốc riêng của khối tâm C_1

$$\vec{v}_{\dot{\varphi}_1}^{C_1} = \frac{\partial \vec{v}^{C_1}}{\partial \dot{\varphi}_1} = a_1 \cos \varphi_1 \vec{e}_x^{(0)} + a_1 \sin \varphi_1 \vec{e}_y^{(0)} \quad (4)$$

$$\vec{v}_{\dot{\varphi}_2}^{C_1} = \frac{\partial \vec{v}^{C_1}}{\partial \dot{\varphi}_2} = 0$$

Từ (4) đạo hàm theo thời gian ở trong hệ qui chiếu cố định ta được gia tốc khối tâm C_1

$$\vec{a}^{C_1} = \frac{d\vec{v}^{C_1}}{dt} = (a_1 \ddot{\varphi}_1 \cos \varphi_1 - a_1 \dot{\varphi}_1^2 \sin \varphi_1) \vec{e}_x^{(0)} + (a_1 \dot{\varphi}_1 \sin \varphi_1 + a_1 \dot{\varphi}_1^2 \cos \varphi_1) \vec{e}_y^{(0)} \quad (5)$$

Vị trí khối tâm C_2 được xác định bởi phương trình (2). Tiến hành tính toán tương tự như trên ta được

$$\vec{v}^{C_2} = \frac{d\vec{r}^{C_2}}{dt} = l\dot{\varphi}_1 \cos(\varphi_1 - \alpha)\vec{e}_x^{(0)} + l\dot{\varphi}_1 \sin(\varphi_1 - \alpha)\vec{e}_y^{(0)} + a_2\dot{\varphi}_2 \cos\varphi_2\vec{e}_x^{(0)} + a_2\dot{\varphi}_2 \sin\varphi_2\vec{e}_y^{(0)} \quad (6)$$

$$\vec{v}_{\dot{\varphi}_1}^{C_2} = \frac{\partial \vec{v}^{C_2}}{\partial \dot{\varphi}_1} = l \cos(\varphi_1 - \alpha)\vec{e}_x^{(0)} + l \sin(\varphi_1 - \alpha)\vec{e}_y^{(0)}; \quad \vec{v}_{\dot{\varphi}_2}^{C_2} = a_2 \cos\varphi_2\vec{e}_x^{(0)} + a_2 \sin\varphi_2\vec{e}_y^{(0)} \quad (7)$$

$$\begin{aligned} \vec{a}^{C_2} = \frac{d\vec{v}^{C_2}}{dt} = [l\ddot{\varphi}_1 \cos(\varphi_1 - \alpha) + a_2\ddot{\varphi}_2 \cos\varphi_2 - l\dot{\varphi}_1^2 \sin(\varphi_1 - \alpha) - a_2\dot{\varphi}_2^2 \sin\varphi_2]\vec{e}_x^{(0)} + \\ + [l\ddot{\varphi}_1 \sin(\varphi_1 - \alpha) + a_2\ddot{\varphi}_2 \sin\varphi_2 + l\dot{\varphi}_1^2 \cos(\varphi_1 - \alpha) + a_2\dot{\varphi}_2^2 \cos\varphi_2]\vec{e}_y^{(0)} \end{aligned} \quad (8)$$

Từ hình 5.27 ta dễ dàng xác định được các vectơ vận tốc góc

$$\vec{\omega}^{B_1} = \dot{\varphi}_1 \vec{e}_z^{(0)}; \quad \vec{\omega}^{B_2} = \dot{\varphi}_2 \vec{e}_z^{(0)} \quad (9)$$

Từ đó suy ra

$$\vec{\omega}_{\dot{\varphi}_1}^{B_1} = \vec{e}_z^{(0)}; \quad \vec{\omega}_{\dot{\varphi}_2}^{B_1} = \vec{0} \quad (10)$$

Để thiết lập các phương trình Kane ta cần phải xác định các lực hoạt động và các ngẫu lực hoạt động. Trong thí dụ này ta có

$$\vec{F}_1^a = -m_1 \vec{g}, \quad \vec{F}_2^a = -m_2 \vec{g}, \quad (11)$$

Công thức xác định các lực hoạt động suy rộng có dạng

$$Q_{\dot{\varphi}_1} = \vec{F}_1^a \cdot \vec{v}_{\dot{\varphi}_1}^{C_1} + \vec{F}_2^a \cdot \vec{v}_{\dot{\varphi}_1}^{C_2}, \quad Q_{\dot{\varphi}_2} = \vec{F}_1^a \cdot \vec{v}_{\dot{\varphi}_2}^{C_1} + \vec{F}_2^a \cdot \vec{v}_{\dot{\varphi}_2}^{C_2} \quad (12)$$

Thế biểu thức (4), (7) và (11) vào biểu thức (12) ta được các lực hoạt động suy rộng ứng với các tọa độ suy rộng là

$$Q_{\dot{\varphi}_1} = -m_1 g a_1 \sin\varphi_1 - m_2 g l \sin(\varphi_1 - \alpha) \quad (13)$$

$$Q_{\dot{\varphi}_2} = -m_2 g a_2 \sin\varphi_2 \quad (14)$$

Lực quán tính suy rộng của hệ vật rắn được xác định bởi công thức

$$Q_i^* = \sum_{k=1}^p \left(\vec{F}_k^* \cdot \vec{v}_{\dot{q}_i}^{C_k} + \vec{M}_k^* \cdot \vec{\omega}_{\dot{q}_i}^{B_k} \right) \quad (15)$$

Trong thí dụ này lực quán tính của các khâu có dạng

$$\vec{F}_1^* = -m_1 \vec{a}^{C_1}, \quad \vec{F}_2^* = -m_2 \vec{a}^{C_2} \quad (16)$$

Thay biểu thức (5) và (8) vào các biểu thức (16) ta được

$$\vec{F}_1^* = (m_1 a_1 \dot{\varphi}_1^2 \sin\varphi_1 - m_1 a_1 \ddot{\varphi}_1 \cos\varphi_1)\vec{e}_x^{(0)} - (m_1 a_1 \ddot{\varphi}_1 \sin\varphi_1 + m_1 a_1 \dot{\varphi}_1^2 \cos\varphi_1)\vec{e}_y^{(0)} \quad (17)$$

$$\begin{aligned} \vec{F}_2^* = m_2 [l\dot{\varphi}_1^2 \sin(\varphi_1 - \alpha) + a_2\dot{\varphi}_2^2 \sin\varphi_2 - l\ddot{\varphi}_1 \cos(\varphi_1 - \alpha) - a_2\ddot{\varphi}_2 \cos\varphi_2]\vec{e}_x^{(0)} - \\ - m_2 [l\ddot{\varphi}_1 \sin(\varphi_1 - \alpha) + l\dot{\varphi}_1^2 \cos(\varphi_1 - \alpha) + a_2\ddot{\varphi}_2 \sin\varphi_2 + a_2\dot{\varphi}_2^2 \cos\varphi_2]\vec{e}_y^{(0)} \end{aligned} \quad (18)$$

Véc tơ gia tốc góc của các khâu có dạng

$$\vec{\alpha}^{B_1} = \ddot{\varphi}_1 \vec{e}_z^{(0)}, \quad \vec{\alpha}^{B_2} = \ddot{\varphi}_2 \vec{e}_z^{(0)} \quad (19)$$

Từ đó suy ra các biểu thức tính ngẫu lực quán tính

$$\vec{M}_1^* = -I_{C_1} \vec{\alpha}^{B_1} = -I_1 \ddot{\varphi}_1 \vec{e}_z^{(0)}, \quad \vec{M}_2^* = -I_{C_2} \vec{\alpha}^{B_2} = -I_2 \ddot{\varphi}_2 \vec{e}_z^{(0)} \quad (20)$$

Thế các biểu thức (17), (18), (20) vào phương trình (15) ta có các biểu thức xác định các lực quán tính suy rộng

$$\begin{aligned} Q_{\varphi_1}^* &= \vec{F}_1^* \cdot \vec{v}_{\varphi_1}^{C_1} + \vec{M}_1^* \cdot \vec{\omega}_{\varphi_1}^{B_1} + \vec{F}_2^* \cdot \vec{v}_{\varphi_1}^{C_2} + \vec{M}_2^* \cdot \vec{\omega}_{\varphi_1}^{B_2} \\ Q_{\varphi_1}^* &= [(m_1 a_1 \dot{\varphi}_1^2 \sin \varphi_1 - m_1 a_1 \ddot{\varphi}_1 \cos \varphi_1) \vec{e}_x^{(0)} - (m_1 a_1 \ddot{\varphi}_1 \sin \varphi_1 + m_1 a_1 \dot{\varphi}_1^2 \cos \varphi_1) \vec{e}_y^{(0)}] [a_1 \cos \varphi_1 \vec{x}_0 + \\ &\quad + a_1 \sin \varphi_1 \vec{e}_y^{(0)}] - I_1 \ddot{\varphi}_1 + [(m_2 l \dot{\varphi}_1^2 \sin(\varphi_1 - \alpha) + m_2 a_2 \dot{\varphi}_2^2 \sin \varphi_2 - m_2 l \ddot{\varphi}_1 \cos(\varphi_1 - \alpha) - \\ &\quad - m_2 a_2 \ddot{\varphi}_2 \cos \varphi_2) \vec{e}_x^{(0)} - (m_2 l \ddot{\varphi}_1 \sin(\varphi_1 - \alpha) + m_2 l \dot{\varphi}_1^2 \cos(\varphi_1 - \alpha) + m_2 a_2 \ddot{\varphi}_2 \sin \varphi_2 + \\ &\quad + m_2 a_2 \cos \varphi_2 \dot{\varphi}_2^2) \vec{e}_y^{(0)}] [l \cos(\varphi_1 - \alpha) \vec{e}_x^{(0)} + l \sin(\varphi_1 - \alpha) \vec{e}_y^{(0)}] \end{aligned}$$

Kết quả cuối cùng là

$$Q_{\varphi_1}^* = -(J_1 + m_1 c_1^2 + m_2 l^2) \ddot{\varphi}_1 - m_2 l a_2 \ddot{\varphi}_2 \cos(\varphi_1 - \alpha - \varphi_2) - m_2 l a_2 \dot{\varphi}_2^2 \sin(\varphi_1 - \alpha - \varphi_2) \quad (21)$$

Tính toán tương tự ta được

$$\begin{aligned} Q_{\varphi_2}^* &= \vec{F}_1^* \cdot \vec{v}_{\varphi_2}^{C_1} + \vec{M}_1^* \cdot \vec{\omega}_{\varphi_2}^{B_1} + \vec{F}_2^* \cdot \vec{v}_{\varphi_2}^{C_2} + \vec{M}_2^* \cdot \vec{\omega}_{\varphi_2}^{B_2} \\ Q_{\varphi_2}^* &= \{m_2 [l \dot{\varphi}_1^2 \sin(\varphi_1 - \alpha) + a_2 \dot{\varphi}_2^2 \sin \varphi_2 - l \ddot{\varphi}_1 \cos(\varphi_1 - \alpha) - a_2 \ddot{\varphi}_2 \cos \varphi_2] \vec{e}_x^{(0)} - \\ &\quad - m_2 [l \ddot{\varphi}_1 \sin(\varphi_1 - \alpha) + l \dot{\varphi}_1^2 \cos(\varphi_1 - \alpha) + a_2 \ddot{\varphi}_2 \sin \varphi_2 + a_2 \dot{\varphi}_2^2 \cos \varphi_2] \vec{e}_y^{(0)}\} \times \\ &\quad \times \{a_2 \cos \varphi_2 \vec{e}_x^{(0)} + a_2 \sin \varphi_2 \vec{e}_y^{(0)}\} - I_2 \ddot{\varphi}_2 \end{aligned}$$

Kết quả cuối cùng ta thu được

$$Q_{\varphi_2}^* = -(I_2 + m_2 a_2^2) \ddot{\varphi}_2 - m_2 l a_2 \ddot{\varphi}_1 \cos(\varphi_1 - \alpha - \varphi_2) + m_2 l a_2 \dot{\varphi}_1^2 \sin(\varphi_1 - \alpha - \varphi_2) \quad (22)$$

Thế các biểu thức tính lực hoạt động suy rộng và lực quán tính suy rộng vào phương trình Kane

$$Q_{\varphi_1} + Q_{\varphi_1}^* = 0, \quad Q_{\varphi_2} + Q_{\varphi_2}^* = 0 \quad (23)$$

ta được hệ phương trình vi phân chuyển động

$$\begin{cases} (I_1 + m_1 a_1^2 + m_2 l^2) \ddot{\varphi}_1 + m_2 l a_2 \ddot{\varphi}_2 \cos(\varphi_1 - \alpha - \varphi_2) + m_2 l a_2 \dot{\varphi}_2^2 \sin(\varphi_1 - \alpha - \varphi_2) + \\ \quad + m_1 g a_1 \sin \varphi_1 + m_2 g l \sin(\varphi_1 - \alpha) = 0 \\ m_2 l a_2 \ddot{\varphi}_1 \cos(\varphi_1 - \alpha - \varphi_2) + (I_2 + m_2 c_2^2) \ddot{\varphi}_2 - m_2 l a_2 \sin(\varphi_1 - \alpha - \varphi_2) \dot{\varphi}_1^2 + m_2 g a_2 \sin \varphi_2 = 0 \end{cases} \quad (24)$$

§6 PHƯƠNG TRÌNH LAGRANGE DẠNG NHÂN TỬ CỦA HỆ NHIỀU VẬT

6.1 Thiết lập phương trình Lagrange dạng nhân tử

a) *Thiết lập phương trình Lagrange dạng nhân tử cho hệ n chất điểm*

Xét hệ n chất điểm được xác định bởi m tọa độ suy rộng dư q_1, q_2, \dots, q_m . Giả sử hệ chịu r liên kết hólônôm

$$f_i(q_1, q_2, \dots, q_m, t) = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, r) \quad (5.1)$$

và s liên kết phi hólônôm tuyến tính

$$\sum_{k=1}^m a_{jk} \dot{q}_k + a_{j0} = 0 \quad (j = 1, 2, \dots, s) \quad (5.2)$$

Từ (5.1) và (5.2) ta suy ra các phương trình ràng buộc các biến phân δq_k (các di chuyển ảo)

$$\sum_{k=1}^m \frac{\partial f_i}{\partial q_k} \delta q_k = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, r) \quad (5.3)$$

$$\sum_{k=1}^m a_{jk} \delta q_k = 0 \quad (j = 1, 2, \dots, s) \quad (5.4)$$

Xuất phát từ nguyên lý d'Alembert – Lagrange đối với hệ n chất điểm

$$\sum_{j=1}^n (\bar{F}_j^a - m_j \bar{a}_j) \cdot \delta \bar{r}_j = 0 \quad (5.5)$$

và thực hiện các biến đổi tương tự như khi thiết lập phương trình Lagrange loại hai ta được

$$\sum_{k=1}^m \left[\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_k} - Q_k \right] \delta q_k = 0 \quad (5.6)$$

Ở đây các biến phân δq_k không độc lập với nhau. Chúng liên hệ với nhau bởi các phương trình (5.3) và (5.4).

Nếu ta đưa vào các ký hiệu

$$b_k = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_k} - Q_k \quad (5.7)$$

$$\mathbf{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}, \quad \mathbf{s} = \begin{bmatrix} \delta q_1 \\ \vdots \\ \delta q_m \end{bmatrix} \quad (5.8)$$

thì biểu thức (5.6) có thể được viết lại dưới dạng

$$\mathbf{s}^T \mathbf{b} = 0 \tag{5.9}$$

Bây giờ ta đưa thêm vào ký hiệu

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial q_1} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial q_m} \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial f_r}{\partial q_1} & \dots & \frac{\partial f_r}{\partial q_m} \\ a_{11} & \dots & a_{1m} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{s1} & \dots & a_{sm} \end{bmatrix} \tag{5.10}$$

Với ký hiệu trên hai hệ phương trình (5.3) và (5.4) có thể biểu diễn dưới dạng ma trận như sau

$$\mathbf{A} \mathbf{s} = 0 \tag{5.11}$$

Theo định lý nhân tử Lagrange, từ (5.9) và (5.11) ta có hệ thức

$$\mathbf{b} + \mathbf{A}^T \boldsymbol{\lambda} = 0 \tag{5.12}$$

Trong đó

$$\boldsymbol{\lambda} = [\lambda_1, \dots, \lambda_r, \mu_1, \dots, \mu_s]^T \tag{5.13}$$

Từ biểu thức (5.12) ta suy ra

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_k} = Q_k - \sum_{i=1}^r \lambda_i \frac{\partial f_i}{\partial q_k} - \sum_{j=1}^s \mu_j a_{jk} \quad (k=1,2,\dots,m) \tag{5.14}$$

Hệ các phương trình (5.14) được gọi là các phương trình Lagrange dạng nhân tử cho hệ phi hólônôm với các liên kết phi hólônôm tuyến tính.

Cùng với m phương trình vi phân (5.14) ta còn có r phương trình liên kết hólônôm (5.1) và s phương trình liên kết phi hólônôm tuyến tính (5.2). Như thế ta có hệ $m+r+s$ phương trình vi phân đại số. Chúng được sử dụng để xác định m tọa độ suy rộng dư, r nhân tử λ_i và s nhân tử μ_j .

Chú ý. Trong trường hợp hệ chịu các liên kết hólônôm các phương trình Lagrange dạng nhân tử có dạng

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_k} = Q_k - \sum_{i=1}^r \lambda_i \frac{\partial f_i}{\partial q_k} \quad (k=1,2,\dots,m) \tag{5.15}$$

$$f_i(q_1, q_2, \dots, q_m, t) = 0 \quad (i=1,2,\dots,r) \tag{5.16}$$

b) *Thiết lập phương trình Lagrange dạng nhân tử cho hệ p vật rắn*

Xét hệ p vật rắn. Vị trí của cơ hệ được xác định bởi m tọa độ suy rộng dư: q_1, q_2, \dots, q_m . Giả sử hệ chịu r liên kết hólônôm

$$f_i(q_1, q_2, \dots, q_m, t) = 0, \quad (i=1, \dots, r) \quad (5.17)$$

và s liên kết phi hólônôm tuyến tính

$$\sum_{k=1}^m a_{jk} \dot{q}_k + a_{j0} = 0, \quad (j=1, \dots, s) \quad (5.18)$$

Nguyên lý d'Alembert - Lagrange đối với hệ p vật rắn có dạng

$$\int_{(S)} (d\vec{F}^a - dm\ddot{\vec{r}}) \cdot \delta\vec{r} = 0 \quad (5.19)$$

Từ phần động học, công thức (4.1), ta có

$$\delta\vec{r} = \sum_{i=1}^m \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_i} \delta q_i \quad (5.20)$$

Thế (5.20) vào biểu thức (5.19) ta được hệ thức

$$\sum_{i=1}^m \left(\int_{(S)} d\vec{F}^a \cdot \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_i} \right) \delta q_i - \sum_{i=1}^m \left(\int_{(S)} dm \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} \cdot \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_i} \right) \delta q_i = 0 \quad (5.21)$$

Theo định nghĩa lực suy rộng ta có

$$Q_i = \int_{(S)} d\vec{F}^a \cdot \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_i} \quad (5.22)$$

Bây giờ ta biến đổi biểu thức

$$K_i = \int_{(S)} dm \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} \cdot \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_i} = \frac{d}{dt} \int_{(S)} dm \dot{\vec{r}} \cdot \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_i} - \int_{(S)} dm \dot{\vec{r}} \cdot \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \vec{r}}{\partial q_i} \right)$$

Chú ý đến các công thức (4.2) và (4.3), biểu thức trên có dạng

$$K_i = \frac{d}{dt} \int_{(S)} dm \vec{v} \cdot \frac{\partial \vec{v}}{\partial \dot{q}_i} - \int_{(S)} dm \vec{v} \cdot \frac{\partial \vec{v}}{\partial q_i} \quad (5.23)$$

Các đạo hàm riêng theo \dot{q}_i và q_i của biểu thức động năng $T = \frac{1}{2} \int_{(S)} dm \vec{v}^2$ có dạng

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} = \int_{(S)} dm \vec{v} \cdot \frac{\partial \vec{v}}{\partial \dot{q}_i}, \quad \frac{\partial T}{\partial q_i} = \int_{(S)} dm \vec{v} \cdot \frac{\partial \vec{v}}{\partial q_i} \quad (5.24)$$

Từ các công thức (5.23) và (5.24) ta suy ra

$$K_i = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} \quad (5.25)$$

Thế (5.22) và (5.25) vào phương trình (5.21) ta được

$$\sum_{i=1}^m \left[\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} - Q_i \right] \delta q_i = 0 \quad (5.26)$$

Trong đó các biến phân $\delta q_i (i=1, \dots, f)$ không độc lập với nhau, chúng liên hệ với nhau bởi các phương trình liên kết (5.17) và (5.18).

Chứng minh tiếp tương tự như phần hệ n chất điểm, ta nhận được các phương trình Lagrange dạng nhân tử của hệ p vật rắn phi holoônôm

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_k} = Q_k - \sum_{i=1}^r \lambda_i \frac{\partial f_i}{\partial q_k} - \sum_{j=1}^s \mu_j a_{jk}, \quad (k=1, 2, \dots, m) \quad (5.27)$$

Cùng với m phương trình vi phân (5.27) ta còn có r phương trình liên kết holoônôm (5.17) và s phương trình liên kết phi holoônôm tuyến tính (5.18). Như thế ta có hệ $m+r+s$ phương trình vi phân đại số. Chúng được sử dụng để xác định m tọa độ suy rộng dư, r nhân tử λ_i và s nhân tử μ_j .

c) *Phương trình Lagrange dạng nhân tử cho hệ p vật rắn chịu các liên kết holoônôm*

Trong trường hợp hệ chịu các liên kết holoônôm, từ (5.27) ta suy ra các phương trình Lagrange dạng nhân tử có dạng

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_k} = Q_k - \sum_{i=1}^r \lambda_i \frac{\partial f_i}{\partial q_k}, \quad (k=1, 2, \dots, m) \quad (5.28)$$

Xét cơ hệ gồm p vật rắn, chịu r liên kết holoônôm, giữ và dừng. Lập luận tương tự như phần phương trình Lagrange loại hai ta có thể biến đổi phương trình (5.28) về dạng

$$\sum_{k=1}^m m_{jk} \ddot{q}_k + \sum_{k=1}^m \sum_{l=1}^m \left(m_{jk,l} - \frac{1}{2} m_{kl,j} \right) \dot{q}_k \dot{q}_l = - \frac{\partial \Pi}{\partial q_j} + Q_j^{np} - \sum_{k=1}^r \lambda_k \frac{\partial f_k}{\partial q_j} \quad (j=1, \dots, m) \quad (5.29)$$

Cùng với các phương trình vi phân (5.29) ta còn có các phương trình đại số

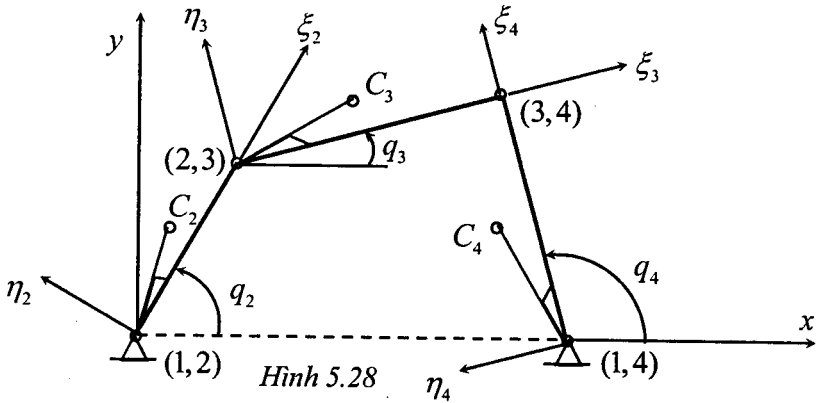
$$f_i(q_1, q_2, \dots, q_m, t) = 0, \quad (i=1, \dots, r) \quad (5.30)$$

Các phương trình (5.29) và (5.30) tạo thành một hệ $m+r$ phương trình vi phân đại số. Chúng được sử dụng để xác định m tọa độ suy rộng dư, và r nhân tử Lagrange λ_i .

6.2 Các thí dụ áp dụng

Thí dụ 5.17. Trên hình 5.28 là mô hình cơ cấu bốn khâu phẳng. Cho biết khối lượng các khâu là $m_i (i=1, \dots, 4)$, mô men quán tính khối đối với khối tâm C_i là $I_i (i=1, \dots, 4)$. Cho biết chiều dài của khâu động là l_2, l_3, l_4 . Tọa độ các khối tâm trong các hệ qui chiếu động gắn liền với các khâu là $C_2(\xi_{C_2}, 0), C_3(\xi_{C_3}, \eta_{C_3})$,

$C_4(\xi_{C_4}, \eta_{C_4})$. Trên khâu dẫn 2 tác dụng ngẫu lực phát động τ_2 . Áp dụng phương trình Lagrange dạng nhân tử thiết lập phương trình vi phân chuyển động của cơ hệ.



Hình 5.28

Lời giải. Chọn các tọa độ suy rộng dư là q_2, q_3, q_4 . Trong đó q_2 là tọa độ suy rộng độc lập, còn q_3, q_4 là các tọa độ suy rộng phụ thuộc. Từ hình vẽ 5.28 ta dễ dàng xác định được vị trí khối tâm các khâu. Vị trí khâu 2 được xác định bởi vị trí khối tâm của nó và góc quay φ_2

$$x_{C_2} = \xi_{C_2} \cos q_2, \quad y_{C_2} = \xi_{C_2} \sin q_2, \quad \varphi_2 = q_2. \quad (1)$$

Vị trí khâu 3

$$\begin{aligned} x_{C_3} &= l_2 \cos q_2 + \xi_{C_3} \cos q_3 - \eta_{C_3} \sin q_3, \\ y_{C_3} &= l_2 \sin q_2 + \xi_{C_3} \sin q_3 + \eta_{C_3} \cos q_3, \\ \varphi_3 &= q_3. \end{aligned} \quad (2)$$

Vị trí khâu 4

$$\begin{aligned} x_{C_4} &= x_{14} + \xi_{C_4} \cos q_4 - \eta_{C_4} \sin q_4, \\ y_{C_4} &= \xi_{C_4} \sin q_4 + \eta_{C_4} \cos q_4, \\ \varphi_4 &= q_4. \end{aligned} \quad (3)$$

Đạo hàm các biểu thức (1), (2), và (3) ta được

$$\dot{x}_{C_2} = -\xi_{C_2} \dot{q}_2 \sin q_2, \quad \dot{y}_{C_2} = \xi_{C_2} \dot{q}_2 \cos q_2, \quad \dot{\varphi}_2 = \dot{q}_2 \quad (4)$$

$$\begin{aligned} \dot{x}_{C_3} &= -l_2 \dot{q}_2 \sin q_2 - \xi_{C_3} \dot{q}_3 \sin q_3 - \eta_{C_3} \dot{q}_3 \cos q_3, \\ \dot{y}_{C_3} &= l_2 \dot{q}_2 \cos q_2 + \xi_{C_3} \dot{q}_3 \cos q_3 - \eta_{C_3} \dot{q}_3 \sin q_3 \end{aligned} \quad (5)$$

$$\dot{\varphi}_3 = \dot{q}_3$$

$$\begin{aligned} \dot{x}_{C_4} &= -\xi_{C_4} \dot{q}_4 \sin q_4 - \eta_{C_4} \dot{q}_4 \cos q_4, \\ \dot{y}_{C_4} &= \xi_{C_4} \dot{q}_4 \cos q_4 - \eta_{C_4} \dot{q}_4 \sin q_4 \end{aligned} \quad (6)$$

$$\dot{\varphi}_4 = \dot{q}_4$$

Biểu thức động năng của cơ cấu bốn khâu bản lề có dạng

$$T = \sum_{k=2}^4 \left[m_k (\dot{x}_{C_k}^2 + \dot{y}_{C_k}^2) + I_k \dot{\phi}_k^2 \right] \quad (7)$$

Thế (4), (5) và (6) vào (7) ta được biểu thức động năng của cơ cấu. Thế năng của hệ các trọng lực có dạng

$$\begin{aligned} \Pi &= g(m_2 y_{C_2} + m_3 y_{C_3} + m_4 y_{C_4}) \\ &= (m_2 \xi_{C_2} + m_3 l_2) g \sin q_2 + m_3 g (\sin q_3 + \eta_{C_3} \cos q_3) + m_4 \xi_{C_4} g \sin q_4 + m_4 \eta_{C_4} g \cos q_4 \end{aligned} \quad (8)$$

Các phương trình liên kết bổ sung có dạng

$$\begin{aligned} f_1 &= l_2 \cos q_2 + l_3 \cos q_3 - l_4 \cos q_4 - x_{14} = 0 \\ f_2 &= l_2 \sin q_2 + l_3 \sin q_3 - l_4 \sin q_4 = 0 \end{aligned} \quad (9)$$

Thế các biểu thức động năng, thế năng, liên kết bổ sung vào phương trình Lagrange dạng nhân tử

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_k} = - \frac{\partial \Pi}{\partial q_k} + \tau_k - \sum_{i=1}^2 \lambda_i \frac{\partial f_i}{\partial q_k} \quad (10)$$

ta nhận được hệ phương trình vi phân mô tả chuyển động của cơ cấu 4 khâu

$$\begin{aligned} (I_2 + m_2 \xi_{C_2}^2 + m_3 l_2^2) \ddot{q}_2 + m_3 l_2 \left[\xi_{C_3} \cos(q_2 - q_3) + \eta_{C_3} \sin(q_2 - q_3) \right] \ddot{q}_3 \\ + m_3 l_2 \left[-\xi_{C_3} \sin(q_2 - q_3) + \eta_{C_3} \cos(q_2 - q_3) \right] \dot{q}_3^2 \\ = \tau_2 - (m_2 \xi_{C_2} + m_3 l_2) g \cos q_2 - \lambda_1 l_2 \sin q_2 + \lambda_2 l_2 \cos q_2 \end{aligned} \quad (11)$$

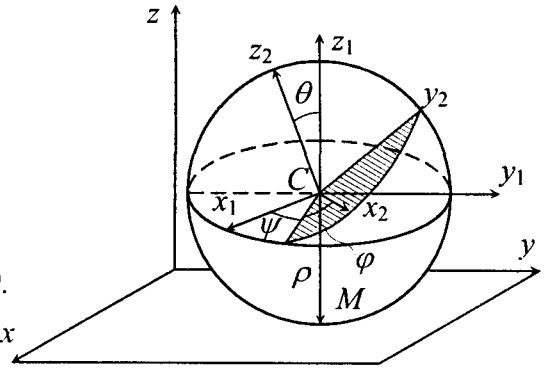
$$\begin{aligned} m_3 l_2 \left[\xi_{C_3} \cos(q_2 - q_3) + \eta_{C_3} \sin(q_2 - q_3) \right] \ddot{q}_2 + \left[I_3 + m_3 (\xi_{C_3}^2 + \eta_{C_3}^2) \right] \ddot{q}_3 \\ + m_3 l_2 \left[\xi_{C_3} \sin(q_2 - q_3) - \eta_{C_3} \cos(q_2 - q_3) \right] \dot{q}_2^2 \\ = -m_3 g \left(\xi_{C_3} \cos q_3 - \eta_{C_3} \sin q_3 \right) - \lambda_1 l_3 \sin q_3 + \lambda_2 l_3 \cos q_3 \end{aligned} \quad (12)$$

$$\left[I_4 + m_4 (\xi_{C_4}^2 + \eta_{C_4}^2) \right] \ddot{q}_4 = -m_4 g \left(\xi_{C_4} \cos q_4 - \eta_{C_4} \sin q_4 \right) + \lambda_1 l_4 \cos q_4 - \lambda_2 l_4 \sin q_4 \quad (13)$$

Hệ ba phương trình vi phân (11), (12), (13) và hai phương trình đại số phi tuyến (9) tạo thành hệ 5 phương trình vi phân - đại số chứa 5 ẩn là: $q_2, q_3, q_4, \lambda_1, \lambda_2$. Như thế, với việc đưa vào các toạ độ suy rộng dư q_2, q_3, q_4 , ta có thể thiết lập được hệ phương trình vi phân chuyển động của cơ cấu bốn khâu dưới dạng giải tích. Việc giải hệ phương trình vi phân - đại số này sẽ được đề cập đến trong chương sáu. Bạn đọc nào quan tâm đến việc thiết lập phương trình vi phân chuyển động của các hệ nhiều vật phẳng có cấu trúc mạch vòng có thể đọc tài liệu tham khảo Nguyễn Văn Khang (1973) và một vài luận văn cao học ở Trường Đại học Bách khoa Hà Nội.

Thí dụ 5.18. Một quả cầu đồng chất bán kính a , khối lượng m lăn không trượt trên mặt phẳng nhám nằm ngang. Áp dụng phương trình Lagrange dạng nhân tử, thiết lập phương trình vi phân chuyển động của quả cầu.

Lời giải. Chọn tọa độ suy rộng là $q_1 = x_C, q_2 = y_C, q_3 = \varphi, q_4 = \psi, q_5 = \theta$. Trong đó x_C, y_C là tọa độ khối tâm C của quả cầu, còn φ, ψ, θ là ba góc Euler.



Hình 5.29

Gọi M là điểm tiếp xúc giữa quả cầu và mặt phẳng xy . Điều kiện lăn không trượt là

$$\vec{v}_M = \vec{v}_C + \vec{\omega} \times \vec{u} = 0 \quad (1)$$

Trong đó $\vec{\omega}$ là vận tốc góc của quả cầu, $\vec{u} = \overline{CM}$. Từ (1) ta suy ra

$$\dot{x}_C - a\omega_y = 0, \quad \dot{y}_C + a\omega_x = 0 \quad (2)$$

Theo phương trình động học Euler ta có

$$\omega_x = \dot{\varphi} \sin \theta \sin \psi + \dot{\theta} \cos \psi \quad (3)$$

$$\omega_y = -\dot{\varphi} \sin \theta \cos \psi + \dot{\theta} \sin \psi \quad (4)$$

Thế (3) vào (2) ta nhận được các phương trình liên kết phi hólônôm

$$\dot{x}_C + a\dot{\varphi} \sin \theta \cos \psi - a\dot{\theta} \sin \psi = 0 \quad (5)$$

$$\dot{y}_C + a\dot{\varphi} \sin \theta \sin \psi + a\dot{\theta} \cos \psi = 0 \quad (6)$$

hay

$$\dot{q}_1 + a\dot{q}_3 \sin q_5 \cos q_4 - a\dot{q}_5 \sin q_4 = 0 \quad (7)$$

$$\dot{q}_2 + a\dot{q}_3 \sin q_5 \sin q_4 + a\dot{q}_5 \cos q_4 = 0 \quad (8)$$

So sánh với công thức (5.2) ta có

$$a_{11} = 1, a_{12} = 0, a_{13} = a \sin q_5 \cos q_4 = a \sin \theta \cos \psi,$$

$$a_{14} = 0, a_{15} = -a \sin q_4 = -a \sin \psi, a_{21} = 0, a_{22} = 1,$$

$$a_{23} = a \sin q_5 \sin q_4 = a \sin \theta \sin \psi, a_{24} = 0, a_{25} = a \cos q_4 = a \cos \psi$$

Biểu thức động năng của quả cầu có dạng

$$T = \frac{1}{2} m (\dot{x}_C^2 + \dot{y}_C^2) + \frac{1}{2} (I_x \omega_x^2 + I_y \omega_y^2 + I_z \omega_z^2)$$

Do giả thiết quả cầu đồng chất nên $I_x = I_y = I_z = I$. Do đó

$$T = \frac{1}{2} m(\dot{x}_C^2 + \dot{y}_C^2) + \frac{1}{2} I(\omega_x^2 + \omega_y^2 + \omega_z^2) \quad (7)$$

Từ phần động học vật rắn ta có

$$\begin{aligned} \omega_x &= \dot{\phi} \sin \theta \sin \psi + \dot{\theta} \cos \psi \\ \omega_y &= -\dot{\phi} \sin \theta \cos \psi + \dot{\theta} \sin \psi \\ \omega_z &= \dot{\psi} + \dot{\phi} \cos \theta \end{aligned} \quad (8)$$

Thế (8) vào (7) ta được

$$T = \frac{1}{2} m(\dot{x}_C^2 + \dot{y}_C^2) + \frac{1}{2} I(\dot{\phi}^2 + \dot{\theta}^2 + \dot{\psi}^2 + 2\dot{\phi}\dot{\psi} \cos \theta) \quad (9)$$

Ta tính các đạo hàm riêng

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_C} = m\dot{x}_C, \quad \frac{\partial T}{\partial x_C} = 0, \quad \frac{\partial T}{\partial \dot{y}_C} = m\dot{y}_C, \quad \frac{\partial T}{\partial y_C} = 0,$$

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{\phi}} = I(\dot{\phi} + \dot{\psi} \cos \theta), \quad \frac{\partial T}{\partial \phi} = 0,$$

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{\psi}} = I(\dot{\psi} + \dot{\phi} \cos \theta), \quad \frac{\partial T}{\partial \psi} = 0,$$

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}} = I\dot{\theta}, \quad \frac{\partial T}{\partial \theta} = -I\dot{\phi}\dot{\psi} \sin \theta$$

Thế các biểu thức trên vào phương trình Lagrange dạng nhân tử

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_k} = Q_k - \sum_{j=1}^s \mu_j a_{jk}$$

ta nhận được các phương trình vi phân chuyển động của quả cầu trên mặt phẳng ngang

$$\begin{aligned} m\ddot{x}_C &= \mu_1; & m\ddot{y}_C &= \mu_2 \\ I(\ddot{\phi} + \ddot{\psi} \cos \theta - \dot{\psi}\dot{\theta} \sin \theta) &= -\mu_1 a \sin \theta \cos \psi - \mu_2 a \sin \theta \sin \psi \\ I(\ddot{\psi} + \ddot{\phi} \cos \theta - \dot{\phi}\dot{\theta} \sin \theta) &= 0 \\ I(\ddot{\theta} + \dot{\phi}\dot{\psi} \sin \theta) &= \mu_1 a \sin \psi - \mu_2 a \cos \psi \end{aligned} \quad (10)$$

Cùng với 5 phương trình vi phân (10), ta còn có hai phương trình liên kết phi hânôm (4). Như vậy ta có hệ 7 phương trình vi phân của 7 ẩn là $x_C, y_C, \phi, \psi, \theta, \mu_1, \mu_2$. Việc giải hệ phương trình này sẽ được bàn đến trong chương sáu.

§7 CÁC PHƯƠNG TRÌNH GIBBS-APPEL CỦA HỆ NHIỀU VẬT

7.1 Sơ lược về động học hệ nhiều vật phi hêlônôm

a) Các tọa độ suy rộng tối thiểu và các vận tốc suy rộng tối thiểu

Xét hệ p vật rắn chịu r liên kết hêlônôm và s liên kết phi hêlônôm tuyến tính. Gọi q_1, q_2, \dots, q_m là các tọa độ suy rộng tối thiểu (các tọa độ suy rộng độc lập tối thiểu đủ để xác định vị trí của hệ vật rắn). Các phương trình liên kết hêlônôm có dạng

$$f_\alpha(q_1, q_2, \dots, q_m, t) = 0, \quad (\alpha = 1, \dots, r) \quad (7.1)$$

Các phương trình liên kết phi hêlônôm tuyến tính

$$\sum_{i=1}^m a_{\beta i} \dot{q}_i + a_\beta = 0, \quad (\beta = 1, \dots, s) \quad (7.2)$$

Để tìm các hạn chế do các liên kết phi hêlônôm đặt lên các di chuyển ảo $\delta q_i (i = 1, \dots, m)$ ta thay \dot{q}_i trong (7.2) bởi δq_i và bỏ qua a_β . Từ (7.2) ta nhận được các phương trình ràng buộc các biến phân

$$\sum_{i=1}^m a_{\beta i} \delta q_i = 0, \quad (\beta = 1, \dots, s) \quad (7.3)$$

Như thế đối với hệ phi hêlônôm, m tọa độ suy rộng tối thiểu q_1, q_2, \dots, q_m có thể lấy các giá trị tùy ý, nhưng m vận tốc của chúng $\dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots, \dot{q}_m$ lại không thể lấy các giá trị tùy ý được mà chúng phụ thuộc lẫn nhau bởi s phương trình liên kết phi hêlônôm (7.2). Ta phân m vận tốc suy rộng $\dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots, \dot{q}_m$ thành hai nhóm (có thể ký hiệu lại): f vận tốc suy rộng độc lập $\dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots, \dot{q}_f$ ($f = m - s$) và s vận tốc suy rộng phụ thuộc $\dot{q}_{f+1}, \dots, \dot{q}_m$. Trong đó f vận tốc suy rộng độc lập có thể lấy các giá trị tùy ý, còn s vận tốc suy rộng phụ thuộc được xác định nhờ các phương trình liên kết (7.2). Tương tự như thế, do s phương trình ràng buộc (7.3), trong số m di chuyển ảo $\delta q_i (i = 1, \dots, m)$ chỉ có f di chuyển ảo độc lập tuyến tính. Số bậc tự do của hệ phi hêlônôm nhỏ hơn số tọa độ suy rộng tối thiểu của hệ.

Tóm lại, trong hệ nhiều vật hêlônôm số tọa độ suy rộng tối thiểu bằng số bậc tự do của hệ, còn trong hệ phi hêlônôm số bậc tự do của hệ nhỏ hơn số tọa độ suy rộng tối thiểu.

b) Khái niệm tựa tọa độ và khái niệm tựa vận tốc

Ta đưa vào khái niệm tựa vận tốc, ký hiệu là $\tilde{\pi}_1, \dots, \tilde{\pi}_f$ ($f = m - s$), xác định bởi công thức sau

$$\tilde{\pi}_k = \sum_{i=1}^m b_{ki} \dot{q}_i \quad (k = 1, \dots, f) \quad (7.4)$$

Trong đó b_{ki} là các hàm của các tọa độ suy rộng q_1, q_2, \dots, q_m và thời gian t . Yêu cầu của việc chọn các hệ thức (7.4) là: f phương trình (7.4) cùng với s phương trình (7.2) tạo thành một hệ $m=f+s$ phương trình đại số tuyến tính có m ẩn $\dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots, \dot{q}_m$ có hạng là m . Nói cách khác, từ (7.2) và (7.4) ta phải xác định được các $\dot{q}_i (i=1, \dots, m)$ một cách duy nhất

$$\dot{q}_i = \sum_{j=1}^f h_{ij} \dot{\pi}_j + h_i, \quad (i=1, \dots, m) \quad (7.5)$$

Trong đó h_{ij} và h_i là các hàm của q_1, \dots, q_m và t . Các đại lượng $\dot{\pi}_k (k=1, \dots, f)$ xác định bởi công thức (7.4) được gọi là các tựa vận tốc, còn các đại lượng $\pi_k (k=1, \dots, f)$ được gọi là tựa tọa độ.

Chú ý. Do các phương trình (7.2) là không khả tích nên các phương trình (7.4) cũng không khả tích. Vì vậy không xác định được $\pi_k (k=1, \dots, f)$ là các hàm của q_1, q_2, \dots, q_m và t dưới dạng biểu thức giải tích.

Cùng với công thức (7.4) ta đưa vào khái niệm biến phân đẳng thời của các tựa tọa độ

$$\delta\pi_k = \sum_{i=1}^m b_{ki} \delta q_i, \quad (k=1, \dots, f) \quad (7.6)$$

Các đại lượng $\delta\pi_k (k=1, \dots, f)$ được gọi là các tựa di chuyển ảo. Theo giả thiết $\delta\pi_k (k=1, \dots, f)$ là các đại lượng độc lập tuyến tính, còn $\delta q_i (i=1, \dots, m)$ được xác định bởi các hệ phương trình (7.3) và (7.6). Từ (7.3) và (7.6) ta suy ra

$$\delta q_i = \sum_{k=1}^f h_{ik} \delta\pi_k, \quad (i=1, \dots, m) \quad (7.7)$$

c) Công thức xác định đạo hàm riêng của vectơ gia tốc điểm theo tựa gia tốc

Lấy một điểm p bất kỳ của vật rắn B . Vị trí của điểm P được xác định bởi biểu thức

$$\vec{r}_p = \vec{r} = \vec{r}(q_1, q_2, \dots, q_m, t) \quad (7.8)$$

Đạo hàm biểu thức (7.8) theo t ở trong hệ quy chiếu cố định R_0 ta được

$$\dot{\vec{r}}_p = \vec{v} = \sum_{i=1}^m \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_i} \dot{q}_i + \frac{\partial \vec{r}}{\partial t} \quad (7.9)$$

Thế biểu thức (7.5) vào phương trình (7.9) ta được

$$\dot{\vec{r}}_p = \vec{v} = \sum_{j=1}^f \left(\sum_{i=1}^m \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_i} h_{ij} \right) \dot{\pi}_j + \sum_{i=1}^m \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_i} h_i + \frac{\partial \vec{r}}{\partial t} \quad (7.10)$$

Nếu ta đưa vào các ký hiệu

$$\vec{k}_j = \sum_{i=1}^m \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_i} h_{ij}, \quad \vec{k} = \sum_{i=1}^m \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_i} h_i + \frac{\partial \vec{r}}{\partial t} \quad (7.11)$$

thì biểu thức (7.10) có dạng

$$\dot{\vec{r}} = \vec{v} = \sum_{j=1}^f \vec{k}_j \dot{\pi}_j + \vec{k} \quad (7.12)$$

Từ (7.12) ta suy ra

$$d\vec{r} = \sum_{j=1}^f \vec{k}_j d\pi_j + \vec{k} dt \quad (7.13)$$

Do đó ta có hệ thức

$$\delta \vec{r} = \sum_{j=1}^f \vec{k}_j \delta \pi_j \quad (7.14)$$

Đạo hàm biểu thức (7.12) theo t ở trong hệ quy chiếu cố định R_0 ta được

$$\vec{a} = \ddot{\vec{r}} = \sum_{j=1}^f \vec{k}_j \ddot{\pi}_j + \sum_{j=1}^f \frac{d\vec{k}_j}{dt} \dot{\pi}_j + \frac{d\vec{k}}{dt} \quad (7.15)$$

Trong đó $\ddot{\pi}_j$ là tọa độ gia tốc. Từ (7.15) ta suy ra công thức xác định đạo hàm véctơ gia tốc điểm P theo tọa độ gia tốc

$$\frac{\partial \vec{a}}{\partial \ddot{\pi}_j} = \vec{k}_j \quad (7.16)$$

7.2 Thiết lập các phương trình Gibbs-Appel

a) Thiết lập phương trình Gibbs-Appel cho hệ n chất điểm

Nguyên lý d'Alembert-Lagrange cho hệ n chất điểm có dạng

$$\sum_{i=1}^n \vec{F}_i^a \cdot \delta \vec{r}_i = \sum_{i=1}^n m_i \vec{a}_i \cdot \delta \vec{r}_i \quad (7.17)$$

Thế biểu thức (7.14) vào (7.17) ta được

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n \vec{F}_i^a \cdot \sum_{j=1}^f \vec{k}_{ij} \delta \pi_j &= \sum_{i=1}^n m_i \vec{a}_i \cdot \sum_{j=1}^f \vec{k}_{ij} \delta \pi_j \\ \sum_{j=1}^f \left(\sum_{i=1}^n \vec{F}_i^a \cdot \vec{k}_{ij} \right) \delta \pi_j &= \sum_{j=1}^f \left(\sum_{i=1}^n m_i \vec{a}_i \cdot \vec{k}_{ij} \right) \delta \pi_j \end{aligned} \quad (7.18)$$

Ta đưa vào biểu thức

$$\Pi_j = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i^a \cdot \vec{k}_{ij} = \sum_{l=1}^m \left(\sum_{i=1}^n \vec{F}_i^a \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_l} h_{il} \right) \quad (7.19)$$

và gọi $\Pi_j (j=1, \dots, f)$ là các tựa lực suy rộng ứng với tựa tọa độ π_j . Thế (7.19) vào (7.18) ta được

$$\sum_{j=1}^f \left(\Pi_j - \sum_{i=1}^n m_i \bar{a}_i \cdot \bar{k}_{ij} \right) \delta \pi_j = 0 \quad (7.20)$$

Bây giờ ta đưa vào hàm G xác định bởi công thức

$$G = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n m_i \bar{a}_i^2 \quad (7.21)$$

Hàm G được gọi là hàm Gibbs-Appel (hoặc cũng có người gọi là năng lượng gia tốc). Chú ý đến (7.16) ta có biên đôi

$$\sum_{i=1}^n m_i \bar{a}_i \cdot \bar{k}_{ij} = \sum_{i=1}^n m_i \bar{a}_i \cdot \frac{\partial \bar{a}_i}{\partial \ddot{\pi}_i} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial G}{\partial \ddot{\pi}_i} \quad (7.22)$$

Thế (7.22) vào (7.20) ta được

$$\sum_{j=1}^f \left(\Pi_j - \frac{\partial G}{\partial \ddot{\pi}_i} \right) \delta \pi_j = 0 \quad (7.23)$$

Do các đại lượng $\delta \pi_j (j=1, \dots, f)$ là độc lập tuyến tính nên từ (7.23) ta suy ra

$$\frac{\partial G}{\partial \ddot{\pi}_i} = \Pi_j, \quad (j=1, \dots, f) \quad (7.24)$$

Phương trình (7.24) được gọi là phương trình Gibbs-Appel. Số lượng các phương trình của hệ (7.24) đúng bằng số bậc tự do của hệ. Phương trình (7.24) đã được Gibbs tìm ra năm 1879 đối với hệ hêlônôm và Appel xây dựng năm 1900 đối với hệ phi hêlônôm.

b) Thiết lập phương trình Gibbs-Appel cho hệ p vật rắn

Nguyên lý d'Alembert – Lagrange đối với hệ p vật rắn có dạng

$$\int_{(S)} (d\bar{F}^a - dm\ddot{\bar{r}}) \delta \bar{r} = 0 \quad (7.25)$$

Thế biểu thức (7.14) vào (7.25) ta được

$$\sum_{j=1}^f \left(\int_{(S)} d\bar{F}^a \cdot \bar{k}_j \right) \delta \pi_j - \sum_{j=1}^f \left(\int_{(S)} \bar{a} \cdot \bar{k}_j dm \right) \delta \pi_j = 0 \quad (7.26)$$

Biểu thức

$$\Pi_j = \left(\int_{(S)} d\bar{F}^a \bar{k}_j \right) \quad (7.27)$$

được gọi là tựa lực suy rộng ứng với tựa tọa độ π_j .

Thế (7.27) vào (7.26) ta được

$$\sum_{j=1}^f \left(\Pi_j - \int_{(S)} \bar{a} \cdot \bar{k}_j dm \right) \delta \pi_j = 0 \quad (7.28)$$

Biểu thức

$$G = \frac{1}{2} \int_{(S)} \bar{a}^2 dm \quad (7.29)$$

được gọi là hàm Gibbs-Appel. Đạo hàm riêng hàm Gibbs-Appel theo tọa gia tốc $\ddot{\pi}_j$ và chú ý đến quan hệ (7.16) ta có

$$\frac{\partial G}{\partial \ddot{\pi}_j} = \int_{(S)} \bar{a} \cdot \frac{\partial \bar{a}}{\partial \ddot{\pi}_j} dm = \int_{(S)} \bar{a} \bar{k}_j dm \quad (7.30)$$

Thế (7.30) vào phương trình (7.28) ta có

$$\sum_{j=1}^f \left(\Pi_j - \frac{\partial G}{\partial \ddot{\pi}_j} \right) \delta \pi_j = 0 \quad (7.31)$$

do $\delta \pi_j$ ($j=1, \dots, f$) là các đại lượng độc lập tuyến tính, từ (7.31) ta suy ra phương trình Gibbs-Appel cho hệ p vật rắn

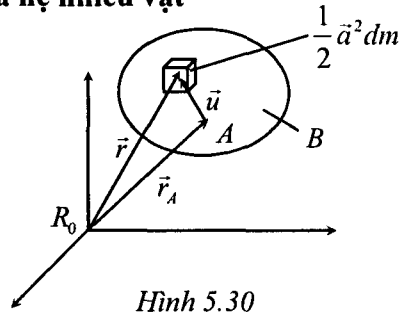
$$\frac{\partial G}{\partial \ddot{\pi}_j} = \Pi_j \quad (j=1, \dots, f) \quad (7.32)$$

7.3. Biểu thức tính hàm Gibbs-Appel của hệ nhiều vật

a) Trường hợp tổng quát

Trong đoạn này ta thiết lập biểu thức tính hàm Gibbs-Appel cho một vật rắn và hệ nhiều vật rắn. Xét vật rắn B chuyển động trong hệ quy chiếu cố định R_0 . Lấy A là một điểm bất kỳ thuộc vật rắn B. Từ hình vẽ 5.30 ta có

$$\vec{r} = \vec{r}_A + \vec{u} \quad (7.33)$$



Đạo hàm biểu thức (7.33) theo t ở trong hệ quy chiếu R_0 ta được

$$\vec{v} = \vec{v}_A + \vec{\omega} \times \vec{u} \quad (7.34)$$

$$\vec{a} = \vec{a}_A + \vec{\alpha} \times \vec{u} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{u}) \quad (7.35)$$

Hàm Gibbs-Appel của vật rắn B theo định nghĩa có dạng

$$\begin{aligned}
G &= \frac{1}{2} \int_B \bar{a}^2 dm = \frac{1}{2} \int_B [\bar{a}_A + \bar{\alpha} \times \bar{u} + \bar{\omega} \times (\bar{\omega} \times \bar{u})]^2 dm \\
&= \frac{1}{2} \int_B \left\{ \bar{a}_A^2 + (\bar{\alpha} \times \bar{u})^2 + [\bar{\omega} \times (\bar{\omega} \times \bar{u})]^2 + 2\bar{a}_A \cdot (\bar{\alpha} \times \bar{u}) \right. \\
&\quad \left. + 2\bar{a}_A \cdot [\bar{\omega} \times (\bar{\omega} \times \bar{u})] + 2(\bar{\alpha} \times \bar{u}) \cdot [\bar{\omega} \times (\bar{\omega} \times \bar{u})] \right\} dm
\end{aligned} \tag{7.36}$$

Ta lần lượt tính các số hạng của biểu thức (7.36)

$$\frac{1}{2} \int_B \bar{a}_A^2 dm = \frac{1}{2} m \bar{a}_A^2 \tag{1}$$

$$\frac{1}{2} \int_B (\bar{\alpha} \times \bar{u})^2 dm = \frac{1}{2} \bar{\alpha} \cdot (\vec{I}_A \bar{\alpha}) \tag{2}$$

$$\int_B \bar{a}_A \cdot (\bar{\alpha} \times \bar{u}) dm = \bar{a}_A \cdot (\bar{\alpha} \times \int_B \bar{u} dm) = m \bar{a}_A \cdot (\bar{\alpha} \times \bar{u}_C) \tag{3}$$

$$\int_B \bar{a}_A \cdot [\bar{\omega} \times (\bar{\omega} \times \bar{u})] dm = \bar{a}_A \cdot \left[\bar{\omega} \times \int_B (\bar{\omega} \times \bar{u}) dm \right] = m \bar{a}_A \cdot [\bar{\omega} \times (\bar{\omega} \times \bar{u}_C)] \tag{4}$$

Bây giờ ta đi chứng minh công thức sau

$$\int_B (\bar{\alpha} \times \bar{u}) \cdot [\bar{\omega} \times (\bar{\omega} \times \bar{u})] dm = \bar{\alpha} \cdot \bar{\omega} \times (\vec{I}_A \bar{\omega}) \tag{5}$$

Thật vậy, ta có

$$(\bar{\alpha} \times \bar{u}) \cdot [\bar{\omega} \times (\bar{\omega} \times \bar{u})] = (\bar{\alpha} \times \bar{u}) \cdot [(\bar{\omega} \cdot \bar{u}) \bar{\omega} - (\bar{\omega} \cdot \bar{\omega}) \bar{u}]$$

Chú ý đến các tính chất sau

$$(\bar{\alpha} \times \bar{u}) \cdot \bar{u} = 0, \quad (\bar{\alpha} \times \bar{u}) \cdot \bar{\omega} = (\bar{\omega} \times \bar{\alpha}) \cdot \bar{u}; \quad (\bar{\omega} \times \bar{\alpha}) \cdot \bar{\omega} = 0$$

Biểu thức trên có thể biến đổi thành

$$\begin{aligned}
(\bar{\alpha} \times \bar{u}) \cdot [\bar{\omega} \times (\bar{\omega} \times \bar{u})] &= (\bar{\alpha} \times \bar{u}) \cdot [(\bar{\omega} \cdot \bar{u}) \bar{\omega}] = (\bar{\omega} \times \bar{\alpha}) \cdot [(\bar{\omega} \cdot \bar{u}) \bar{u}] \\
&= (\bar{\alpha} \times \bar{u}) \cdot [(\bar{u} \cdot \bar{u}) \bar{\omega} - (\bar{\omega} \cdot \bar{u}) \bar{\omega}] \\
&= (\bar{\alpha} \times \bar{u}) \cdot [\bar{u} \times (\bar{\omega} \times \bar{u})]
\end{aligned}$$

Vậy ta có

$$\begin{aligned}
\int_B (\bar{\alpha} \times \bar{u}) \cdot [\bar{\omega} \times (\bar{\omega} \times \bar{u})] dm &= (\bar{\alpha} \times \bar{u}) \cdot \int_B [\bar{\omega} \times (\bar{\omega} \times \bar{u})] dm \\
&= (\bar{\alpha} \times \bar{\omega}) \cdot (\vec{I}_A \bar{\omega}) = \bar{\alpha} \cdot \bar{\omega} \times (\vec{I}_A \bar{\omega})
\end{aligned}$$

Chú ý rằng biểu thức

$$\frac{1}{2} \int_B [\bar{\omega} \times (\bar{\omega} \times \bar{u})]^2 dm \quad (6)$$

không phụ thuộc vào gia tốc nên không có vai trò gì khi đạo hàm hàm G theo tọa độ gia tốc.

Trong trường hợp vật rắn phẳng chuyển động trong mặt phẳng của nó, biểu thức (6) có dạng

$$\frac{1}{2} \int_B [\bar{\omega} \times (\bar{\omega} \times \bar{u})]^2 dm = \frac{1}{2} I_A \omega^4 \quad (7)$$

Thật vậy, ta tính

$$\tilde{\omega}(\tilde{\omega}\mathbf{u}) = \begin{bmatrix} 0 & -\omega & 0 \\ \omega & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -\omega & 0 \\ \omega & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_x \\ u_y \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\omega^2 u_y \\ \omega^2 u_x \\ 0 \end{bmatrix}$$

Do đó

$$[\tilde{\omega} \times (\tilde{\omega} \times \bar{u})]^2 = \begin{bmatrix} -\omega^2 u_y & \omega^2 u_x & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\omega^2 u_y \\ \omega^2 u_x \\ 0 \end{bmatrix} = \omega^4 (u_x^2 + u_y^2)$$

Vậy

$$\frac{1}{2} \int_B [\bar{\omega} \times (\bar{\omega} \times \bar{u})]^2 dm = \frac{1}{2} \omega^4 \int_B (u_x^2 + u_y^2) dm = \frac{1}{2} I_A \omega^4$$

Thế các biểu thức (1) – (6) vào (7.36) ta được biểu thức

$$G = \frac{1}{2} m \bar{a}_A^2 + \frac{1}{2} \bar{\alpha}_A \cdot (\vec{I}_A \cdot \bar{\alpha}) + m \bar{a}_A \cdot (\bar{\alpha} \times \bar{u}_C) + m \bar{a}_A \cdot [\bar{\omega} \times (\bar{\omega} \times \bar{u}_C)] + \bar{\alpha}_A \cdot \bar{\omega} \times (\vec{I}_A \cdot \bar{\omega}) + \frac{1}{2} \int_B [\bar{\omega} \times (\bar{\omega} \times \bar{u})]^2 dm \quad (7.37)$$

Khi thiết lập các phương trình Gibbs-Appel ta chỉ quan tâm đến phần hàm này phụ thuộc vào gia tốc, ta ký hiệu là G^- và gọi là hàm Gibbs-Appel theo nghĩa hẹp. Như thế ta có

$$G^- = G - \frac{1}{2} \int_B [\bar{\omega} \times (\bar{\omega} \times \bar{u})]^2 dm$$

Từ (7.37) ta suy ra

$$G^- = \frac{1}{2} m \bar{a}_A^2 + \frac{1}{2} \bar{\alpha}_A \cdot (\vec{I}_A \cdot \bar{\alpha}) + m \bar{a}_A \cdot (\bar{\alpha} \times \bar{u}_C) + m \bar{a}_A \cdot [\bar{\omega} \times (\bar{\omega} \times \bar{u}_C)] + \bar{\alpha}_A \cdot \bar{\omega} \times (\vec{I}_A \cdot \bar{\omega}) \quad (7.38)$$

Nếu ta chọn A là khối tâm C của vật rắn, thì $\vec{u}_c = 0$. Từ (7.38) ta suy ra biểu thức tính hàm Gibbs-Appel theo nghĩa hẹp (bỏ qua phần không phụ thuộc gia tốc)

$$G^- = \frac{1}{2} m \vec{a}_C^2 + \frac{1}{2} \vec{\alpha} \cdot (\vec{I}_C \cdot \vec{\alpha}) + \vec{\alpha} \cdot \vec{\omega} \times (\vec{I}_C \cdot \vec{\omega}) \quad (7.39)$$

Đối với hệ p vật rắn, hàm Gibbs-Appel theo nghĩa hẹp của hệ có dạng

$$G^- = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^p \left[m_k \vec{a}_{C_k}^2 + \vec{\alpha}_k \cdot (\vec{I}_{C_k} \cdot \vec{\alpha}_k) + 2 \vec{\alpha}_k \cdot \vec{\omega}_k \times (\vec{I}_{C_k} \cdot \vec{\omega}_k) \right] \quad (7.40)$$

Trong đó m_k là khối lượng, $\vec{\omega}_k$ là vận tốc góc, $\vec{\alpha}_k$ là gia tốc góc của vật rắn thứ k, \vec{I}_{C_k} là tenxơ quán tính khối của vật rắn B_k đối với khối tâm C_k của nó. Dạng ma trận của hàm Gibbs-Appel theo nghĩa hẹp

$$G^- = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^p [m_k \mathbf{a}_{C_k}^T \mathbf{a}_{C_k} + \boldsymbol{\alpha}_k^T (\mathbf{I}_{C_k} \boldsymbol{\alpha}_k) + 2 \boldsymbol{\alpha}_k^T \vec{\omega}_k (\mathbf{I}_{C_k} \boldsymbol{\omega}_k)] \quad (7.41)$$

Chú ý. Sau này để thuận tiện, đôi khi người ta cũng gọi hàm G^- là hàm Gibbs-Appel.

b) Một số trường hợp đặc biệt

Vật rắn chuyển động quay quanh một điểm cố định O. Ta chọn $A \equiv O$, $\vec{a}_A = \vec{a}_O = 0$. Từ (7.38) ta suy ra

$$G^- = \frac{1}{2} \vec{\alpha} \cdot (\vec{I}_O \cdot \vec{\alpha}) + \vec{\alpha} \cdot \vec{\omega} \times (\vec{I}_O \cdot \vec{\omega}) \quad (7.42)$$

Tám phẳng chuyển động phẳng. Biểu thức (7.39) có thể viết lại dưới dạng ma trận

$$G^- = \frac{1}{2} m \mathbf{a}_C^T \mathbf{a}_C + \frac{1}{2} \boldsymbol{\alpha}^T (\mathbf{I}_C \boldsymbol{\alpha}) + \boldsymbol{\alpha}^T (\vec{\omega} \mathbf{I}_C \boldsymbol{\omega}) \quad (7.43)$$

Từ hình vẽ (5.31) ta có

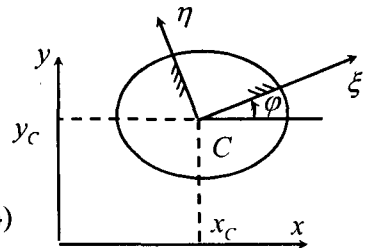
$$\mathbf{a}_C = \begin{bmatrix} \ddot{x}_C \\ \ddot{y}_C \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{\omega} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{\alpha} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \alpha \end{bmatrix}, \quad \mathbf{I}_C = \begin{bmatrix} I_1 & 0 & 0 \\ 0 & I_2 & 0 \\ 0 & 0 & I_3 \end{bmatrix}$$

Từ đó suy ra

$$G^- = \frac{1}{2} m (\ddot{x}_C^2 + \ddot{y}_C^2) + \frac{1}{2} I_3 \alpha^2$$

Nếu chú ý đến biểu thức (7) ta có

$$G = \frac{1}{2} m (\dot{x}_C^2 + \dot{y}_C^2) + \frac{1}{2} I_3 \alpha^2 + \frac{1}{2} I_3 \omega^4 \quad (7.44)$$



Hình 5.31

7.4 Các thí dụ áp dụng

Thí dụ 5.19. Cho hệ con lắc kép vật lý như hình 5.32. Cho biết $OA=l$; $OC_1=a_1$; $OC_2=a_2$; khối lượng các khâu là m_1, m_2 , mômen quán tính khối đối với các trục thẳng đứng đi qua khối tâm là I_1, I_2 . Áp dụng phương trình Gibbs-Appel thiết lập phương trình vi phân chuyển động của hệ.

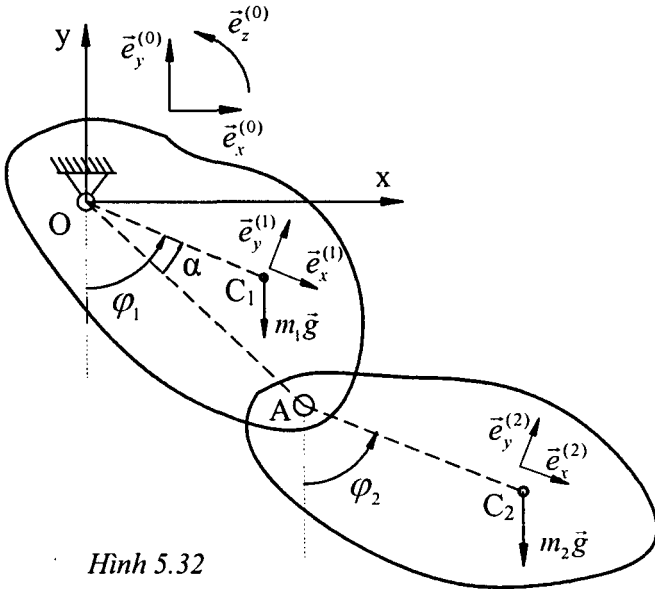
Lời giải. Theo thí dụ 5.16 ta có

$$\vec{a}_{C_1} = (a_1\ddot{\varphi}_1 \cos \varphi_1 - a_1\dot{\varphi}_1^2 \sin \varphi_1) \vec{e}_x^{(0)} + (a_1\ddot{\varphi}_1 \sin \varphi_1 + a_1\dot{\varphi}_1^2 \cos \varphi_1) \vec{e}_y^{(0)} \quad (1)$$

$$\begin{aligned} \vec{a}_{C_2} = & (l\ddot{\varphi}_1 \cos(\varphi_1 - \alpha) + a_2\ddot{\varphi}_2 \cos \varphi_2 - l\dot{\varphi}_1^2 \sin(\varphi_1 - \alpha) - a_2\dot{\varphi}_2^2 \sin \varphi_2) \vec{e}_x^{(0)} \\ & + (l\ddot{\varphi}_1 \sin(\varphi_1 - \alpha) + a_2\ddot{\varphi}_2 \sin \varphi_2 + l\dot{\varphi}_1^2 \cos(\varphi_1 - \alpha) + a_2\dot{\varphi}_2^2 \cos \varphi_2) \vec{e}_y^{(0)} \end{aligned} \quad (2)$$

Hàm Gibbs-Appel theo nghĩa hẹp trong thí dụ này có dạng

$$G^- = \frac{1}{2} m_1 a_{C_1}^2 + \frac{1}{2} I_1 \dot{\varphi}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 a_{C_2}^2 + \frac{1}{2} I_2 \dot{\varphi}_2^2 \quad (3)$$



Thế các biểu thức (1), (2) vào (3) ta được

$$\begin{aligned} G^- = & \frac{1}{2} m_1 \left[(a_1\ddot{\varphi}_1 \cos \varphi_1 - a_1\dot{\varphi}_1^2 \sin \varphi_1)^2 + (a_1\ddot{\varphi}_1 \sin \varphi_1 + a_1\dot{\varphi}_1^2 \cos \varphi_1)^2 \right] \\ & + \frac{1}{2} \left\{ (l\ddot{\varphi}_1 \cos(\varphi_1 - \alpha) + a_2\ddot{\varphi}_2 \cos \varphi_2 - l\dot{\varphi}_1^2 \sin(\varphi_1 - \alpha) - a_2\dot{\varphi}_2^2 \sin \varphi_2)^2 \right. \\ & \left. + (l\ddot{\varphi}_1 \sin(\varphi_1 - \alpha) + a_2\ddot{\varphi}_2 \sin \varphi_2 + l\dot{\varphi}_1^2 \cos(\varphi_1 - \alpha) + a_2\dot{\varphi}_2^2 \cos \varphi_2)^2 \right\} + \frac{1}{2} I_1 \dot{\varphi}_1^2 + \frac{1}{2} I_2 \dot{\varphi}_2^2 \end{aligned} \quad (4)$$

Trong thí dụ này ta chọn các tọa gia tốc là $\ddot{\varphi}_1, \ddot{\varphi}_2$. Do đó các tọa lực suy rộng là các lực suy rộng. Thực hiện các phép tính đạo hàm riêng

$$\frac{\partial G^-}{\partial \ddot{\varphi}_1} = Q_1, \quad \frac{\partial G^-}{\partial \ddot{\varphi}_2} = Q_2$$

ta nhận được hệ hai phương trình vi phân chuyển động của con lắc kép có dạng như sau

$$\begin{cases} (I_1 + m_1 a_1^2 + m_2 l^2) \ddot{\varphi}_1 + m_2 l a_2 \ddot{\varphi}_2 \cos(\varphi_1 - \alpha - \varphi_2) + m_2 l a_2 \dot{\varphi}_2^2 \sin(\varphi_1 - \alpha - \varphi_2) + \\ \quad + m_1 g a_1 \sin \varphi_1 + m_2 g l \sin(\varphi_1 - \alpha) = 0 \\ m_2 l a_2 \ddot{\varphi}_1 \cos(\varphi_1 - \alpha - \varphi_2) + (I_2 + m_2 c_2^2) \ddot{\varphi}_2 - m_2 l a_2 \sin(\varphi_1 - \alpha - \varphi_2) \dot{\varphi}_1^2 + m_2 g a_2 \sin \varphi_2 = 0 \end{cases} \quad (5)$$

Thí dụ 5.20. Một xe trượt chuyển động thẳng (hình 5.33) được xem như một tấm chữ nhật đồng chất, khối lượng m , mômen quán tính khối đối với trục vuông góc mặt phẳng tấm và đi qua khối tâm I_C . Tại điểm A cách khối tâm C một đoạn a , gắn một mép sắc nhằm tạo cho vận tốc của điểm A hướng dọc theo AC . Tác dụng lên xe trượt một lực \vec{F} luôn hướng theo AC và một ngẫu lực có mômen M nằm trong mặt phẳng chuyển động. Bỏ qua ma sát. Áp dụng phương trình Gibbs – Appel thiết lập phương trình chuyển động của xe.

Lời giải. Ta xem xe trượt là một vật rắn phẳng chuyển động trong mặt phẳng của nó. Chọn các tọa độ suy rộng là

$$q_1 = x_C, q_2 = y_C, q_3 = \varphi \quad (1)$$

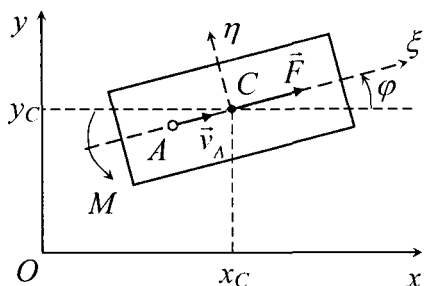
Chọn $C\xi\eta$ là hệ trục quán tính chính trung tâm của tấm. Phương trình liên kết phi holo-nôm được thiết lập như sau. Do giả thiết các bánh xe tạo cho điểm A có vận tốc \vec{v}_A luôn hướng theo AC nên ta có phương trình liên kết

$$\frac{\dot{x}_A}{a \cos \varphi} = \frac{\dot{y}_A}{a \sin \varphi} \quad (2)$$

Từ hình 5.33 ta có

$$\begin{bmatrix} x_A \\ y_A \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_C \\ y_C \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -a \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3)$$

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_A \\ \dot{y}_A \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{x}_C \\ \dot{y}_C \end{bmatrix} + \dot{\varphi} \begin{bmatrix} -\sin \varphi & -\cos \varphi \\ \cos \varphi & -\sin \varphi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -a \\ 0 \end{bmatrix} \quad (4)$$



Hình 5.33

Từ (4) ta suy ra

$$\dot{x}_A = \dot{x}_C + a\dot{\varphi} \sin \varphi, \quad \dot{y}_A = \dot{y}_C - a\dot{\varphi} \cos \varphi \quad (5)$$

Thế (5) vào (2) ta được

$$\begin{aligned} (\dot{x}_C + a\dot{\varphi} \sin \varphi)a \sin \varphi &= (\dot{y}_C - a\dot{\varphi} \cos \varphi)a \cos \varphi \\ \Rightarrow \dot{x}_C \sin \varphi - \dot{y}_C \cos \varphi + a\dot{\varphi} &= 0 \end{aligned} \quad (6)$$

Phương trình (6) là phương trình liên kết phi hê-lônôm (vì không khả tích). Xe trượt được xác định bởi ba tọa độ x_C, y_C, φ , nhưng vận tốc của các tọa độ này bị ràng buộc bởi phương trình (6) nên hệ chỉ có hai bậc tự do (tọa độ tối thiểu là 3, vận tốc tối thiểu là 2).

Bây giờ ta chuyển sang áp dụng phương trình Gibbs – Appel thiết lập các phương trình vi phân chuyuyển động của xe. Theo (7.44) hàm Gibbs – Appel trong thí dụ này có dạng

$$\begin{aligned} G &= \frac{1}{2}m(\dot{x}_C^2 + \dot{y}_C^2) + \frac{1}{2}I_C\dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2}I_C\dot{\varphi}^4 \\ G^- &= \frac{1}{2}m(\ddot{x}_C^2 + \ddot{y}_C^2) + \frac{1}{2}I_C\ddot{\varphi}^2 \end{aligned} \quad (7)$$

Ta chọn các tựa vận tốc là $\dot{\pi}$ và $\dot{\varphi}$ (các tựa tọa độ là π và φ) theo các hệ thức sau

$$\begin{aligned} \dot{x}_C \sin \varphi - \dot{y}_C \cos \varphi &= -a\dot{\varphi} \\ \dot{x}_C \cos \varphi + \dot{y}_C \sin \varphi &= \dot{\pi} \end{aligned} \quad (8)$$

Từ (8) giải ra ta được

$$\dot{x}_C = \dot{\pi} \cos \varphi - a\dot{\varphi} \sin \varphi, \quad \dot{y}_C = \dot{\pi} \sin \varphi + a\dot{\varphi} \cos \varphi \quad (9)$$

Đạo hàm biểu thức (9) theo thời gian ta được

$$\begin{aligned} \ddot{x}_C &= (\ddot{\pi} - a\dot{\varphi}^2) \cos \varphi - (a\ddot{\varphi} + \dot{\pi}\dot{\varphi}) \sin \varphi \\ \ddot{y}_C &= (\ddot{\pi} - a\dot{\varphi}^2) \sin \varphi + (a\ddot{\varphi} + \dot{\pi}\dot{\varphi}) \cos \varphi \end{aligned} \quad (10)$$

Bình phương hai vế của phương trình (10) rồi cộng lại ta được

$$\ddot{x}_C^2 + \ddot{y}_C^2 = (\ddot{\pi} - a\dot{\varphi}^2)^2 + (a\ddot{\varphi} + \dot{\pi}\dot{\varphi})^2 \quad (11)$$

Thế (11) vào (7) ta được

$$G^- = \frac{1}{2}m[(\ddot{\pi} - a\dot{\varphi}^2)^2 + (a\ddot{\varphi} + \dot{\pi}\dot{\varphi})^2] + \frac{1}{2}I_C\ddot{\varphi}^2 \quad (12)$$

Từ đó suy ra

$$\frac{\partial G}{\partial \ddot{\pi}} = m(\ddot{\pi} - a\dot{\varphi}^2), \quad \frac{\partial G}{\partial \ddot{\varphi}} = ma(a\ddot{\varphi} + \dot{\pi}\dot{\varphi}) + I_C\ddot{\varphi} \quad (13)$$

Bây giờ ta chuyển sang xác định các tựa lực suy rộng ứng với các tựa tọa độ π và φ

$$\sum \delta A_k = \vec{F} \cdot \delta \vec{r}_C + M \delta \varphi = F(\cos \varphi \delta x_C + \sin \varphi \delta y_C) + M \delta \varphi \quad (14)$$

Từ (8) ta có

$$\begin{cases} \delta \pi = \delta x_C \cos \varphi + \delta y_C \sin \varphi \\ -a \delta \varphi = \delta x_C \sin \varphi - \delta y_C \cos \varphi \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \delta x_C = \delta \pi \cos \varphi - a \delta \varphi \sin \varphi \\ \delta y_C = \delta \pi \sin \varphi + a \delta \varphi \cos \varphi \end{cases} \quad (15)$$

Thế (15) vào (14) ta được

$$\begin{aligned} \sum \delta A_k &= F \cos \varphi (\delta \pi \cos \varphi - a \delta \varphi \sin \varphi) + F \sin \varphi (\delta \pi \sin \varphi + a \delta \varphi \cos \varphi) + M \delta \varphi \\ \sum \delta A_k &= F \delta \pi + M \delta \varphi \end{aligned} \quad (16)$$

Từ (16) suy ra các tựa lực suy rộng

$$\Pi_1 = F, \quad \Pi_2 = M \quad (17)$$

Vậy phương trình vi phân chuyển động của xe trượt có dạng

$$m(\ddot{\pi} - a\dot{\varphi}^2) = F, \quad (I_C + ma^2)\ddot{\varphi} + ma\dot{\pi}\dot{\varphi} = M \quad (18)$$

Trở lại các tọa độ tối thiểu x_C, y_C, φ . Thế các biểu thức

$$\begin{aligned} \dot{\pi} &= \dot{x}_C \cos \varphi + \dot{y}_C \sin \varphi \\ \ddot{\pi} &= \ddot{x}_C \cos \varphi - \dot{x}_C \dot{\varphi} \sin \varphi + \ddot{y}_C \sin \varphi + \dot{y}_C \dot{\varphi} \cos \varphi \end{aligned}$$

vào hệ phương trình (18) ta được hệ hai phương trình vi phân chuyển động

$$\begin{aligned} m(\ddot{x}_C \cos \varphi + \ddot{y}_C \sin \varphi - \dot{x}_C \dot{\varphi} \sin \varphi + \dot{y}_C \dot{\varphi} \cos \varphi - a\dot{\varphi}^2) &= F \\ (I_C + ma^2)\ddot{\varphi} + ma(\dot{x}_C \dot{\varphi} \cos \varphi + \dot{y}_C \dot{\varphi} \sin \varphi) &= M \end{aligned} \quad (19)$$

Ngoài ra ta còn có phương trình liên kết phi hê-lônôm

$$\dot{x}_C \sin \varphi - \dot{y}_C \cos \varphi - a\dot{\varphi} = 0 \quad (20)$$

Như thế một hệ phương trình đầy đủ bao gồm các phương trình Gibbs – Appel và các phương trình liên kết phi hê-lônôm. Đây là điểm khác nhau giữa các hệ hê-lônôm và các hệ phi hê-lônôm.

Thí dụ 5.21. Một quả cầu đồng chất khối lượng m , bán kính a , lăn không trượt trên mặt phẳng nghiêng với một góc α với mặt phẳng nằm ngang (hình 5.34). Áp dụng phương trình Gibbs – Appel thành lập phương trình vi phân chuyển động của quả cầu.

Lời giải. Chọn các tọa độ suy rộng tối thiểu là $q_1 = x_C, q_2 = y_C, q_3 = \varphi, q_4 = \psi, q_5 = \theta$. Trong đó x_C, y_C là tọa độ khối tâm C của quả cầu, còn φ, ψ, θ là ba góc Euler. Phương trình liên kết hê-lônôm là khoảng cách từ khối tâm đến mặt phẳng nghiêng

$$z_C = a \quad (1)$$

Các phương trình liên kết phi hê-lônôm suy ra là điều kiện lăn không trượt của quả cầu trên mặt phẳng nghiêng

$$\dot{x}_C - a\omega_y = 0, \quad \dot{y}_C + a\omega_x = 0 \quad (2)$$

Từ các phương trình động học Euler ta có hình chiếu của vận tốc góc lên các trục của hệ quy chiếu động $R = \{x, y, z\}$

$$\begin{aligned} \omega_x &= \dot{\varphi} \sin \theta \sin \psi + \dot{\theta} \cos \psi \\ \omega_y &= -\dot{\varphi} \sin \theta \cos \psi + \dot{\theta} \sin \psi \\ \omega_z &= \dot{\psi} + \dot{\varphi} \cos \theta \end{aligned} \quad (3)$$

Ta chọn các biểu thức $\omega_x, \omega_y, \omega_z$ làm các tựa vận tốc

$$\dot{\pi}_1 = \omega_x = \dot{\varphi} \sin \theta \sin \psi + \dot{\theta} \cos \psi$$

$$\dot{\pi}_2 = \omega_y = -\dot{\varphi} \sin \theta \cos \psi + \dot{\theta} \sin \psi$$

$$\dot{\pi}_3 = \omega_z = \dot{\psi} + \dot{\varphi} \cos \theta$$

Từ các phương trình (2) và (4) ta giải ra biểu thức xác định các vận tốc suy rộng là hàm của tựa vận tốc

$$\dot{q}_1 = \dot{x}_C = a\dot{\pi}_2, \quad \dot{q}_2 = \dot{y}_C = -a\dot{\pi}_1$$

$$\dot{q}_3 = \dot{\varphi} = \frac{\sin q_4}{\sin q_5} \dot{\pi}_1 - \frac{\cos q_4}{\sin q_5} \dot{\pi}_2$$

$$\dot{q}_4 = \dot{\psi} = -\dot{\pi}_1 \sin q_4 \cotg q_5 + \dot{\pi}_2 \cos q_4 \cotg q_5 + \dot{\pi}_3$$

$$\dot{q}_5 = \dot{\theta} = \dot{\pi}_1 \cos q_4 + \dot{\pi}_2 \sin q_4$$

Biểu thức xác định hàm Gibbs – Appel trong bài toán này có dạng

$$G^- = \frac{1}{2} m \bar{a}_C^2 + \frac{1}{2} \bar{\alpha} \cdot \left(\bar{I}_C \cdot \bar{\alpha} \right) + \bar{\alpha} \cdot \bar{\omega} \times \left(\bar{I}_C \cdot \bar{\omega} \right)$$

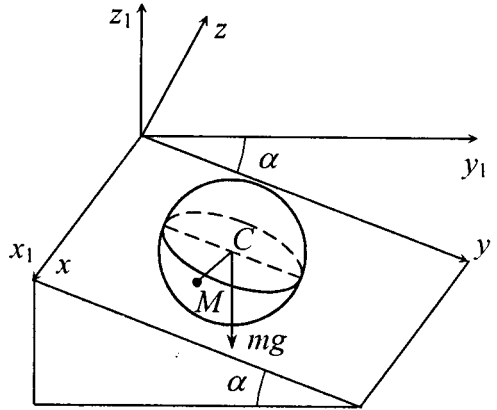
$$G^- = \frac{1}{2} m \mathbf{a}_C^T \mathbf{a}_C + \frac{1}{2} \boldsymbol{\alpha}^T \left(\mathbf{I}_C \boldsymbol{\alpha} \right) + \boldsymbol{\alpha}^T \left(\tilde{\boldsymbol{\omega}} \mathbf{I}_C \boldsymbol{\omega} \right) \quad (6)$$

Trong đó

$$\mathbf{a}_C = \begin{bmatrix} \ddot{x}_C \\ \ddot{y}_C \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{\omega} = \begin{bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{\alpha} = \begin{bmatrix} \dot{\omega}_x \\ \dot{\omega}_y \\ \dot{\omega}_z \end{bmatrix}, \quad \mathbf{I}_C = \begin{bmatrix} I & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & I \end{bmatrix} \quad (7)$$

Thế (7) vào (6) ta được

$$G^- = \frac{1}{2} m (\ddot{x}_C^2 + \ddot{y}_C^2) + \frac{1}{2} I (\dot{\omega}_x^2 + \dot{\omega}_y^2 + \dot{\omega}_z^2) \quad (8)$$



Hình 5.34

Chú ý đến các biểu thức (4) và (5), biểu thức (8) được biến đổi về dạng

$$G = \frac{1}{2}(I + ma^2)\ddot{\pi}_1^2 + \frac{1}{2}(I + ma^2)\ddot{\pi}_2^2 + \frac{1}{2}I\ddot{\pi}_3^2 \quad (9)$$

Biểu thức công ảo của lực suy rộng có dạng

$$\delta A = m\vec{g} \cdot \delta \vec{r}_C = mg \sin \alpha \delta y_C - mg \cos \alpha \delta z_C \quad (10)$$

Chú ý đến (5) ta có

$$\delta x_C = a \delta \pi_2, \quad \delta y_C = -a \delta \pi_1, \quad \delta z_C = 0 \quad (11)$$

Thế (11) vào (10) ta được

$$\delta A = -mga \sin \alpha \delta \pi_1$$

Từ đó suy ra các tựa lực suy rộng ứng với các tựa tọa độ

$$\Pi_1 = -mga \sin \alpha, \quad \Pi_2 = 0, \quad \Pi_3 = 0 \quad (12)$$

Thế (9) và (12) vào phương trình Gibbs – Appel ta được

$$\begin{aligned} (I + ma^2)\ddot{\pi}_1 &= -mga \sin \alpha \\ (I + ma^2)\ddot{\pi}_2 &= 0 \\ I\ddot{\pi}_3 &= 0 \end{aligned} \quad (13)$$

Từ (13) ta suy ra

$$\dot{\pi}_1 = -\frac{mga \sin \alpha}{I + ma^2}t + C_1, \quad \dot{\pi}_2 = C_2, \quad \dot{\pi}_3 = C_3 \quad (14)$$

Trong đó C_1, C_2, C_3 là ba hằng số tùy ý. Chú ý đến phương trình (5) ta có các biểu thức xác định các vận tốc suy rộng

$$\begin{aligned} \dot{x}_C &= aC_2 \\ \dot{y}_C &= \frac{mga^2 \sin \alpha}{I + ma^2}t - aC_1 \\ \dot{\phi} &= -\frac{\sin \psi}{\sin \theta} \frac{mga \sin \alpha}{I + ma^2}t + C_1 \frac{\sin \psi}{\sin \theta} - C_2 \frac{\cos \psi}{\sin \theta} \\ \dot{\psi} &= \sin \psi \cotg \theta \frac{mga \sin \alpha}{I + ma^2}t - C_1 \sin \psi \cotg \theta + C_2 \cos \psi \cotg \theta + C_3 \\ \dot{\theta} &= -\cos \psi \frac{mga \sin \alpha}{I + ma^2}t + C_1 \cos \psi + C_2 \sin \psi \end{aligned} \quad (15)$$

Tích phân hai phương trình đầu của hệ phương trình (15) ta được

$$\begin{aligned} x_C &= aC_2t + C_4 \\ y_C &= \frac{mga^2 \sin \alpha}{2(I + ma^2)}t^2 - aC_1t + C_5 \end{aligned} \quad (16)$$

Như thế khối tâm của quả cầu chuyển động trên một parabol nằm trong mặt phẳng song song với mặt phẳng nghiêng.

§8 CÂN BẰNG KHỐI LƯỢNG HỆ NHIỀU VẬT HỒLÔNÔM

8.1 Khái niệm cân bằng khối lượng hệ nhiều vật rắn

a) Thu gọn hệ lực quán tính của vật rắn

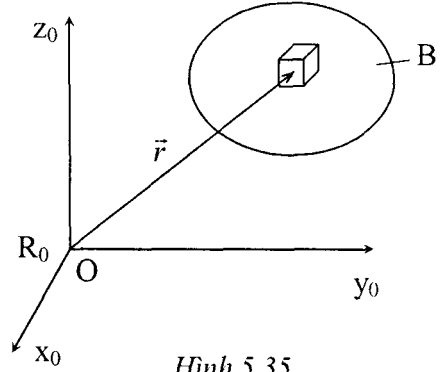
Từ quan hệ

$$\vec{F}^* = -\frac{R_0 d\vec{p}}{dt}, \quad \vec{M}^* = -\frac{R_0 d\vec{l}_o}{dt} \quad (8.1)$$

ta suy ra biểu thức thu gọn hệ lực quán tính của vật rắn một điểm O cố định

$$\vec{F}^* = -\frac{R_0 d}{dt} m\vec{v}_C \quad (8.2)$$

$$\vec{M}_O^* = -\frac{R_0 d}{dt} (\vec{I}_C \cdot \vec{\omega} + \vec{r}_C \times m\vec{v}_C) \quad (8.3)$$



Hình 5.35

Từ đó suy ra thu gọn hệ lực quán tính của hệ p vật rắn về điểm O cố định ta được một lực và một ngẫu lực. Chúng có dạng như sau

$$\vec{F}^* = -\frac{R_0 d}{dt} \sum_{i=1}^p m_i \vec{v}_{C_i} \quad (8.4)$$

$$\vec{M}_O^* = -\frac{R_0 d}{dt} \sum_{i=1}^p (\vec{I}_{C_i} \cdot \vec{\omega}_i + \vec{r}_{C_i} \times m_i \vec{v}_{C_i}) \quad (8.5)$$

Trong đó :

\vec{I}_{C_i} là tenxơ quán tính khối của vật rắn thứ i đối với khối tâm C_i của nó,

\vec{r}_{C_i} là véctơ xác định vị trí khối tâm của vật rắn thứ i trong hệ qui chiếu

R_0 ,

\vec{v}_{C_i} là vận tốc khối tâm C_i ở trong hệ qui chiếu R_0 ,

$\vec{\omega}_i$ là vận tốc góc của vật rắn thứ i ở trong hệ qui chiếu R_0 ,

m_i là khối lượng của vật rắn thứ i.

b) Định nghĩa cân bằng khối lượng của hệ nhiều vật

Một hệ nhiều vật được cân bằng khối lượng hoàn toàn, nếu véctơ chính và mômen chính đối với điểm O tùy ý của hệ lực quán tính của các khâu động của hệ triệt tiêu

$$\vec{F}^* = 0, \quad \vec{M}_O^* = 0. \quad (8.6)$$

8.2 Biểu thức cân bằng khối lượng tổng quát

Từ định nghĩa trên, và từ công thức thu gọn hệ lực quán tính của hệ vật rắn (8.4), (8.5) ta có biểu thức cân bằng tổng quát

$$\frac{R_0}{dt} d \sum_{i=1}^p m_i \vec{v}_{Ci} = 0 \quad (8.7)$$

$$\frac{R_0}{dt} d \sum_{i=1}^p (\vec{I}_{Ci} \vec{\omega}_i + \vec{r}_{Ci} \times m \vec{v}_{Ci}) = 0 \quad (8.8)$$

Chuyển sang cách biểu diễn ma trận của các phương trình (8.7) và (8.8) ở trong hệ qui chiếu R_0 ta có

$$\frac{d}{dt} \sum_{i=1}^p m_i \mathbf{v}_{Ci} = 0 \quad (8.9)$$

$$\frac{d}{dt} \left[\sum_{i=1}^p (\mathbf{I}_{Ci} \boldsymbol{\omega}_i + m_i \vec{r}_{Ci} \mathbf{v}_{Ci}) \right] = 0 \quad (8.10)$$

Xét hệ nhiều vật hólôlôm, giữ và dừng. Giả sử vị trí của hệ được xác định bởi n tọa độ suy rộng q_1, q_2, \dots, q_n (n có thể là số bậc tự do f của hệ và cũng có thể lớn hơn số bậc tự do của hệ). Khi đó vị trí các khối tâm là các hàm của các tọa độ suy rộng

$$\mathbf{r}_{Ci} = \mathbf{r}_{Ci}(q_1, q_2, \dots, q_n), \quad (i = 1, 2, \dots, p). \quad (8.11)$$

Đạo hàm các biểu thức (8.11) theo thời gian t ở trong hệ qui chiếu R_0 , ta được biểu thức xác định vận tốc khối tâm của vật rắn thứ i .

$$\mathbf{v}_{Ci} = \frac{d\mathbf{r}_{Ci}}{dt} = \frac{\partial \mathbf{r}_{Ci}}{\partial \mathbf{q}} \dot{\mathbf{q}} = \mathbf{J}_{ri}(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}} \quad (8.12)$$

Trong đó, $\mathbf{J}_{ri}(\mathbf{q})$ là ma trận Jacôbi tịnh tiến và có dạng

$$\mathbf{J}_{ri}(\mathbf{q}) = \frac{\partial \mathbf{r}_{Ci}}{\partial \mathbf{q}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x_{Ci}}{\partial q_1} & \frac{\partial x_{Ci}}{\partial q_2} & \dots & \frac{\partial x_{Ci}}{\partial q_n} \\ \frac{\partial y_{Ci}}{\partial q_1} & \frac{\partial y_{Ci}}{\partial q_2} & \dots & \frac{\partial y_{Ci}}{\partial q_n} \\ \frac{\partial z_{Ci}}{\partial q_1} & \frac{\partial z_{Ci}}{\partial q_2} & \dots & \frac{\partial z_{Ci}}{\partial q_n} \end{bmatrix} \quad (8.13)$$

Nếu gọi $\boldsymbol{\varphi}_i$ là véc tơ quay của vật rắn quanh trục quay tức thời, ta có

$$\boldsymbol{\omega}_i = \frac{d\boldsymbol{\varphi}_i}{dt} = \frac{\partial \boldsymbol{\varphi}_i}{\partial \mathbf{q}} \dot{\mathbf{q}} = \mathbf{J}_{ri}(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}} \quad (8.14)$$

Trong đó $\mathbf{J}_{Ri}(\mathbf{q})$ là ma trận Jacôbi quay và có dạng

$$\mathbf{J}_{Ri} = \frac{\partial \boldsymbol{\varphi}_i}{\partial \mathbf{q}} = \frac{\partial \boldsymbol{\omega}_i}{\partial \dot{\mathbf{q}}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \omega_{ix}}{\partial \dot{q}_1} & \frac{\partial \omega_{ix}}{\partial \dot{q}_2} & \dots & \frac{\partial \omega_{ix}}{\partial \dot{q}_n} \\ \frac{\partial \omega_{iy}}{\partial \dot{q}_1} & \frac{\partial \omega_{iy}}{\partial \dot{q}_2} & \dots & \frac{\partial \omega_{iy}}{\partial \dot{q}_n} \\ \frac{\partial \omega_{iz}}{\partial \dot{q}_1} & \frac{\partial \omega_{iz}}{\partial \dot{q}_2} & \dots & \frac{\partial \omega_{iz}}{\partial \dot{q}_n} \end{bmatrix} \quad (8.15)$$

Thế các biểu thức (8.12) vào phương trình (8.9), ta được

$$\frac{d}{dt} \left\{ \left[\sum_{i=1}^p m_i \mathbf{J}_{Ti}(\mathbf{q}) \right] \dot{\mathbf{q}} \right\} = 0 \quad (8.16)$$

Thế các biểu thức (8.12) và (8.14) vào phương trình (8.10) ta có

$$\frac{d}{dt} \left\{ \left[\sum_{i=1}^p (\mathbf{I}_{Ci} \mathbf{J}_{Ri}(\mathbf{q}) + m_i \bar{\mathbf{r}}_{Ci} \mathbf{J}_{Ti}(\mathbf{q})) \right] \dot{\mathbf{q}} \right\} = 0 \quad (8.17)$$

Chú ý rằng, ma trận của tenxơ quán tính \mathbf{I}_{Ci} có thể viết dưới dạng

$$\mathbf{I}_{Ci} = \mathbf{A}_i \mathbf{I}_{Ci}^{(i)} \mathbf{A}_i^T \quad (8.18)$$

Trong đó $\mathbf{I}_{Ci}^{(i)}$ là ma trận của tenxơ quán tính trong hệ qui chiếu động gắn liền với vật rắn và có gốc ở khối tâm C_i của vật rắn thứ i , \mathbf{A}_i là ma trận côsin chỉ hướng của vật rắn thứ i . Từ đó ta có

$$\mathbf{I}_{Ci} \mathbf{J}_{Ri}(\mathbf{q}) = \mathbf{A}_i \mathbf{I}_{Ci}^{(i)} \mathbf{A}_i^T \mathbf{J}_{Ri}(\mathbf{q}) \quad (8.19)$$

Mặt khác ta có hệ thức

$$\mathbf{J}_{Ri}(\mathbf{q}) = \frac{\partial \boldsymbol{\omega}_i}{\partial \dot{\mathbf{q}}} = \frac{\partial (\mathbf{A}_i \boldsymbol{\omega}_i^{(i)})}{\partial \dot{\mathbf{q}}} = \mathbf{A}_i(\mathbf{q}) \frac{\partial \boldsymbol{\omega}_i^{(i)}}{\partial \dot{\mathbf{q}}} = \mathbf{A}_i \mathbf{J}_{Ri}^{(i)} \quad (8.20)$$

Trong đó ta đưa vào ký hiệu

$$\mathbf{J}_{Ri}^{(i)}(\mathbf{q}) = \frac{\partial \boldsymbol{\omega}_i^{(i)}}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \quad (8.21)$$

(Chú ý rằng, do $\mathbf{A}_i = \mathbf{A}_i(\mathbf{q})$ nên $\frac{\partial \mathbf{A}_i}{\partial \dot{\mathbf{q}}} = 0$).

Thế (8.20) và (8.21) vào (8.17) ta được

$$\frac{d}{dt} \left\{ \left[\sum_{i=1}^p \mathbf{A}_i \mathbf{I}_{Ci}^{(i)} \mathbf{J}_{Ri}^{(i)}(\mathbf{q}) + m_i \bar{\mathbf{r}}_{Ci} \mathbf{J}_{Ti}(\mathbf{q}) \right] \dot{\mathbf{q}} \right\} = 0 \quad (8.22)$$

Từ các biểu thức (8.16) và (8.22) ta suy ra các điều kiện cân bằng khối lượng của hệ nhiều vật

$$\sum_{i=1}^p m_i \mathbf{J}_{T_i}(\mathbf{q}) = 0 \quad (8.23)$$

$$\sum_{i=1}^p \left[\mathbf{A}_i \mathbf{I}_{C_i}^{(i)} \mathbf{J}_{R_i}^{(i)}(\mathbf{q}) + m_i \tilde{\mathbf{r}}_{C_i} \mathbf{J}_{T_i}(\mathbf{q}) \right] = 0 \quad (8.24)$$

Chú ý:

- a) Đối với hệ nhiều vật có cấu trúc cây, f bậc tự do, ta chọn $n = f$.
- b) Đối với hệ nhiều vật có cấu trúc mạch vòng, ta chọn $n = m > f$. Số lượng m các tọa độ suy rộng được chọn sao cho các véctơ định vị $\tilde{\mathbf{r}}_{C_i}$ có thể biểu diễn dưới dạng hàm giải tích tường minh của các tọa độ suy rộng q_1, \dots, q_m .

Chương 6

PHƯƠNG PHÁP SỐ TRONG ĐỘNG LỰC HỌC HỆ NHIỀU VẬT

Trong chương này trước hết trình bày khái niệm phương trình trạng thái của hệ cơ học, một số phương pháp số giải hệ phương trình vi phân thường và hệ phương trình vi phân - đại số của hệ nhiều vật. Việc giải hệ phương trình đại số tuyến tính và hệ phương trình đại số phi tuyến tuy rất cần thiết nhưng vì những vấn đề này đã được đề cập nhiều trong các giáo trình về giải tích số, nên không trình bày ở đây. Sau đó trình bày việc tuyến tính hoá các phương trình vi phân chuyển động của hệ nhiều vật. Cuối chương trình bày sơ lược các thuật toán nghiên cứu ổn định và dao động tuần hoàn của các hệ nhiều vật.

§1 PHƯƠNG TRÌNH TRẠNG THÁI CỦA CÁC HỆ CƠ HỌC

Các đại lượng trạng thái của một hệ cơ học holoônôm f bậc tự do là các đại lượng vị trí $q_i (i=1, \dots, f)$ và các đại lượng vận tốc $\dot{q}_i (i=1, \dots, f)$. Gộp các đại lượng trạng thái vào một vectơ y ta có

$$y = [\mathbf{q}^T, \dot{\mathbf{q}}^T]^T \quad (1.1)$$

Trong đó y là vectơ có $n=2f$ phần tử.

Các phương trình vi phân chuyển động của hệ nhiều vật trong nhiều trường hợp là một hệ f các phương trình vi phân thường cấp hai. Chuyển về các đại lượng trạng thái ta được một hệ n phương trình vi phân cấp một. Để làm quen với cách xây dựng phương trình trạng thái của hệ cơ học ta nêu lên một vài thí dụ đơn giản sau đây.

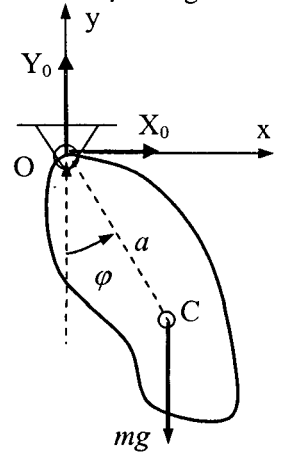
Thí dụ 6.1. Phương trình dao động của con lắc vật lý (hình 6.1) có dạng

$$(ma^2 + I_C)\ddot{\varphi} + mga \sin \varphi = 0 \quad (1)$$

Trong đó m là khối lượng con lắc, I_C là mômen quán tính khối của con lắc đối với trục vuông góc đi qua khối tâm C của nó.

Thực hiện phép đổi biến số $y_1 = \varphi, y_2 = \dot{\varphi}$, phương trình (1) được viết lại dưới dạng

$$\begin{aligned} \dot{y}_1 &= \dot{\varphi} = y_2 \\ \dot{y}_2 &= \ddot{\varphi} = -\frac{mga}{ma^2 + I_C} \sin y_1 \end{aligned} \quad (2)$$



Hình 6.1

Hệ phương trình vi phân (2) được gọi là phương trình trạng thái của con lắc vật lý.

Chú ý: Ta có thể sử dụng phép đổi biến khác

$$y_1 = x_A, y_2 = \dot{x}_A, y_3 = \varphi, y_4 = \dot{\varphi}$$

để đưa các phương trình (4) và (5) về dạng phương trình trạng thái.

Như thế phương trình vi phân trạng thái của một hệ cơ học holoônôm tổng quát f bậc tự do là một hệ $n=2f$ phương trình vi phân cấp một dạng

$$\begin{aligned} \dot{y}_1 &= f_1(t, y_1, \dots, y_n) \\ \dot{y}_2 &= f_2(t, y_1, \dots, y_n) \\ &\dots\dots\dots \\ \dot{y}_n &= f_n(t, y_1, \dots, y_n) \end{aligned} \quad (1.2)$$

Trong đó

$$y_1 = q_1, \dots, y_f = q_f, y_{f+1} = \dot{q}_1, \dots, y_n = \dot{q}_f \quad (1.3)$$

Hệ phương trình (1.2) là các phương trình trạng thái của cơ hệ phi ôônôm (autonom). Đối với các cơ hệ ôônôm các phương trình trạng thái có dạng

$$\begin{aligned} \dot{y}_1 &= f_1(y_1, \dots, y_n) \\ \dot{y}_2 &= f_2(y_1, \dots, y_n) \\ &\dots\dots\dots \\ \dot{y}_n &= f_n(y_1, \dots, y_n) \end{aligned} \quad (1.4)$$

Xét trường hợp hệ tuyến tính khi mà phương trình vi phân chuyển động có dạng

$$\mathbf{M}(t)\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{C}(t)\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{K}(t)\mathbf{q} = \mathbf{d}(t) \quad (1.5)$$

Bằng phép biến đổi

$$\mathbf{y} = \begin{bmatrix} \mathbf{q} \\ \dot{\mathbf{q}} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{P} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{E} \\ -\mathbf{M}^{-1}\mathbf{K} & -\mathbf{M}^{-1}\mathbf{C} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{f} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{M}^{-1}\mathbf{d} \end{bmatrix} \quad (1.6)$$

phương trình (1.5) đưa được về phương trình trạng thái sau đây

$$\dot{\mathbf{y}} = \mathbf{P}(t)\mathbf{y} + \mathbf{f}(t) \quad (1.7)$$

§2 CÁC PHƯƠNG PHÁP SỐ GIẢI HỆ PHƯƠNG TRÌNH VI PHÂN THƯỜNG

Chúng ta có khá nhiều phương pháp số giải phương trình và hệ phương trình vi phân thường: Phương pháp Runge-Kutta, phương pháp Euler, phương pháp Milne-Hamming, phương pháp Runge-Kutta-Nyström, phương pháp Adams, phương pháp dự báo - hiệu chỉnh (predictor-corrector), phương pháp Newmark, phương pháp Wilson, phương pháp bán, v.v....

Các bài toán về phương trình vi phân thường được phân thành hai nhóm: Bài toán giá trị đầu của phương trình vi phân và bài toán giá trị biên của phương trình vi

phân. Trong đoạn này ta chỉ đề cập đến bài toán giải hệ phương trình vi phân với các điều kiện đầu đã cho. Bài toán này còn được gọi là bài toán Cauchy.

Cho hệ phương trình vi phân thường

$$\dot{\mathbf{y}} = \mathbf{f}(t, \mathbf{y}), \quad \mathbf{y}, \mathbf{f} \in \mathbb{R}^n, \quad t \in \mathbb{R} \quad (2.1)$$

và các điều kiện đầu :

$$\mathbf{y}(t_0) = \mathbf{y}_0, \quad \mathbf{y}_0 \in \mathbb{R}^n \quad (2.2)$$

Hãy tìm nghiệm của bài toán Cauchy trên bằng phương pháp số. Các phương pháp số giải hệ phương trình vi phân thường có thể chia thành ba nhóm

- Các phương pháp một bước,
- Các phương pháp nhiều bước,
- Các phương pháp ngoại suy (và nội suy).

Trong mục này ta sẽ trình bày một số phương pháp tính hay dùng để giải hệ phương trình vi phân chuyển động của hệ nhiều vật.

2.1 Các phương pháp Runge-Kutta

Hai nhà toán học người Đức là Runge và Kutta đã đề xuất một phương pháp số xác định gần đúng nghiệm phương trình vi phân (2.1) mà chỉ cần tính hàm $\mathbf{f}(t, \mathbf{y})$ tại một số điểm khác nhau. Các phương pháp Runge-Kutta là các phương pháp một bước và chúng có dạng tổng quát như sau

$$\mathbf{y}_{n+1} := \mathbf{y}_n + h\Phi_h(t_n, \mathbf{y}_n), \quad h = \Delta t \quad (2.3)$$

Độ chính xác và dạng cụ thể của phương pháp phụ thuộc vào việc chọn hàm gia lượng (incremental function) Φ_h .

a) *Phương pháp Euler (phương pháp Runge-Kutta bậc 1)*

Nếu ta chọn $\Phi_h(t_n, \mathbf{y}_n) = \mathbf{f}(t_n, \mathbf{y}_n)$, $t_n = t_0 + nh$, $h = \Delta t$.

thì (2.3) có dạng

$$\mathbf{y}_{n+1} := \mathbf{y}_n + h\mathbf{f}(t_n, \mathbf{y}_n) \quad (2.4)$$

Biểu thức (2.4) là công thức Euler tính gần đúng nghiệm các phương trình vi phân (2.1).

b) *Phương pháp Euler cải tiến (phương pháp Runge-Kutta bậc 2)*

Thay thế cho biểu thức (2.3) ta chọn

$$\mathbf{y}_{n+1} := \mathbf{y}_n + \frac{h}{2}(\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2) \quad (2.5)$$

Trong đó

$$\mathbf{k}_1 = \mathbf{f}(t_n, \mathbf{y}_n) \quad (2.6)$$

$$\mathbf{k}_2 = \mathbf{f}(t_n + h, \mathbf{y}_n + h\mathbf{k}_1) \quad (2.7)$$

Phương pháp dựa theo công thức (2.5) được gọi là phương pháp Euler cải tiến (phương pháp Runge-Kutta bậc 2, phương pháp Heun).

c) *Phương pháp Runge-Kutta bậc 4*

Thay cho (2.3) ta sử dụng công thức

$$y_{n+1} := y_n + \frac{h}{6} (\mathbf{k}_1 + 2\mathbf{k}_2 + 2\mathbf{k}_3 + \mathbf{k}_4) \quad , \quad h = \Delta t . \quad (2.8)$$

Trong đó:

$$\begin{aligned} \mathbf{k}_1 &= \mathbf{f}(t_n, \mathbf{y}_n) \\ \mathbf{k}_2 &= \mathbf{f}\left(t_n + \frac{h}{2}, \mathbf{y}_n + \frac{h}{2}\mathbf{k}_1\right) \\ \mathbf{k}_3 &= \mathbf{f}\left(t_n + \frac{h}{2}, \mathbf{y}_n + \frac{h}{2}\mathbf{k}_2\right) \\ \mathbf{k}_4 &= \mathbf{f}(t_n + h, \mathbf{y}_n + h\mathbf{k}_3) \end{aligned} \quad (2.9)$$

Phương pháp Runge-Kutta dựa trên công thức (2.8) được gọi là phương pháp Runge-Kutta bậc 4, hay công thức Runge-Kutta cổ điển. Công thức này được thiết lập lần đầu tiên năm 1895.

d) *Các phương pháp Runge-Kutta bậc cao hơn*

Trong phương pháp Runge-Kutta bậc một ta phải tính một lần hàm $\mathbf{f}(t, \mathbf{y})$ trong mỗi bước, đó là $\mathbf{k}_1 = \mathbf{f}(t_n, \mathbf{y}_n)$. Khi sử dụng phương pháp Runge-Kutta bậc hai ta phải tính hai lần hàm $\mathbf{f}(t, \mathbf{y})$ trong mỗi bước. Đó là:

$$\mathbf{k}_1 = \mathbf{f}(t_n, \mathbf{y}_n) \quad , \quad \mathbf{k}_2 = \mathbf{f}(t_n + h, \mathbf{y}_n + h\mathbf{k}_1)$$

Khi sử dụng phương pháp Runge-Kutta bậc 4 ta phải tính bốn lần hàm $\mathbf{f}(t, \mathbf{y})$ trong mỗi bước (xem 2.9). Một cách tổng quát nếu ta sử dụng phương pháp Runge-Kutta bậc r ($r \geq 1$) trong mỗi bước ta phải tính r giá trị hàm $\mathbf{f}(t, \mathbf{y})$.

Công thức tổng quát là:

$$\mathbf{k}_i = \mathbf{f}\left(t_n + c_i h, \mathbf{y}_n + h \sum_{j=1}^r a_{ij} \mathbf{k}_j\right) \quad (2.10)$$

$$y_{n+1} = y_n + h \sum_{i=1}^r b_i \mathbf{k}_i \quad (2.11)$$

Nếu $a_{ij} = 0$ với $j \geq i$, thì các giá trị \mathbf{k}_i có thể tính toán bằng công thức hiện theo các giá trị $\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \dots, \mathbf{k}_{i-1}$. Khi đó phương pháp này được gọi là phương pháp Runge-Kutta là hiện. Nếu $a_{ij} = 0$ với $j > i$ và $a_{ii} \neq 0$, phương pháp được gọi là phương pháp Runge-Kutta á hiện.

Nếu ta ký hiệu sai số của phương pháp là $R_i(h)$, thì người ta đã chứng minh được: sai số của phương pháp Euler là $R_1(h) = O(h^2)$, sai số của phương pháp Euler cải tiến là $R_2(h) = O(h^3)$, sai số của phương pháp Runge-Kutta bậc bốn là $R_4(h) = O(h^5)$.

2.2 Phương pháp Runge-Kutta-Nyström

Các công thức tích phân Runge-Kutta có thể mở rộng cho hệ phương trình vi phân cấp cao. Ở đây ta trình bày các công thức tính nghiệm gần đúng của hệ phương trình vi phân cấp hai

$$\ddot{\mathbf{y}} = \mathbf{f}(t, \mathbf{y}, \dot{\mathbf{y}}) \tag{2.12}$$

$$\mathbf{y}(t_0) = \mathbf{y}_0, \quad \dot{\mathbf{y}}(t_0) = \dot{\mathbf{y}}_0 \tag{2.13}$$

Nyström đã phát triển công thức Runge-Kutta cho hệ phương trình vi phân (2.12) và cho ta các công thức tính như sau

$$\mathbf{y}_{i+1} = \mathbf{y}_i + h\dot{\mathbf{y}}_i + \frac{h}{3}(\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2 + \mathbf{k}_3) \tag{2.14}$$

$$\dot{\mathbf{y}}_{i+1} = \dot{\mathbf{y}}_i + \frac{1}{3}(\mathbf{k}_1 + 2\mathbf{k}_2 + 2\mathbf{k}_3 + \mathbf{k}_4) \tag{2.15}$$

Bốn véc tơ hàm \mathbf{k}_i được xác định là giá trị của $\mathbf{f}(t, \mathbf{y}, \dot{\mathbf{y}})$ tại bốn vị trí trung gian trong khoảng tích phân $[t_i, t_i + h]$ của mỗi bước tính

$$\begin{aligned} \mathbf{k}_1 &= \frac{h}{2} \mathbf{f}(t_i, \mathbf{y}_i, \dot{\mathbf{y}}_i) \\ \mathbf{k}_2 &= \frac{h}{2} \mathbf{f}\left(t_i + \frac{h}{2}, \mathbf{y}_i + \frac{h}{2} \dot{\mathbf{y}}_i + \frac{h}{4} \mathbf{k}_1, \dot{\mathbf{y}}_i + \mathbf{k}_1\right) \\ \mathbf{k}_3 &= \frac{h}{2} \mathbf{f}\left(t_i + \frac{h}{2}, \mathbf{y}_i + \frac{h}{2} \dot{\mathbf{y}}_i + \frac{h}{4} \mathbf{k}_1, \dot{\mathbf{y}}_i + \mathbf{k}_2\right) \\ \mathbf{k}_4 &= \frac{h}{2} \mathbf{f}(t_i + h, \mathbf{y}_i + h\dot{\mathbf{y}}_i + h\mathbf{k}_3, \dot{\mathbf{y}}_i + 2\mathbf{k}_3) \end{aligned} \tag{2.16}$$

Khi hàm \mathbf{f} không phụ thuộc vào $\dot{\mathbf{y}}$, $\mathbf{f} = \mathbf{f}(t, \mathbf{y})$ thì $\mathbf{k}_2 = \mathbf{k}_3$, quá trình tính toán trung gian giảm bớt đi một lần tính hàm \mathbf{f} .

Ta có thể biến đổi hệ n phương trình vi phân cấp hai (2.12) về hệ $2n$ phương trình vi phân cấp một và giải bằng thuật toán Runge-Kutta. Khi đó thời gian tính toán lâu hơn so với áp dụng các công thức Runge-Kutta-Nyström (2.14), (2.15). Chú ý rằng phương pháp Runge-Kutta-Nyström cũng là phương pháp một bước.

2.3 Phương pháp hai bước

Blaess đã đưa ra phương pháp hai bước để giải hệ phương trình vi phân phi tuyến cấp hai. Phương pháp này đã được nhiều người cải tiến. Dưới đây trình bày phương pháp này do Gumpert cải tiến năm 1967. Giải hệ phương trình vi phân cấp hai

$$\ddot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(t, \mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}) \quad (2.17)$$

với các điều kiện đầu

$$\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0, \quad \dot{\mathbf{x}}(t_0) = \dot{\mathbf{x}}_0 \quad (2.18)$$

Các bước tính toán như sau:

$$t_0$$

$$\mathbf{x}_0, \dot{\mathbf{x}}_0, \ddot{\mathbf{x}}_0 = \mathbf{f}(t_0, \mathbf{x}_0, \dot{\mathbf{x}}_0)$$

$$t_1 = t_0 + h$$

$$\mathbf{x}_1''' = \mathbf{x}_0 + h\dot{\mathbf{x}}_0 + \frac{1}{2}h^2\ddot{\mathbf{x}}_0; \quad \dot{\mathbf{x}}_1''' = \dot{\mathbf{x}}_0 + h\ddot{\mathbf{x}}_0; \quad \ddot{\mathbf{x}}_1''' = \mathbf{f}(t_1, \mathbf{x}_1''', \dot{\mathbf{x}}_1''')$$

$$\mathbf{x}_1'' = \mathbf{x}_0 + h\dot{\mathbf{x}}_0 + \frac{1}{6}h^2(2\ddot{\mathbf{x}}_0 + \ddot{\mathbf{x}}_1'''); \quad \dot{\mathbf{x}}_1'' = \dot{\mathbf{x}}_0 + \frac{1}{2}h(\ddot{\mathbf{x}}_0 + \ddot{\mathbf{x}}_1'''); \quad \ddot{\mathbf{x}}_1'' = \mathbf{f}(t_1, \mathbf{x}_1'', \dot{\mathbf{x}}_1'')$$

$$\mathbf{x}_1' = \mathbf{x}_0 + h\dot{\mathbf{x}}_0 + \frac{1}{6}h^2(2\ddot{\mathbf{x}}_0 + \ddot{\mathbf{x}}_1''); \quad \dot{\mathbf{x}}_1' = \dot{\mathbf{x}}_0 + \frac{1}{2}h(\ddot{\mathbf{x}}_0 + \ddot{\mathbf{x}}_1''); \quad \ddot{\mathbf{x}}_1' = \mathbf{f}(t_1, \mathbf{x}_1', \dot{\mathbf{x}}_1')$$

$$t_2 = t_0 + 2h$$

$$\mathbf{x}_2'' = \mathbf{x}_0 + 2h\dot{\mathbf{x}}_0 + \frac{2}{3}h^2(\ddot{\mathbf{x}}_0 + 2\ddot{\mathbf{x}}_1'); \quad \dot{\mathbf{x}}_2'' = \dot{\mathbf{x}}_0 + 2h\ddot{\mathbf{x}}_1'; \quad \ddot{\mathbf{x}}_2'' = \mathbf{f}(t_2, \mathbf{x}_2'', \dot{\mathbf{x}}_2'')$$

$$\mathbf{x}_2' = \mathbf{x}_2''; \quad \dot{\mathbf{x}}_2' = \dot{\mathbf{x}}_0 + \frac{1}{3}h(\ddot{\mathbf{x}}_0 + 4\ddot{\mathbf{x}}_1' + \ddot{\mathbf{x}}_2''); \quad \ddot{\mathbf{x}}_2' = \mathbf{f}(t_2, \mathbf{x}_2', \dot{\mathbf{x}}_2')$$

$$t_3 = t_0 + 3h$$

$$\mathbf{x}_3' = \mathbf{x}_0 + 3h\dot{\mathbf{x}}_0 + \frac{9}{8}h^2(\ddot{\mathbf{x}}_0 + 2\ddot{\mathbf{x}}_1' + \ddot{\mathbf{x}}_2''); \quad \dot{\mathbf{x}}_3' = \dot{\mathbf{x}}_0 + \frac{3}{4}h(\ddot{\mathbf{x}}_0 + 3\ddot{\mathbf{x}}_2'')$$

$$\ddot{\mathbf{x}}_3' = \mathbf{f}(t_3, \mathbf{x}_3', \dot{\mathbf{x}}_3')$$

$$t_4 = t_0 + 4h$$

$$\mathbf{x}_4 = \mathbf{x}_0 + 4h\dot{\mathbf{x}}_0 + \frac{8}{45}h^2(7\ddot{\mathbf{x}}_0 + 24\ddot{\mathbf{x}}_1' + 6\ddot{\mathbf{x}}_2' + 8\ddot{\mathbf{x}}_3');$$

$$\dot{\mathbf{x}}_4 = \dot{\mathbf{x}}_0 + \frac{2}{3}h(4\ddot{\mathbf{x}}_1' + \ddot{\mathbf{x}}_2'' - 3\ddot{\mathbf{x}}_2' + 4\ddot{\mathbf{x}}_3')$$

So sánh với phương pháp Runge-Kutta-Nyström, thời gian tính theo phương pháp Blaess-Gumpert có nhanh hơn chút ít, sai số cỡ $O(h^5)$.

2.4 Các phương pháp Adams

Trong các phương pháp một bước ta đã trình bày ở trên như phương pháp Euler, phương pháp Euler cải tiến, phương pháp Runge-Kutta,... giá trị y_{n+1} được tính nhờ t_n, y_n và $\Delta t = t_{n+1} - t_n = h$. Ta có thể tính y_{n+1} với độ chính xác cao hơn bằng cách sử dụng các giá trị y_n, y_{n-1}, \dots . Phương pháp tính loại này được gọi là phương pháp tính nhiều bước. Các phương pháp nhiều bước có độ chính xác cao, tiết kiệm được bộ nhớ và thời gian máy. Tuy nhiên các thuật toán nhiều bước khá cồng kềnh và có độ ổn định kém hơn các thuật toán một bước. Dưới đây ta trình bày ý tưởng của các phương pháp Adams.

Năm 1855, nhà toán học người Anh, Adams đã đề xuất một phương pháp nhiều bước giải bài toán giá trị đầu theo yêu cầu của một chuyên gia pháo binh người Anh là ông Bashforth. Kết quả của Adams sau đó bị lãng quên. Sang đến đầu thế kỷ thứ XX, ông Stermer, một nhà toán học Nauy, đã phát minh lại công thức Adams, khi giải bài toán xác định quỹ đạo các hạt tích điện rời xa mặt trời với vận tốc lớn. Sau đó Krylov, một nhà bác học người Nga, đã có công hoàn thiện phương pháp Adams. Xét hệ phương trình vi phân cấp một

$$\dot{y} = f(t, y), \quad y(t_0) = y_0 \quad (2.19)$$

Tích phân hai vế phương trình trên từ t_{n-p} đến t_{n+1} , với p là một số nguyên dương, ta được

$$y_{n+1} = y_{n-p} + \int_{t_{n-p}}^{t_{n+1}} f(t, y) dt \quad (2.20)$$

Để thực hiện tích phân trên, người ta có xấp xỉ hàm $f(t, y)$ chẳng hạn sử dụng các sai phân hữu hạn lùi về trước t_n , với các giá trị $f(t, y)$ đã tính ở các bước trước. Kết quả ta được một họ các phương pháp phụ thuộc vào việc chọn tham số p . Nếu xấp xỉ hàm $f(t, y)$ tính cả ở thời điểm t_{n+1} thì phương pháp được gọi là ẩn, ngược lại nếu ta không tính $f(t, y)$ tại t_{n+1} thì phương pháp gọi là hiện. Các phương pháp ẩn có độ chính xác cao hơn và ổn định hơn so với các phương pháp hiện. Tuy nhiên khó sử dụng hơn vì phải tính y_{n+1} bằng phương pháp lặp. Dạng tổng quát của phương pháp nhiều bước được cho bằng biểu thức sau

$$\sum_{i=0}^{p+1} \alpha_i y_{n+1-i} + \sum_{i=0}^k h \beta_i f(t_{n+1-i}, y_{n+1-i}) = 0, \quad h = \Delta t \quad (2.21)$$

Trong đó α_i và β_i là các tham số, chúng được chọn với những ý tưởng cụ thể của phương pháp. Nếu $\beta_0 = 0$ thì số hạng $f(t_{n+1}, y_{n+1})$ không xuất hiện trong phương trình sai phân. Khi đó phương pháp Adams được gọi là phương pháp hiện. Nếu $\beta_0 \neq 0$ phương pháp Adams được gọi là phương pháp ẩn. Khi $\beta_i \equiv 0$, với mọi $i \geq 1$, thì ta có phương pháp sai phân lùi.

Trong các phương pháp Adams người ta hay quan tâm đến hai công thức sau. Công thức thứ nhất có dạng

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{24}(55f_n - 59f_{n-1} + 37f_{n-2} - 9f_{n-3}) \quad (2.22)$$

Phương pháp tính theo công thức (2.22) được gọi là phương pháp Adams-Bashforth (phương pháp hiện). Sai số tính theo phương pháp này là $R(h) = O(h^5)$.

Công thức thứ hai có dạng

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{24}(9f_{n+1} + 19f_n - 5f_{n-1} + f_{n-2}) \quad (2.23)$$

Phương pháp tính theo công thức (2.23) được gọi là phương pháp Adams-Moulton (phương pháp ẩn). Sai số tính theo phương pháp này là $R(h) = O(h^5)$.

2.5 Phương pháp dự báo-hiệu chỉnh (Predictor-Corrector method)

Như phần trên đã nói, sử dụng phương pháp ẩn cho ta kết quả chính xác hơn so với phương pháp hiện. Trong động lực học hệ nhiều vật hàm $f(t_{n+1}, y_{n+1})$ thường là hàm phi tuyến của y_{n+1} . Do đó người ta sử dụng kết hợp cả hai công thức (2.22) và (2.23). Phương pháp nhiều bước hiện (y_{n+1} tính được tường minh qua y_n, y_{n-1}, \dots) được dùng để dự báo (predictor) nghiệm. Phương pháp nhiều bước ẩn (y_{n+1} liên hệ với y_n, y_{n-1}, \dots bởi một phương trình phi tuyến) cho lượng hiệu chỉnh (corrector). Lượng dự báo tính theo công thức Adams-Bashforth (2.22)

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{24}(55f_n - 59f_{n-1} + 37f_{n-2} - 9f_{n-3}) \quad (2.24)$$

Lượng hiệu chỉnh tính theo công thức Adams-Moulton (2.23).

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{24}(9f_{n+1} + 19f_n - 5f_{n-1} + f_{n-2}) \quad (2.25)$$

Thuật toán dự báo điều-hiệu chỉnh gồm các bước sau:

1. Sử dụng công thức (2.24) để tính y_{n+1}^0 .
2. Sử dụng công thức (2.25) để tính y_{n+1}^k , $k = 1, 2, \dots$
3. Kiểm tra điều kiện

$$\left\| \frac{y_{n+1}^k - y_{n+1}^{k+1}}{y_{n+1}^k} \right\| < \varepsilon \quad (\varepsilon \text{ là độ chính xác cho trước}).$$

4. Nếu điều kiện 3 thỏa mãn, ta chuyển sang bước tính sau. Nếu điều kiện 3 chưa thỏa mãn ta trở lại bước 2.

Khi giải phương trình đại số phi tuyến (2.23) để xác định y_{n+1} (trong đó vectơ hàm f_{n+1} chứa y_{n+1}) ta có thể dùng phương pháp lặp Newton-Raphson.

2.6 Phương pháp Newmark

Năm 1959 Newmark (1920-1981), giáo sư về Kỹ thuật công trình ở đại học Illinois (Hoa Kỳ) đã đề xuất một thuật toán giải hệ phương trình vi phân, được áp dụng nhiều trong động lực học cấu trúc (structural dynamics). Phương pháp này dựa vào các hệ thức nội suy sau đây với vị trí, vận tốc, gia tốc từ bước thứ n sang bước thứ $n+1$

$$\mathbf{v}_{n+1} = \mathbf{v}_n + h[(1-\gamma)\mathbf{a}_n + \gamma\mathbf{a}_{n+1}], \quad h = \Delta t \quad (2.26)$$

$$\mathbf{x}_{n+1} = \mathbf{x}_n + h\mathbf{v}_n + \frac{h^2}{2}[(1-2\beta)\mathbf{a}_n + 2\beta\mathbf{a}_{n+1}] \quad (2.27)$$

Trong đó \mathbf{x}_n , \mathbf{v}_n và \mathbf{a}_n là các xấp xỉ của các véc tơ định vị, vận tốc, gia tốc tại bước thứ n . Các đại lượng β và γ là các tham số xác định nội dung của phương pháp.

Phương pháp là ổn định nếu $2\beta \geq \gamma > \frac{1}{2}$. Phương pháp hình thang là trường hợp riêng

của họ các phương pháp này khi ta chọn $\beta = \frac{1}{4}$, $\gamma = \frac{1}{2}$. Trường hợp này tương

ứng với giả thiết gia tốc là hằng số trên đoạn $[t_n, t_{n+1}]$ và bằng $(\mathbf{a}_n + \mathbf{a}_{n+1})/2$. Trong trường hợp này phương pháp có tên là phương pháp gia tốc trung bình. Khi chọn

$\beta = \frac{1}{6}$, $\gamma = \frac{1}{2}$, tương ứng với giả thiết gia tốc thay đổi tuyến tính trên đoạn

$[t_n, t_{n+1}]$. Phương pháp khi đó có tên là phương pháp gia tốc tuyến tính.

Tương tự như phương pháp nhiều bước, thuật toán ẩn của các phương trình (2.26) và (2.27) có thể sử dụng để dự báo-hiệu chỉnh trong từng bước lặp. Từ các phương trình (2.26) và (2.27) ta có thể giải ra

$$\mathbf{a}_{n+1} = \frac{1}{\beta h^2}(\mathbf{x}_{n+1} - \mathbf{x}_n) - \frac{1}{\beta h}\mathbf{v}_n + \left(1 - \frac{1}{2\beta}\right)\mathbf{a}_n \quad (2.28)$$

$$\mathbf{v}_{n+1} = \frac{\gamma}{\beta h}(\mathbf{x}_{n+1} - \mathbf{x}_n) - \left(\frac{\gamma}{\beta} - 1\right)\mathbf{v}_n - \left(\frac{\gamma}{2\beta} - 1\right)h\mathbf{a}_n \quad (2.29)$$

Trong trường hợp phương trình vi phân chuyển động của hệ là hệ phương trình vi phân tuyến tính

$$\mathbf{M}\mathbf{a}_{n+1} + \mathbf{C}\mathbf{v}_{n+1} + \mathbf{K}\mathbf{x}_{n+1} = \mathbf{f}_{n+1} \quad (2.30)$$

với \mathbf{M} , \mathbf{C} , \mathbf{K} là các ma trận khối lượng, ma trận cản và ma trận độ cứng, thì phương pháp Newmark được áp dụng khá thuận tiện. Thế các biểu thức (2.28) và (2.29) vào phương trình (2.30) ta được

$$\left[\frac{1}{\beta h^2} \mathbf{M} + \frac{\gamma}{\beta h} \mathbf{C} + \mathbf{K} \right] \mathbf{x}_{n+1} = \mathbf{f}_{n+1} + \mathbf{M} \left[\frac{1}{\beta h^2} \mathbf{x}_n + \frac{1}{\beta h} \mathbf{v}_n + \left(\frac{1}{2\beta} - 1 \right) \mathbf{a}_n \right] + \mathbf{C} \left[\frac{\gamma}{\beta h} \mathbf{x}_n + \left(\frac{\gamma}{\beta} - 1 \right) \mathbf{v}_n + \left(\frac{\gamma}{2\beta} - 1 \right) h \mathbf{a}_n \right] \quad (2.31)$$

Trong trường hợp này thuật toán Newmark gồm các bước sau:

1. Từ các giá trị đã biết $\mathbf{x}_0, \dot{\mathbf{x}}_0 = \mathbf{v}_0$, ta tính $\ddot{\mathbf{x}}_0 = \mathbf{a}_0$ theo phương trình

$$\mathbf{M} \ddot{\mathbf{x}}_0 + \mathbf{C} \dot{\mathbf{x}}_0 + \mathbf{K} \mathbf{x}_0 = \mathbf{f}_0 = \mathbf{f}(0)$$

$$\Rightarrow \ddot{\mathbf{x}}_0 = \mathbf{M}^{-1} (\mathbf{f}_0 - \mathbf{C} \dot{\mathbf{x}}_0 - \mathbf{K} \mathbf{x}_0)$$

2. Lựa chọn các giá trị h, β và γ một cách thích hợp,

3. Tính véc tơ dịch chuyển \mathbf{x}_{n+1} , bắt đầu với $n=0$, sử dụng phương trình (2.31),

4. Tìm véc tơ gia tốc và véc tơ vận tốc tại thời điểm t_{n+1}

$$\mathbf{a}_{n+1} = \frac{1}{\beta h^2} (\mathbf{x}_{n+1} - \mathbf{x}_n) - \frac{1}{\beta h} \mathbf{v}_n - \left(\frac{1}{2\beta} - 1 \right) \mathbf{a}_n \quad (2.32)$$

$$\mathbf{v}_{n+1} = \frac{\gamma}{\beta h} (\mathbf{x}_{n+1} - \mathbf{x}_n) - \left(\frac{\gamma}{\beta} - 1 \right) \mathbf{v}_n - \left(\frac{\gamma}{2\beta} - 1 \right) h \mathbf{a}_n \quad (2.33)$$

5. Trờ lại bước 1, tính toán cho bước tiếp theo.

Như thế, trong trường hợp hệ phương trình vi phân chuyển động là hệ tuyến tính, thuật toán Newmark được áp dụng khá thuận tiện.

Bây giờ ta chuyển sang xét trường hợp hệ phương trình vi phân chuyển động là hệ phi tuyến. Giả sử phương trình chuyển động của hệ có dạng

$$\mathbf{M}(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{k}(t, \mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \mathbf{h}(t, \mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \quad (2.34)$$

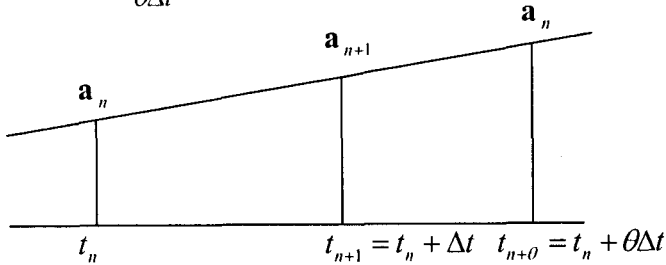
Thế các biểu thức (2.28) và (2.29) vào phương trình (2.34) ta nhận được hệ phương trình đại số phi tuyến xác định ẩn là \mathbf{q}_{n+1} . Sử dụng phương pháp lặp Newton-Raphson ta xác định được \mathbf{q}_{n+1} . Sau đó sử dụng các công thức (2.32), (2.33) tìm được $\dot{\mathbf{q}}_{n+1}$ và $\ddot{\mathbf{q}}_{n+1}$.

2.7 Phương pháp Wilson - θ

Trong phương pháp gia tốc tuyến tính của Newmark (khi ta chọn $\beta = \frac{1}{6}$ và $\gamma = \frac{1}{2}$) sự ổn định của phương pháp không được tốt. Năm 1968 Wilson đã đề xuất một ý tưởng mới, thay đổi khoảng tích phân $t \rightarrow t + \Delta t$ bằng khoảng $t \rightarrow t + \theta \Delta t$, với $\theta > 1,37$. Khi đó ta có thể rời rạc hoá phương trình vi phân chuyển động của hệ

nhiều vật (2.34) như sau. Do giả thiết $\mathbf{a}(t)$ biến đổi tuyến tính trong khoảng t_n đến $t_{n+\theta}$, nên ta có thể dự kiến giá trị của \mathbf{a} ở thời điểm $t = t_n + \tau$, $0 \leq \tau \leq \theta\Delta t$ theo công thức

$$\mathbf{a}(t_n + \tau) = \mathbf{a}_n + \frac{\tau}{\theta\Delta t}(\mathbf{a}_{n+\theta} - \mathbf{a}_n) \quad (2.35)$$



Hình 6.3

Tích phân biểu thức (2.35) ta được

$$\mathbf{v}(t_n + \tau) = \mathbf{v}_n + \mathbf{a}_n \tau + \frac{\tau^2}{2\theta\Delta t}(\mathbf{a}_{n+\theta} - \mathbf{a}_n) \quad (2.36)$$

$$\mathbf{x}(t_n + \tau) = \mathbf{x}_n + \mathbf{v}_n \tau + \frac{1}{2} \mathbf{a}_n \tau^2 + \frac{\tau^3}{6\theta\Delta t}(\mathbf{a}_{n+\theta} - \mathbf{a}_n) \quad (2.37)$$

Thay $\tau = \theta\Delta t$ vào các phương trình (2.36) và (2.37) ta được

$$\mathbf{v}_{n+\theta} = \mathbf{v}_n + \frac{\theta\Delta t}{2}(\mathbf{a}_{n+\theta} + \mathbf{a}_n) \quad (2.38)$$

$$\mathbf{x}_{n+\theta} = \mathbf{x}_n + \theta\Delta t \mathbf{v}_n + \frac{\theta^2(\Delta t)^2}{6}(\mathbf{a}_{n+\theta} + 2\mathbf{a}_n) \quad (2.39)$$

Từ phương trình (2.39) ta suy ra

$$\mathbf{a}_{n+\theta} = \frac{6}{\theta^2(\Delta t)^2}(\mathbf{x}_{n+\theta} - \mathbf{x}_n) - \frac{6}{\theta\Delta t} \mathbf{v}_n - 2\mathbf{a}_n \quad (2.40)$$

Thế (2.40) vào (2.38) ta được:

$$\mathbf{v}_{n+\theta} = \frac{3}{\theta\Delta t}(\mathbf{x}_{n+\theta} - \mathbf{x}_n) - 2\mathbf{v}_n - \frac{\theta\Delta t}{2} \mathbf{a}_n \quad (2.41)$$

Ngoài ra ta lấy xấp xỉ:

$$\mathbf{f}_{n+\theta} \approx \mathbf{f}_n + \theta(\mathbf{f}_{n+1} - \mathbf{f}_n) \quad (2.42)$$

Thế các biểu thức (2.40), (2.41) và (2.42) vào phương trình vi phân chuyển động tuyến tính

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{K}\mathbf{q} = \mathbf{f}(t) \quad (2.43)$$

và thực hiện một vài biến đổi ta được

$$\left[\frac{6}{\theta^2(\Delta t)^2} \mathbf{M} + \frac{3}{\theta \Delta t} \mathbf{C} + \mathbf{K} \right] \mathbf{q}_{n+1} = \mathbf{f}_n + \theta(\mathbf{f}_{n+1} - \mathbf{f}_n) + \left[\frac{6}{\theta^2(\Delta t)^2} \mathbf{M} + \frac{3}{\theta \Delta t} \mathbf{C} \right] \mathbf{q}_n + \left[\frac{6}{\theta \Delta t} \mathbf{M} + 2\mathbf{C} \right] \dot{\mathbf{q}}_n + \left[2\mathbf{M} + \frac{\theta \Delta t}{2} \mathbf{C} \right] \ddot{\mathbf{q}}_n \quad (2.44)$$

Trong việc giải hệ phương trình vi phân tuyến tính, thuật toán Wilson- θ gồm các bước sau:

1. Từ các giá trị đã biết của $\mathbf{q}_0, \dot{\mathbf{q}}_0$, tính $\ddot{\mathbf{q}}_0$ từ phương trình (2.44),
2. Chọn bước tính $h = \Delta t$ một cách hợp lý và chọn giá trị θ hợp lý (θ có thể lấy là 1.4),
3. Tính giá trị của véc tơ hàm $\mathbf{f}_{n+\theta}$, bắt đầu với $n = 0$

$$\mathbf{f}_{i+\theta} \approx \mathbf{f}_n + \theta(\mathbf{f}_{n+1} - \mathbf{f}_n) + \mathbf{M} \left(\frac{6}{\theta^2 h^2} \mathbf{q}_n + \frac{6}{\theta h} \dot{\mathbf{q}}_n + 2\ddot{\mathbf{q}}_n \right) + \mathbf{C} \left[\frac{3}{\theta h} \mathbf{q}_n + 2\dot{\mathbf{q}}_n + \frac{\theta h}{2} \ddot{\mathbf{q}}_n \right] \quad (2.45)$$

4. Tìm véc tơ dịch chuyển tại $t_{n+\theta}$

$$\mathbf{q}_{n+\theta} = \left[\frac{6}{\theta^2 h^2} \mathbf{M} + \frac{3}{\theta h} \mathbf{C} + \mathbf{K} \right]^{-1} \mathbf{f}_{n+\theta} \quad (2.46)$$

5. Tính các véc tơ gia tốc, vận tốc, dịch chuyển tại t_{n+1}

$$\ddot{\mathbf{q}}_{n+1} = \frac{6}{\theta^3 h^2} (\mathbf{q}_{n+\theta} - \mathbf{q}_n) - \frac{6}{\theta^2 h} \dot{\mathbf{q}}_n + \left(1 - \frac{3}{\theta} \right) \ddot{\mathbf{q}}_n \quad (2.47)$$

$$\dot{\mathbf{q}}_{n+1} = \dot{\mathbf{q}}_n + \frac{h}{2} (\ddot{\mathbf{q}}_{n+1} + \ddot{\mathbf{q}}_n) \quad (2.48)$$

$$\mathbf{q}_{n+1} = \mathbf{q}_n + h\dot{\mathbf{q}}_n + \frac{h^2}{6} (\ddot{\mathbf{q}}_{n+1} + 2\ddot{\mathbf{q}}_n) \quad (2.49)$$

Ta cũng có thể áp dụng phương pháp Wilson- θ giải phương trình vi phân chuyển động phi tuyến của hệ nhiều vật

$$\mathbf{M}(\mathbf{q}_{n+\theta}) \ddot{\mathbf{q}}_{n+\theta} + \mathbf{k}(\mathbf{q}_{n+\theta}, \dot{\mathbf{q}}_{n+\theta}) = \mathbf{f}(t_{n+\theta}) \quad (2.50)$$

Ta lấy

$$\dot{\mathbf{q}}_{n+\theta} = \dot{\mathbf{q}}_n + \theta \Delta t \left[(1 - \gamma) \ddot{\mathbf{q}}_n + \gamma \ddot{\mathbf{q}}_{n+\theta} \right] \quad (2.51)$$

$$\mathbf{q}_{n+\theta} = \mathbf{q}_n + \theta \Delta t \dot{\mathbf{q}}_n + \frac{(\theta \Delta t)^2}{2} \left[(1 - 2\beta) \ddot{\mathbf{q}}_n + 2\beta \ddot{\mathbf{q}}_{n+\theta} \right] \quad (2.52)$$

Thế các biểu thức (2.51) và (2.52) vào (2.50) ta được một hệ phương trình đại số phi tuyến đối với $\ddot{\mathbf{q}}_{n+\theta}$. Giải ra ta được $\ddot{\mathbf{q}}_{n+\theta}$. Thế kết quả tìm được vào (2.51) và (2.52) ta tìm được $\dot{\mathbf{q}}_{n+\theta}$ và $\mathbf{q}_{n+\theta}$.

Chú ý. Khi giải hệ phương trình vi phân chuyển động tuyến tính hoá, việc áp dụng các phương pháp Newmark hoặc phương pháp Wilson- θ có nhiều ưu điểm. Còn khi giải hệ phương trình vi phân phi tuyến của hệ nhiều vật thì nên áp dụng phương pháp Runge-Kutta-Nyström hoặc phương pháp Blaess-Gumpert.

2.8 Tích phân số hệ phương trình vi phân chuyển động của hệ nhiều vật có cấu trúc cây

Để thiết lập các phương trình vi phân chuyển động của hệ nhiều vật có cấu trúc cây, ta thường sử dụng phương pháp Newton-Euler hoặc phương pháp phương trình Lagrange loại hai. Khi đó phương trình vi phân chuyển động của hệ có dạng

$$\mathbf{M}(\mathbf{q}, t)\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{k}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) = \mathbf{h}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) \tag{2.53}$$

Giả thiết $\mathbf{M}(\mathbf{q}, t)$ là ma trận không suy biến, từ (2.53) ta suy ra

$$\ddot{\mathbf{q}} = \mathbf{M}^{-1}(\mathbf{q}, t)[\mathbf{h}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) - \mathbf{k}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t)] \tag{2.54}$$

Nếu ta thực hiện phép đổi biến:

$$\mathbf{y}_1 = \mathbf{q}, \mathbf{y}_2 = \dot{\mathbf{q}} \tag{2.55}$$

thì phương trình vi phân (2.54) biến thành hệ phương trình vi phân cấp 1

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{y}}_1 &= \mathbf{y}_2 \\ \dot{\mathbf{y}}_2 &= \mathbf{M}^{-1}(\mathbf{y}_1, t)[\mathbf{h}(\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, t) - \mathbf{k}(\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, t)] \end{aligned} \tag{2.56}$$

Áp dụng các phương pháp số giải hệ phương trình (2.54) hoặc hệ phương trình (2.56) ta tìm được các đại lượng trạng thái của hệ.

§3 CÁC PHƯƠNG PHÁP SỐ GIẢI HỆ PHƯƠNG TRÌNH VI PHÂN-ĐẠI SỐ CỦA HỆ NHIỀU VẬT

Khi thiết lập các phương trình chuyển động của hệ nhiều vật holoônôm có cấu trúc mạch vòng, chúng ta có thể sử dụng các phương trình Lagrange dạng nhân tử hoặc các phương trình Lagrange loại hai. Nếu sử dụng các phương trình Lagrange dạng nhân tử, ta nhận được một hệ phương trình vi phân đại số mô tả chuyển động của hệ nhiều vật holoônôm

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{s}} + \Phi_s^T \Lambda = \mathbf{p}_1 \tag{3.1}$$

$$\mathbf{f}(\mathbf{s}, t) = \mathbf{0} \tag{3.2}$$

Trong đó \mathbf{M} là ma trận khối lượng suy rộng, $\mathbf{s} = [s_1, s_2, \dots, s_n]^T$ là các tọa độ vật lý, $\Lambda = [\Lambda_1, \Lambda_2, \dots, \Lambda_r]^T$ là véc-tơ các nhân tử Lagrange, $\mathbf{f} = [f_1, f_2, \dots, f_r]^T = \mathbf{0}$ là các điều kiện ràng buộc, Φ_s là ma trận Jacobi cỡ $r \times f$.

$$\Phi_s = \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{s}} \quad (3.3)$$

Các thành phần $p_j^{(1)}$ của vectơ $\mathbf{p}_1 = [p_1^{(1)}, p_2^{(1)}, \dots, p_n^{(1)}]^T$ ở vế phải của phương trình (3.1) có dạng

$$p_j^{(1)} = Q_j - \sum \frac{\partial^2 T}{\partial s_i \partial s_j} - \frac{\partial^2 T}{\partial t \partial s_j} - \frac{\partial T}{\partial s_j}, \quad (j=1, \dots, n) \quad (3.4)$$

Trong đó T là động năng của hệ nhiều vật, Q_j là các lực suy rộng.

Các phương pháp giải hệ phương trình vi phân đại số (3.1) và (3.2) có thể chia thành ba nhóm như sau:

- 1) Phương pháp tách các nhân tử Lagrange,
- 2) Phương pháp biến đổi về các tọa độ suy rộng độc lập,
- 3) Phương pháp giải trực tiếp hệ phương trình vi phân - đại số.

3.1 Phương pháp tách các nhân tử Lagrange

a) *Biến đổi hệ phương trình vi phân- đại số về hệ các phương trình vi phân thường*

Dạng vectơ các phương trình liên kết (3.2) có thể viết lại dưới dạng hệ các phương trình đại số phi tuyến như sau

$$f_k(s_1, s_2, \dots, s_n, t) = 0, \quad (k=1, \dots, r) \quad (3.5)$$

Đạo hàm theo thời gian các phương trình liên kết (3.5) ta được

$$\frac{df_k}{dt} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f_k}{\partial s_i} \dot{s}_i + \frac{\partial f_k}{\partial t} = 0, \quad (k=1, \dots, r) \quad (3.6)$$

$$\frac{d^2 f_k}{dt^2} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f_k}{\partial s_i} \ddot{s}_i + \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 f_k}{\partial s_j \partial s_i} \dot{s}_i \dot{s}_j + 2 \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 f_k}{\partial t \partial s_i} \dot{s}_i + \frac{\partial^2 f_k}{\partial t^2} = 0 \quad (k=1, \dots, r) \quad (3.7)$$

Từ phương trình (3.7) ta suy ra

$$\sum_{i=1}^n \frac{\partial f_k}{\partial s_i} \ddot{s}_i = - \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 f_k}{\partial s_j \partial s_i} \dot{s}_i \dot{s}_j - 2 \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 f_k}{\partial t \partial s_i} \dot{s}_i - \frac{\partial^2 f_k}{\partial t^2} = 0 \quad (k=1, \dots, r) \quad (3.8)$$

Các phương trình (3.8) có thể viết gọn lại dưới dạng ma trận

$$\Phi_s \ddot{\mathbf{s}} = \mathbf{p}_2 \quad (3.9)$$

Trong đó $\mathbf{p}_2 = [p_1^{(2)}, \dots, p_r^{(2)}]^T$,

$$p_k^{(2)} = - \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 f_k}{\partial s_j \partial s_i} \dot{s}_i \dot{s}_j - 2 \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 f_k}{\partial t \partial s_i} \dot{s}_i - \frac{\partial^2 f_k}{\partial t^2}$$

Kết hợp phương trình (3.1) và phương trình (3.9) ta được:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{M} & \Phi_s^T \\ \Phi_s & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{s}} \\ \lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{p}_1 \\ \mathbf{p}_2 \end{bmatrix} \quad (3.10)$$

Hệ phương trình (3.10) được gọi là hệ phương trình vi phân chuyển động của hệ nhiều vật với các điều kiện ràng buộc dạng vi phân.

Nếu ta thực hiện phép đổi biến:

$$\mathbf{y}_1 = \mathbf{s}, \quad \mathbf{y}_2 = \dot{\mathbf{y}}_1 = \dot{\mathbf{s}}, \quad \dot{\mathbf{y}}_2 = \ddot{\mathbf{s}} \quad (3.11)$$

thì hệ phương trình (3.10) được biến đổi về dạng

$$\begin{bmatrix} \mathbf{E} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{M} & \Phi_s^T \\ \mathbf{0} & \Phi_s & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{y}}_1 \\ \dot{\mathbf{y}}_2 \\ \lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{y}_2 \\ \mathbf{p}_1 \\ \mathbf{p}_2 \end{bmatrix} \quad (3.12)$$

Hệ phương trình (3.12) được gọi là hệ phương trình vi phân chuyển động của hệ nhiều vật holo-nôm với các điều kiện ràng buộc dạng vi phân.

b) Sự tương đương của hệ phương trình (3.1), (3.2) và hệ phương trình (3.10)

Về sự tương đương của hai hệ phương trình (3.10) và (3.1), (3.2) ta chứng minh hai định lý sau.

Định lý 1. Nếu $\mathbf{s}^*(t)$ là nghiệm của hệ phương trình (3.1), (3.2) với các điều kiện đầu $\mathbf{s}^*(t_0) = \mathbf{s}_0$ và $\dot{\mathbf{s}}^*(t_0) = \dot{\mathbf{s}}_0$ thì $\mathbf{s}^*(t)$ cũng là nghiệm của hệ phương trình (3.10) với cùng các điều kiện đầu trên.

Chứng minh. Nếu $\mathbf{s}^*(t)$ là nghiệm của hệ phương trình (3.1) và (3.2) ta có đồng nhất thức

$$\mathbf{f}[\mathbf{s}^*(t), t] \equiv \mathbf{0} \quad (3.13)$$

Do đó ta có

$$\Phi_s[\mathbf{s}^*(t), t] \dot{\mathbf{s}}^*(t) \equiv \mathbf{p}_2[\mathbf{s}^*(t), \dot{\mathbf{s}}^*(t), t] \quad (3.14)$$

Định lý 2. Nếu $\mathbf{s}^*(t)$ là nghiệm của hệ phương trình (3.10) với các điều kiện đầu $\mathbf{s}^*(t_0) = \mathbf{s}_0$ và $\dot{\mathbf{s}}^*(t_0) = \dot{\mathbf{s}}_0$ thì $\mathbf{s}^*(t)$ cũng là nghiệm của hệ phương trình (3.1), (3.2) với cùng điều kiện đầu, nếu như $\mathbf{s}_0, \dot{\mathbf{s}}_0$ thoả mãn các phương trình sau:

$$\mathbf{f}(\mathbf{s}_0, t_0) = \mathbf{0} \quad (3.15)$$

$$\dot{\mathbf{f}}(\mathbf{s}_0, \dot{\mathbf{s}}_0, t_0) = \mathbf{0} \quad (3.16)$$

Chứng minh. Nếu $\mathbf{s}^*(t)$ là nghiệm của hệ phương trình (3.10) thì ta có hệ thức

$$\ddot{\mathbf{f}} = \Phi_s[\mathbf{s}^*(t), t] \dot{\mathbf{s}}^*(t) - \mathbf{p}_2[\mathbf{s}^*(t), \dot{\mathbf{s}}^*(t), t] \equiv \mathbf{0}$$

Từ đó suy ra

$$\dot{\mathbf{f}} \equiv \mathbf{C}_1$$

$$\mathbf{f} \equiv \mathbf{C}_1 t + \mathbf{C}_2$$

Từ các điều kiện (3.15) và (3.16) ta suy ra $\mathbf{C}_1 = \mathbf{C}_2 = \mathbf{0}$. Do đó ta có

$$\mathbf{f}[\mathbf{s}^*(t), t] \equiv \mathbf{0}$$

c) *Xác định các điều kiện đầu của các tọa độ suy rộng phụ thuộc và các vận tốc suy rộng phụ thuộc*

Khi giải hệ phương trình vi phân chuyển động của hệ nhiều vật có f bậc tự do, ta phải cho trước f giá trị đầu của các tọa độ suy rộng độc lập và các vận tốc suy rộng độc lập $q_1(0), \dots, q_f(0), \dot{q}_1(0), \dots, \dot{q}_f(0)$. Trong hệ phương trình (3.10) còn có r tọa độ suy rộng dư $z_1(t), \dots, z_r(t)$. Vì vậy ta còn phải xác định các điều kiện đầu của các tọa độ suy rộng và các vận tốc suy rộng dư. Theo định lý 2 ở trên ta có:

$$f_j(q_1(0), \dots, q_f(0), z_1(0), \dots, z_r(0), 0) = 0, \quad (j = 1, \dots, r) \quad (3.17)$$

$$\sum_{i=1}^f \frac{\partial f_j}{\partial q_i}(0) \dot{q}_i(0) + \sum_{k=1}^r \frac{\partial f_j}{\partial z_k}(0) \dot{z}_k(0) + \frac{\partial f_j}{\partial t}(0) = 0, \quad (j = 1, \dots, r) \quad (3.18)$$

Từ phương trình liên kết (3.17) khi biết $q_1(0), \dots, q_f(0)$ ta dễ dàng xác định được các giá trị gần đúng của $z_1(0), \dots, z_r(0)$ (chẳng hạn bằng phương pháp đồ thị). Lấy các giá trị này làm giá trị đầu, giải hệ phương trình đại số phi tuyến bằng phương pháp lặp Newton-Raphson tìm được các giá trị đầu của các tọa độ suy rộng dư khá chính xác.

Để xác định các giá trị đầu của các vận tốc suy rộng dư, ta xét hệ phương trình (3.18)

$$\sum_{k=1}^r \frac{\partial f_j}{\partial z_k}(0) \dot{z}_k(0) = -\sum_{i=1}^f \frac{\partial f_j}{\partial q_i}(0) \dot{q}_i(0) - \frac{\partial f_j}{\partial t}(0), \quad (j = 1, \dots, r) \quad (3.19)$$

Hệ (3.19) là hệ r phương trình đại số tuyến tính của r ẩn là $\dot{z}_1(0), \dots, \dot{z}_r(0)$. Giải hệ phương trình đại số này ta xác định được các giá trị đầu của các vận tốc suy rộng dư.

d) *Giải hệ phương trình (3.10)*

Giả thiết ma trận

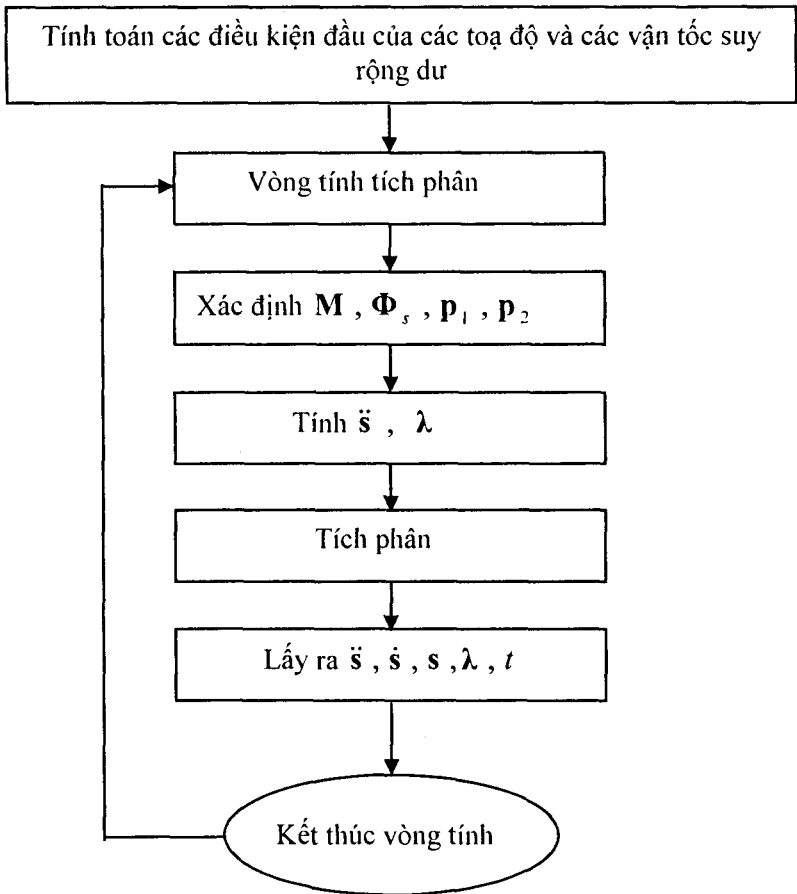
$$\begin{bmatrix} \mathbf{M} & \Phi_s^T \\ \Phi_s & \mathbf{0} \end{bmatrix}$$

là ma trận không suy biến. Khi đó từ hệ phương trình (3.10) ta suy ra

$$\ddot{s}_i = h_i(s_1, \dots, s_n, \dot{s}_1, \dots, \dot{s}_n, t) \quad (i=1, \dots, n) \quad (3.20)$$

$$\lambda_j = \lambda_j(s_1, \dots, s_n, \dot{s}_1, \dots, \dot{s}_n, t) \quad (j=1, \dots, r) \quad (3.21)$$

Việc tìm biểu thức giải tích của \ddot{s}_i và λ_j nói chung rất khó khăn. Vì vậy nên sử dụng phương pháp số để giải. Sau đó dùng phương pháp số (chẳng hạn phương pháp Runge-Kutta-Nyström) giải hệ phương trình vi phân thường (3.20). Từ đó tính được các thừa số Lagrange λ_j . Chú ý rằng các thừa số λ_j là một phần của các phân lực liên kết tại các khớp của hệ nhiều vật. Sơ đồ khối của phương pháp giải trình bày trên hình 6.4.



Hình 6.4

Bạn đọc nào quan tâm đến việc giải các phương trình vi phân - đại số của hệ nhiều vật theo phương pháp này có thể tìm đọc các tài liệu của Nguyen Van Khang (1973, 1975),...

3.2 Phương pháp biến đổi về các tọa độ suy rộng độc lập

Ý tưởng cơ bản của phương pháp này là: Khử các tọa độ suy rộng phụ thuộc và các nhân tử Lagrange, biến đổi hệ phương trình vi phân đại số (3.1), (3.2) về hệ phương trình vi phân thường với số phương trình bằng số bậc tự do của hệ.

Để đơn giản ta xét các liên kết bổ xung không phụ thuộc hiện vào thời gian. Các phương trình liên kết (3.2) có dạng:

$$f_k(s_1, \dots, s_n) = 0, \quad (k=1, \dots, r) \quad (3.22)$$

Các phương trình (3.6) bây giờ có dạng

$$\sum_{i=1}^n \frac{\partial f_k}{\partial s_i} \dot{s}_i = 0, \quad (k=1, \dots, r) \quad (3.23)$$

Ta phân tập các tọa độ vật lý s_1, \dots, s_n thành hai tập con

q_1, \dots, q_f : Tập các tọa độ suy rộng độc lập.

z_1, \dots, z_r : Tập các tọa độ suy rộng phụ thuộc.

Chú ý rằng $f+r=n$. Số lượng các tọa độ suy rộng phụ thuộc bằng số lượng các phương trình liên kết bổ xung. Giả sử từ (3.22) ta giải ra (bằng phương pháp giải tích hoặc bằng thuật toán số) hệ thức $\mathbf{z} = \mathbf{z}(\mathbf{q})$.

Ta sắp xếp lại các phương trình (3.23) dưới dạng như sau

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial z_1} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial z_r} | \frac{\partial f_1}{\partial q_1} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial q_f} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial f_r}{\partial z_1} & \dots & \frac{\partial f_r}{\partial z_r} | \frac{\partial f_r}{\partial q_1} & \dots & \frac{\partial f_r}{\partial q_f} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{z}_1 \\ \vdots \\ \dot{z}_r \\ \dot{q}_1 \\ \vdots \\ \dot{q}_f \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.24)$$

Ta đưa vào các ký hiệu

$$\Phi_z(\mathbf{q}, \mathbf{z}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial z_1} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial z_r} \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial f_r}{\partial z_1} & \dots & \frac{\partial f_r}{\partial z_r} \end{bmatrix}, \quad \Phi_q(\mathbf{q}, \mathbf{z}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial q_1} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial q_f} \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial f_r}{\partial q_1} & \dots & \frac{\partial f_r}{\partial q_f} \end{bmatrix} \quad (3.25)$$

Với các ký hiệu đưa vào ở trên phương trình (3.24) có thể viết lại dưới dạng

$$\Phi_z(\mathbf{q}, \mathbf{z})\dot{\mathbf{z}} + \Phi_q(\mathbf{q}, \mathbf{z})\dot{\mathbf{q}} = \mathbf{0} \quad (3.26)$$

Trong đó Φ_z là ma trận vuông cỡ $r \times r$, còn Φ_q là ma trận chữ nhật cỡ $r \times f$. Giả sử Φ_z là ma trận không suy biến, $\det \Phi_z \neq 0$, từ (3.26) ta suy ra

$$\dot{z} = -\Phi_z^{-1}(\mathbf{q}, \mathbf{z})\Phi_q(\mathbf{q}, \mathbf{z})\dot{\mathbf{q}} \quad (3.27)$$

Nếu ta đưa vào phương trình đồng nhất

$$\dot{\mathbf{q}} = \mathbf{E}\dot{\mathbf{q}}, \quad \mathbf{E} \text{ là ma trận vuông cấp } f. \quad (3.28)$$

thì các phương trình (3.27), (3.28) có thể viết gộp lại thành một phương trình ma trận như sau

$$\dot{\mathbf{s}} = \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{q}} \\ \dot{\mathbf{z}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{E} \\ -\Phi_z^{-1}\Phi_q \end{bmatrix} \dot{\mathbf{q}} \quad (3.29)$$

Nếu ta đưa vào ký hiệu

$$\mathbf{R}(\mathbf{q}, \mathbf{z}) = \begin{bmatrix} \mathbf{E} \\ -\Phi_z^{-1}\Phi_q \end{bmatrix} \quad (3.30)$$

thì phương trình (3.29) được viết gọn lại dưới dạng

$$\dot{\mathbf{s}} = \mathbf{R}(\mathbf{q}, \mathbf{z})\dot{\mathbf{q}} \quad (3.31)$$

Trở lại phương trình (3.23). Phương trình này cũng có thể viết dưới dạng ma trận như sau

$$\Phi_s \dot{\mathbf{s}} = \mathbf{0} \quad (3.32)$$

Trong đó

$$\Phi_s = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial s_1} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial s_n} \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial f_r}{\partial s_1} & \dots & \frac{\partial f_r}{\partial s_n} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial q_1} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial q_f} & \frac{\partial f_1}{\partial z_1} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial z_r} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial f_r}{\partial q_1} & \dots & \frac{\partial f_r}{\partial q_f} & \frac{\partial f_r}{\partial z_1} & \dots & \frac{\partial f_r}{\partial z_r} \end{bmatrix} \quad (3.33)$$

Thế biểu thức (3.31) vào phương trình (3.32) ta được

$$\Phi_s(\mathbf{q}, \mathbf{z})\mathbf{R}(\mathbf{q}, \mathbf{z})\dot{\mathbf{q}} = \mathbf{0} \quad (3.34)$$

Do $\dot{q}_1, \dots, \dot{q}_f$ là độc lập tuyến tính nên từ (3.34) ta suy ra hệ thức

$$\Phi_s(\mathbf{q}, \mathbf{z})\mathbf{R}(\mathbf{q}, \mathbf{z}) = \mathbf{0} \quad (3.35)$$

Từ đó ta có

$$\mathbf{R}^T(\mathbf{q}, \mathbf{z})\Phi_s^T(\mathbf{q}, \mathbf{z}) = \mathbf{0} \quad (3.36)$$

Trở lại phương trình Lagrange dạng nhân tử (3.1)

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{s}} + \Phi_s^T \Lambda = \mathbf{p}_1 \quad (3.37)$$

Nhân bên trái phương trình trên với ma trận \mathbf{R}^T ta được

$$\mathbf{R}^T \mathbf{M} \ddot{\mathbf{s}} + \mathbf{R}^T \Phi_s^T \Lambda = \mathbf{R}^T \mathbf{p}_1 \quad (3.38)$$

Chú ý đến công thức (3.36), từ (3.38) ta suy ra

$$\mathbf{R}^T \mathbf{M} \ddot{\mathbf{s}} = \mathbf{R}^T \mathbf{p}_1 \quad (3.39)$$

Đạo hàm theo thời gian biểu thức (3.31) ta được

$$\dot{\mathbf{s}} = \mathbf{R} \dot{\mathbf{q}} + \dot{\mathbf{R}} \mathbf{q} \quad (3.40)$$

Thế biểu thức (3.40) vào phương trình (3.39) ta có

$$\mathbf{R}^T \mathbf{M} (\mathbf{R} \dot{\mathbf{q}} + \dot{\mathbf{R}} \mathbf{q}) = \mathbf{R}^T \mathbf{p}_1$$

hay

$$\mathbf{R}^T \mathbf{M} \mathbf{R} \dot{\mathbf{q}} = \mathbf{R}^T \mathbf{p}_1 - \mathbf{R}^T \mathbf{M} \dot{\mathbf{R}} \mathbf{q} \quad (3.41)$$

Phương trình (3.41) là phương trình vi phân chuyển động của hệ nhiều vật có cấu trúc mạch vòng trong các tọa độ suy rộng độc lập. Trong đó \mathbf{M} là ma trận khối lượng, còn ma trận \mathbf{R} được xác định bởi công thức (3.30). Phương trình (3.41) có thể biến đổi về dạng

$$\ddot{\mathbf{q}} = (\mathbf{R}^T \mathbf{M} \mathbf{R})^{-1} (\mathbf{R}^T \mathbf{p}_1 - \mathbf{R}^T \mathbf{M} \dot{\mathbf{R}} \dot{\mathbf{q}}) = \mathbf{g}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) \quad (3.42)$$

Chú ý. Khi tính toán dao động phi tuyến của cơ hệ nhiều vật hólônôm ta nên biến đổi hệ phương trình vi phân dao động của hệ về các tọa độ tối thiểu. Khi đó ta nhận được một số lượng tối thiểu các phương trình vi phân mô tả dao động của hệ.

3.3 Phương pháp giải trực tiếp hệ phương trình vi phân- đại số

Trong hai phần trên chúng ta đã bàn về việc giải hệ phương trình vi phân đại số

$$\mathbf{M}(\mathbf{s}) \ddot{\mathbf{s}} + \Phi_s^T \Lambda = \mathbf{p}_1(\mathbf{s}, \dot{\mathbf{s}}) \quad (3.43)$$

$$\mathbf{f}(\mathbf{s}) = \mathbf{0} \quad (3.44)$$

bằng cách biến đổi chúng về hệ phương trình vi phân thường. Hiện nay đã có khá nhiều phương pháp giải trực tiếp hệ phương trình (3.43), (3.44). Trong đoạn này ta trình bày một ý tưởng giải trực tiếp hệ phương trình vi phân đại số trên.

Ta đưa vào biến mới $\mathbf{v} = \dot{\mathbf{s}}$, hệ phương trình (3.43), (3.44) có thể viết lại dưới dạng

$$\mathbf{M}(\mathbf{s}) \dot{\mathbf{v}} = -\Phi_s^T \Lambda + \mathbf{p}_1(\mathbf{s}, \mathbf{v}) \quad (3.45)$$

$$\dot{\mathbf{s}} = \mathbf{v} \quad (3.46)$$

$$\mathbf{f}(\mathbf{s}) = \mathbf{0} \quad (3.47)$$

Nếu thực hiện phép đổi biến

$$\mathbf{y} = [\mathbf{s}^T, \mathbf{v}^T, \Lambda^T]^T \quad (3.48)$$

hệ phương trình (3.45), (3.46), (3.47) có thể viết lại dưới dạng

$$\mathbf{g}(\mathbf{y}, \dot{\mathbf{y}}, t) = 0 \quad (3.49)$$

Giả sử tại bước lặp thứ j ta có thể xác định được $\mathbf{y}_j, \dot{\mathbf{y}}_j$. Khai triển Taylor véc tơ hàm $\mathbf{g}(\mathbf{y}, \dot{\mathbf{y}}, t)$ quanh vị trí trên ta được

$$\mathbf{g}(\mathbf{y}_j + \Delta\mathbf{y}_j, \dot{\mathbf{y}}_j + \Delta\dot{\mathbf{y}}_j, t_j) = \mathbf{g}_j + \frac{\partial\mathbf{g}}{\partial\mathbf{y}}\Delta\mathbf{y}_j + \frac{\partial\mathbf{g}}{\partial\dot{\mathbf{y}}}\Delta\dot{\mathbf{y}}_j + \dots = 0 \quad (3.50)$$

Sử dụng sơ đồ tích phân nhiều bước ẩn, ta có công thức

$$\mathbf{y}_{j+1} = \sum_{i=1}^k \alpha_i \mathbf{y}_{j-i+1} - h\beta_0 \dot{\mathbf{y}}_{j+1} \quad (3.51)$$

Từ đó ta có thể chọn một xấp xỉ đơn giản

$$\Delta\dot{\mathbf{y}}_j = -\frac{1}{h\beta_0} \Delta\mathbf{y}_j \quad (3.52)$$

Thế biểu thức (3.52) vào hệ thức (3.50) ta được

$$\mathbf{g}_j + \frac{\partial\mathbf{g}}{\partial\mathbf{y}}\Big|_j \Delta\mathbf{y}_j + \frac{\partial\mathbf{g}}{\partial\dot{\mathbf{y}}}\Big|_j \left(-\frac{1}{h\beta_0} \Delta\mathbf{y}_j\right) \approx 0 \quad (3.53)$$

Từ (3.53) suy ra hệ phương trình đại số tuyến tính xác định $\Delta\mathbf{y}_j$

$$\left[\frac{\partial\mathbf{g}}{\partial\mathbf{y}}\Big|_j - \frac{1}{h\beta_0} \frac{\partial\mathbf{g}}{\partial\dot{\mathbf{y}}}\Big|_j \right] \Delta\mathbf{y}_j = -\mathbf{g}_j \quad (3.54)$$

Từ đó xác định công thức xác định các đại lượng $\mathbf{y}, \dot{\mathbf{y}}$ ở bước tiếp theo

$$\mathbf{y}_{j+1} = \mathbf{y}_j + \Delta\mathbf{y}_j, \dot{\mathbf{y}}_{j+1} = \dot{\mathbf{y}}_j + \Delta\dot{\mathbf{y}}_j \quad (3.55)$$

Như thế các bước tính toán được thực hiện theo trình tự sau:

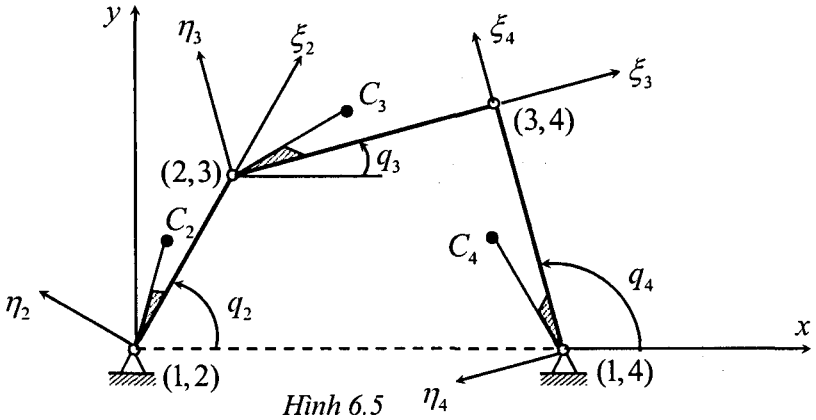
- 1) Các giá trị dự báo $\mathbf{y}_j, \dot{\mathbf{y}}_j$,
- 2) Tính \mathbf{g}_j . Nếu có sai số lớn ($|\mathbf{g}_j| < \varepsilon$ không thoả mãn, với ε là tham số bé cho trước), chuyển sang bước 5,
- 3) Giải phương trình (3.54), tính $\Delta\mathbf{y}_j$. Sau đó tính $\mathbf{y}_{j+1}, \dot{\mathbf{y}}_{j+1}$ theo (3.55),
- 4) Trở lại bước 2.
- 5) Điều khiển bước lấy tích phân và các thủ thuật khác làm tăng độ chính xác của thuật toán, sau đó chuyển sang bước 3.

Việc sử dụng phương pháp số giải trực tiếp các phương trình vi phân đại số thường mắc phải sai số lớn hơn so với các phương pháp giải hệ phương trình vi phân

thường (Phương pháp thứ nhất và Phương pháp thứ hai). Chính vì vậy việc nâng cao độ chính xác của cách giải trực tiếp hệ phương trình vi phân-đại số còn đang được nghiên cứu tiếp. Ban đọc nào quan tâm đến vấn đề này có thể tìm đọc C. W. Gear (1984), E. Eich-Söllner and C. Fuehrer (1998), D. Negrut, E.J. Haug, and H.C. German (2003), X. Wang, E.J. Haug, and W. Pan (2005),...

3.4 Các thí dụ áp dụng

Thí dụ 6.3. Cho biết phương trình chuyển động dạng vi phân đại số của cơ cấu bốn khâu (hình 6.5). Tìm qui trình giải bằng số hệ phương trình chuyển động này.



Hình 6.5

Lời giải. Theo thí dụ 5.17, Chương 5, hệ phương trình vi phân đại số mô tả chuyển động của cơ cấu bốn khâu có dạng.

$$\begin{aligned} & (I_2 + m_2 \xi_{C_2}^2 + m_3 l_2^2) \ddot{q}_2 + m_3 l_2 [\xi_{C_3} \cos(q_2 - q_3) + \eta_{C_3} \sin(q_2 - q_3)] \ddot{q}_3 \\ & + m_3 l_2 [-\xi_{C_3} \sin(q_2 - q_3) + \eta_{C_3} \cos(q_2 - q_3)] \dot{q}_3^2 \\ & = \tau_2 - (m_2 \xi_{C_2} + m_3 l_2) g \cos q_2 - \lambda_1 l_2 \sin q_2 + \lambda_2 l_2 \cos q_2 \end{aligned} \quad (1)$$

$$\begin{aligned} & m_3 l_2 [\xi_{C_3} \cos(q_2 - q_3) + \eta_{C_3} \sin(q_2 - q_3)] \ddot{q}_2 + [I_3 + m_3 (\xi_{C_3}^2 + \eta_{C_3}^2)] \ddot{q}_3 \\ & + m_3 l_2 [\xi_{C_3} \sin(q_2 - q_3) - \eta_{C_3} \cos(q_2 - q_3)] \dot{q}_2^2 \\ & = -m_3 g (\xi_{C_3} \cos q_3 - \eta_{C_3} \sin q_3) - \lambda_1 l_3 \sin q_3 + \lambda_2 l_2 \cos q_3 \end{aligned} \quad (2)$$

$$[I_4 + m_4 (\xi_{C_4}^2 + \eta_{C_4}^2)] \ddot{q}_4 = -m_4 g (\xi_{C_4} \cos q_4 - \eta_{C_4} \sin q_4) + \lambda_1 l_4 \cos q_4 - \lambda_2 l_4 \sin q_4 \quad (3)$$

Ngoài ra ta có thêm hai phương trình liên kết bổ sung

$$\begin{aligned} f_1 &= l_2 \cos q_2 + l_3 \cos q_3 - l_4 \cos q_4 - x_{14} = 0 \\ f_2 &= l_2 \sin q_2 + l_3 \sin q_3 - l_4 \sin q_4 = 0 \end{aligned} \quad (4)$$

Đạo hàm các phương trình liên kết (4) theo thời gian ta được

$$\dot{f}_1 = -l_2 \dot{q}_2 \sin q_2 - l_3 \dot{q}_3 \sin q_3 + l_4 \dot{q}_4 \sin q_4 = 0 \quad (5)$$

$$\dot{f}_2 = l_2 \dot{q}_2 \cos q_2 + l_3 \dot{q}_3 \cos q_3 - l_4 \dot{q}_4 \cos q_4 = 0 \quad (6)$$

Đạo hàm lần nữa của phương trình (5) và (6) theo thời gian, ta suy ra hệ hai phương trình sau

$$-l_2 \ddot{q}_2 \sin q_2 - l_3 \ddot{q}_3 \sin q_3 + l_4 \ddot{q}_4 \sin q_4 = l_2 \dot{q}_2^2 \cos q_2 + l_3 \dot{q}_3^2 \cos q_3 - l_4 \dot{q}_4^2 \cos q_4 \quad (7)$$

$$l_2 \ddot{q}_2 \cos q_2 + l_3 \ddot{q}_3 \cos q_3 - l_4 \ddot{q}_4 \cos q_4 = l_2 \dot{q}_2^2 \sin q_2 + l_3 \dot{q}_3^2 \sin q_3 - l_4 \dot{q}_4^2 \sin q_4 \quad (8)$$

Các phương trình (1), (2), (3), (7), (8) có thể viết gọn lại dưới dạng ma trận như sau

$$\begin{bmatrix} \mathbf{M} & \Phi_q^T \\ \Phi_q & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\mathbf{q}} \\ \lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{p}_1 \\ \mathbf{p}_2 \end{bmatrix} \quad (9)$$

Trong đó

$$\Phi_q = \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{q}} = \begin{bmatrix} -l_2 \sin q_2 & -l_3 \sin q_3 & l_4 \sin q_4 \\ l_2 \cos q_2 & l_3 \cos q_3 & -l_4 \cos q_4 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} m_{22} & m_{23} & m_{24} \\ m_{32} & m_{33} & m_{34} \\ m_{42} & m_{43} & m_{44} \end{bmatrix}$$

Các phần tử của ma trận \mathbf{M} và của các véctơ \mathbf{p}_1 , \mathbf{p}_2 có dạng

$$m_{22} = I_2 + m_2 \xi_{C3}^2 + m_3 l_2^2, \quad m_{23} = m_{32} = m_3 l_2 [\xi_{C3} \cos(q_2 - q_3) + \eta_{C3} \sin(q_2 - q_3)]$$

$$m_{24} = m_{42} = 0$$

$$m_{33} = I_3 + m_3 (\xi_{C3}^2 + \eta_{C3}^2), \quad m_{34} = m_{43} = 0$$

$$m_{44} = I_4 + m_4 (\xi_{C4}^2 + \eta_{C4}^2)$$

$$p_1^{(1)} = -m_3 l_2 [-\xi_{C3} \sin(q_2 - q_3) + \eta_{C3} \cos(q_2 - q_3)] \dot{q}_3^2 - (m_2 \xi_{C3} + m_3 l_2) g \cos q_2 + \tau_2$$

$$p_2^{(1)} = -m_3 l_2 [\xi_{C3} \sin(q_2 - q_3) - \eta_{C3} \cos(q_2 - q_3)] \dot{q}_2^2 - m_3 g (\xi_{C3} \cos q_3 - \eta_{C3} \sin q_3)$$

$$p_3^{(1)} = -m_4 g (\xi_{C4} \cos q_4 - \eta_{C4} \sin q_4)$$

$$p_1^{(2)} = l_2 \dot{q}_2^2 \cos q_2 + l_3 \dot{q}_3^2 \cos q_3 - l_4 \dot{q}_4^2 \cos q_4$$

$$p_2^{(2)} = l_2 \dot{q}_2^2 \sin q_2 + l_3 \dot{q}_3^2 \sin q_3 - l_4 \dot{q}_4^2 \sin q_4$$

Từ hệ phương trình (9), ta có thể giải ra được

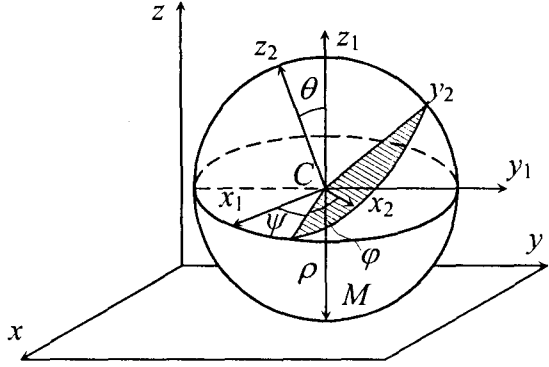
$$\ddot{\mathbf{q}} = \mathbf{r}_1(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) \quad (10)$$

$$\lambda = \lambda(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) \quad (11)$$

Trong thí dụ này ta phải cho biết các điều kiện đầu $q_2(0), \dot{q}_2(0)$. Từ (5) và (6) ta tìm được $\dot{q}_3(0), \dot{q}_4(0)$. Từ (4) ta tìm được $q_3(0), q_4(0)$. Biết các điều kiện đầu này, dễ dàng giải hệ phương trình (10) bằng phương pháp số, chẳng hạn phương pháp Runge-Kutta-Nyström.

Thí dụ 6.4. Cho biết phương trình chuyển động của quả cầu lăn không trượt trên mặt phẳng nhám (hình 6.4). Xây dựng qui trình tính toán chuyển động của quả cầu bằng phương pháp số.

Lời giải. Theo Thí dụ 5.18, Chương 5, ta có hệ năm phương trình chuyển động của quả cầu lăn không trượt trên mặt phẳng nhám



Hình 6.6

$$\begin{aligned}
 m\ddot{x}_c &= \mu_1; & m\ddot{y}_c &= \mu_2 \\
 I(\ddot{\phi} + \ddot{\psi} \cos \theta - \ddot{\psi} \dot{\theta} \sin \theta) &= -\mu_1 a \sin \theta \cos \psi - \mu_2 a \sin \theta \sin \psi \\
 I(\ddot{\psi} + \ddot{\phi} \cos \theta - \dot{\phi} \dot{\theta} \sin \theta) &= 0 \\
 I(\ddot{\theta} + \dot{\phi} \dot{\psi} \sin \theta) &= \mu_1 a \sin \psi - \mu_2 a \cos \psi
 \end{aligned} \tag{1}$$

Ngoài ra ta có hai phương trình liên kết phi hólônôm

$$\begin{aligned}
 \dot{x}_c + a\dot{\phi} \sin \theta \cos \psi - a\dot{\theta} \sin \psi &= 0 \\
 \dot{y}_c + a\dot{\phi} \sin \theta \sin \psi + a\dot{\theta} \cos \psi &= 0
 \end{aligned} \tag{2}$$

Trước hết ta khử các nhân tử Lagrange μ_1 và μ_2 . Thế hai biểu thức đầu của (1) vào các phương trình thứ ba và thứ năm của (1), ta được hệ ba phương trình thay cho năm phương trình (1)

$$I(\ddot{\phi} + \ddot{\psi} \cos \theta - \ddot{\psi} \dot{\theta} \sin \theta) = ma \sin \theta (\ddot{x}_c \cos \psi + \ddot{y}_c \sin \psi) \tag{3}$$

$$I(\ddot{\psi} + \ddot{\phi} \cos \theta - \dot{\phi} \dot{\theta} \sin \theta) = 0 \tag{4}$$

$$I(\ddot{\theta} + \dot{\phi} \dot{\psi} \sin \theta) = ma (\ddot{y}_c \cos \psi - \ddot{x}_c \sin \psi) \tag{5}$$

Đạo hàm các phương trình (2) theo thời gian ta được

$$\ddot{x}_c + a\ddot{\phi} \sin \theta \cos \psi - a\ddot{\theta} \sin \psi = -a\dot{\phi} \dot{\theta} \cos \theta \cos \psi + a\dot{\psi} \sin \theta \sin \psi + a\dot{\theta} \dot{\psi} \cos \psi \tag{6}$$

$$\ddot{y}_c + a\ddot{\phi} \sin \theta \sin \psi + a\ddot{\theta} \cos \psi = -a\dot{\phi} \dot{\theta} \cos \theta \sin \psi - a\dot{\psi} \sin \theta \cos \psi + a\dot{\theta} \dot{\psi} \sin \psi \tag{7}$$

Hệ các phương trình (3)-(7) có thể viết dưới dạng ma trận như sau

$$\begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} & m_{14} & m_{15} \\ m_{21} & m_{22} & m_{23} & m_{24} & m_{25} \\ m_{31} & m_{32} & m_{33} & m_{34} & m_{35} \\ m_{41} & m_{42} & m_{43} & m_{44} & m_{45} \\ m_{51} & m_{52} & m_{53} & m_{54} & m_{55} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{x}_c \\ \ddot{y}_c \\ \ddot{\psi} \\ \ddot{\theta} \\ \ddot{\varphi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \\ h_3 \\ h_4 \\ h_5 \end{bmatrix} \quad (8)$$

Trong đó:

$$\begin{aligned} m_{11} &= -ma \sin \theta \cos \psi, & m_{12} &= -ma \sin \theta \sin \psi \\ m_{13} &= I \cos \theta, & m_{14} &= 0, & m_{15} &= I \\ m_{21} &= 0, & m_{22} &= 0, & m_{23} &= I, & m_{24} &= 0, & m_{25} &= I \cos \theta \\ m_{31} &= ma \sin \psi, & m_{32} &= -ma \cos \psi, & m_{33} &= 0, & m_{34} &= I, & m_{35} &= 0 \\ m_{41} &= 1, & m_{42} &= 0, & m_{43} &= 0, & m_{44} &= -a \sin \psi, & m_{45} &= a \sin \theta \cos \theta \\ m_{51} &= 0, & m_{52} &= 1, & m_{53} &= 0, & m_{54} &= a \cos \psi, & m_{55} &= a \sin \theta \cos \psi \\ h_1 &= I \psi \dot{\theta} \sin \theta, & h_2 &= I \dot{\varphi} \dot{\theta} \sin \theta, & h_3 &= -I \dot{\varphi} \dot{\psi} \sin \theta \\ h_4 &= -a \dot{\varphi} \dot{\theta} \cos \theta \cos \psi + a \dot{\varphi} \dot{\psi} \sin \theta \sin \psi + a \dot{\theta} \dot{\psi} \cos \psi \\ h_5 &= -a \dot{\varphi} \dot{\theta} \cos \theta \sin \psi - a \dot{\varphi} \dot{\psi} \sin \theta \cos \psi + a \dot{\theta} \dot{\psi} \sin \psi \end{aligned}$$

Trong thí dụ này năm toạ độ $x_c, y_c, \psi, \theta, \varphi$ là các toạ độ tối thiểu nên phải cho trước các điều kiện đầu $x_c(0), y_c(0), \psi(0), \theta(0), \varphi(0)$. Hệ có ba bậc tự do cho nên ta chỉ có thể cho trước ba giá trị đầu của vận tốc suy rộng, chẳng hạn cho trước $\dot{x}_c(0), \dot{y}_c(0), \dot{\psi}(0)$, các giá trị đầu của hai vận tốc suy rộng còn lại được xác định từ các phương trình liên kết phi hólônôm (2). Biết được các điều kiện đầu ta có thể giải hệ phương trình (8) bằng phương pháp số.

§4 TUYẾN TÍNH HOÁ CÁC PHƯƠNG TRÌNH VI PHÂN CHUYỂN ĐỘNG CỦA HỆ NHIỀU VẬT

4.1 Thiết lập phương trình phi phân chuyển động tuyến tính hóa của hệ nhiều vật

Trong chương 5 ta đã biết, các phương trình vi phân chuyển động của hệ nhiều vật có cấu trúc cây là một hệ các phương trình vi phân thường cấp hai có dạng

$$\mathbf{M}(\mathbf{q}, t) \ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{k}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) = \mathbf{h}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) \quad (4.1)$$

Nếu áp dụng các phương trình Lagrange dạng nhân tử để thành lập các phương trình vi phân chuyển động của hệ nhiều vật có cấu trúc mạch vòng ta nhận được

một hệ các phương trình vi phân-đại số. Ta cũng có thể khử véc tơ nhân tử Lagrange và các tọa độ dư đưa hệ phương trình vi phân-đại số về hệ phương trình dạng (4.1) với số phương trình bằng số bậc tự do của hệ. Để giải hệ f phương trình vi phân cấp hai (4.1) ta cần phải có trước $2f$ các điều kiện đầu

$$\mathbf{q}(t_0) = \mathbf{q}_0, \dot{\mathbf{q}}(t_0) = \dot{\mathbf{q}}_0 \quad (4.2)$$

Các phương trình vi phân chuyển động (4.2), nói chung, là một hệ các phương trình vi phân phi tuyến liên quan nhau. Do tính phức tạp của hệ các phương trình vi phân chuyển động (4.1), chúng ta rất khó tìm nghiệm bằng phương pháp giải tích. Người ta thường hay xác định nghiệm của hệ (4.1) bằng các phương pháp số.

Trong nhiều bài toán kỹ thuật, các chuyển động $\mathbf{q}(t)$ của hệ nhiều vật thường giới hạn nằm ở lân cận một chuyển động $\mathbf{q}_R(t)$ đã cho trước. Chuyển động này trong các bài toán cụ thể thường được gọi là “chuyển động qui chiếu”, hoặc “chuyển động theo chương trình”, hoặc “chuyển động mong muốn”, hoặc “chuyển động cơ bản”, v.v... Trong tài liệu này chúng tôi qui ước gọi $\mathbf{q}_R(t)$ là “chuyển động cơ bản”.

Trường hợp đơn giản nhất của chuyển động cơ bản là vị trí cân bằng của hệ

$$\mathbf{q}_R = const \Rightarrow \dot{\mathbf{q}}_R = 0, \ddot{\mathbf{q}}_R = 0.$$

Trong động lực học robot, chuyển động cơ bản là các chuyển động của các đại lượng trạng thái, do chuyển động cho trước của khâu thao tác quyết định. Trong động lực học các hệ truyền động, chuyển động cơ bản là chuyển động sinh ra do khâu dẫn quay đều, các khâu khác xem là các khâu rắn, v.v...

Khi đã biết chuyển động cơ bản của hệ, ta có thể biến đổi hệ phương trình vi phân phi tuyến (4.1) về hệ phương trình vi phân tuyến tính một cách gần đúng. Việc biến đổi này thường được thực hiện nhờ khai triển Taylor các hàm phi tuyến trong (4.1) quanh các chuyển động cơ bản đã biết, sau đó bỏ qua các số hạng phi tuyến.

Nếu ký hiệu độ chênh lệch giữa chuyển động thực $\mathbf{q}(t)$ và chuyển động cơ bản mong muốn $\mathbf{q}_R(t)$ là $\Delta\mathbf{q}(t)$, ta có các hệ thức sau

$$\begin{aligned} \mathbf{q}(t) &= \mathbf{q}_R(t) + \Delta\mathbf{q}(t) \\ \dot{\mathbf{q}}(t) &= \dot{\mathbf{q}}_R(t) + \Delta\dot{\mathbf{q}}(t) \\ \ddot{\mathbf{q}}(t) &= \ddot{\mathbf{q}}_R(t) + \Delta\ddot{\mathbf{q}}(t) \end{aligned} \quad (4.3)$$

Để cho gọn sau đây ta ký hiệu

$$\Delta\mathbf{q}(t) = \mathbf{x}, \Delta\dot{\mathbf{q}}(t) = \dot{\mathbf{x}}, \Delta\ddot{\mathbf{q}}(t) = \ddot{\mathbf{x}} \quad (4.4)$$

Chuyển động xác định bởi \mathbf{x} được gọi là chuyển động phụ (additional motion) hoặc chuyển động nhiễu (perturbed motion).

Để thuận tiện cho các triển khai tính toán sau này ta nêu lên một vài định nghĩa sau đây.

- Chuyển động cơ bản của hệ các vật rắn là chuyển động theo chương trình làm việc đã định sẵn của hệ. Chuyển động phụ của hệ các vật rắn là độ lệch giữa chuyển động thực và chuyển động cơ bản của hệ.

- Chuyển động cơ bản của hệ nhiều vật gồm các vật rắn có các khớp nối đàn hồi, hoặc có một số khâu đàn hồi là chuyển động theo chương trình làm việc đã định sẵn của hệ khi bỏ qua ảnh hưởng của các phần tử đàn hồi. Khi đó chuyển động phụ của hệ là độ lệch giữa chuyển động thực và chuyển động cơ bản của hệ. Trong trường hợp này ta xem các chuyển động đàn hồi là nhỏ.

Trên cơ sở khái niệm chuyển động cơ bản và chuyển động phụ ta có thể tuyến tính hoá các phương trình vi phân chuyển động của hệ nhiều vật. Phương trình vi phân chuyển động (4.1) có thể viết lại dưới dạng như sau

$$\mathbf{f}(\ddot{\mathbf{q}}, \dot{\mathbf{q}}, \mathbf{q}, t) = \mathbf{h}(\dot{\mathbf{q}}, \mathbf{q}, t) \quad (4.5)$$

Trong đó ta ký hiệu:

$$\mathbf{f}(\ddot{\mathbf{q}}, \dot{\mathbf{q}}, \mathbf{q}, t) = \mathbf{M}(\mathbf{q}, t)\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{k}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \quad (4.6)$$

Khai triển Taylor hàm $\mathbf{f}(\ddot{\mathbf{q}}, \dot{\mathbf{q}}, \mathbf{q}, t)$ quanh chuyển động cơ bản $\mathbf{q}_R, \dot{\mathbf{q}}_R, \ddot{\mathbf{q}}_R$ ta được:

$$\begin{aligned} \mathbf{f}(\ddot{\mathbf{q}}, \dot{\mathbf{q}}, \mathbf{q}, t) &= \mathbf{f}(\ddot{\mathbf{q}}_R + \ddot{\mathbf{x}}, \dot{\mathbf{q}}_R + \dot{\mathbf{x}}, \mathbf{q}_R + \mathbf{x}, t) \\ &= \mathbf{f}(\ddot{\mathbf{q}}_R, \dot{\mathbf{q}}_R, \mathbf{q}_R, t) + \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \ddot{\mathbf{q}}}(\ddot{\mathbf{q}}_R, \dot{\mathbf{q}}_R, \mathbf{q}_R, t)\ddot{\mathbf{x}} + \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \dot{\mathbf{q}}}(\ddot{\mathbf{q}}_R, \dot{\mathbf{q}}_R, \mathbf{q}_R, t)\dot{\mathbf{x}} \\ &\quad + \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{q}}(\ddot{\mathbf{q}}_R, \dot{\mathbf{q}}_R, \mathbf{q}_R, t)\mathbf{x} + \text{các số hạng phi tuyến} \end{aligned} \quad (4.7)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{h}(\dot{\mathbf{q}}, \mathbf{q}, t) &= \mathbf{h}(\dot{\mathbf{q}}_R + \dot{\mathbf{x}}, \mathbf{q}_R + \mathbf{x}, t) \\ &= \mathbf{h}(\dot{\mathbf{q}}_R, \mathbf{q}_R, t) + \frac{\partial \mathbf{h}}{\partial \dot{\mathbf{q}}}(\dot{\mathbf{q}}_R, \mathbf{q}_R, t)\dot{\mathbf{x}} \\ &\quad + \frac{\partial \mathbf{h}}{\partial \mathbf{q}}(\dot{\mathbf{q}}_R, \mathbf{q}_R, t)\mathbf{x} + \text{các số hạng phi tuyến} \end{aligned} \quad (4.8)$$

Bỏ qua các số hạng phi tuyến trong (4.7), (4.8) thay chúng vào (4.1) ta được hệ phương trình vi phân tuyến tính:

$$\mathbf{M}(t)\ddot{\mathbf{x}} + \mathbf{C}(t)\dot{\mathbf{x}} + \mathbf{K}(t)\mathbf{x} = \mathbf{d}(t) \quad (4.9)$$

Trong đó

$$\begin{aligned} \mathbf{M}(t) &= \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \ddot{\mathbf{q}}}(\ddot{\mathbf{q}}_R, \dot{\mathbf{q}}_R, \mathbf{q}_R, t) \\ \mathbf{C}(t) &= \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \dot{\mathbf{q}}}(\ddot{\mathbf{q}}_R, \dot{\mathbf{q}}_R, \mathbf{q}_R, t) - \frac{\partial \mathbf{h}}{\partial \dot{\mathbf{q}}}(\dot{\mathbf{q}}_R, \mathbf{q}_R, t) \\ \mathbf{K}(t) &= \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{q}}(\ddot{\mathbf{q}}_R, \dot{\mathbf{q}}_R, \mathbf{q}_R, t) - \frac{\partial \mathbf{h}}{\partial \mathbf{q}}(\dot{\mathbf{q}}_R, \mathbf{q}_R, t) \\ \mathbf{d}(t) &= \mathbf{h}(\dot{\mathbf{q}}_R, \mathbf{q}_R, t) - \mathbf{f}(\ddot{\mathbf{q}}_R, \dot{\mathbf{q}}_R, \mathbf{q}_R, t) \end{aligned} \quad (4.10)$$

Để đưa hệ phương trình vi phân (4.9) về các phương trình trạng thái ta thực hiện phép đổi biến:

$$\mathbf{y} = \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \dot{\mathbf{x}} \end{bmatrix}, \quad \dot{\mathbf{y}} = \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{x}} \\ \ddot{\mathbf{x}} \end{bmatrix} \quad (4.11)$$

Với phép đổi biến (4.11) phương trình (4.7) được đưa về dạng:

$$\dot{\mathbf{y}} = \mathbf{P}(t)\mathbf{y} + \mathbf{f}(t) \quad (4.12)$$

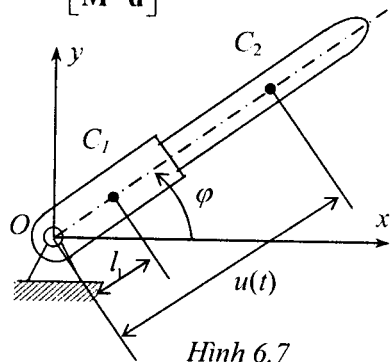
Trong đó

$$\mathbf{P}(t) = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & | & \mathbf{E} \\ \hline & & \\ \hline -\mathbf{M}^{-1}\mathbf{K} & | & -\mathbf{M}^{-1}\mathbf{C} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{f}(t) = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \hline \\ \hline \mathbf{M}^{-1}\mathbf{d} \end{bmatrix} \quad (4.13)$$

4.2 Các thí dụ áp dụng

Thí dụ 6.5. Thiết lập phương trình chuyển động tuyến tính hoá của rô bốt cực như hình 6.7.

Lời giải. Phương trình vi phân chuyển động của rô bốt tay máy cực (hình 6.7) có thể tìm được trong các giáo trình về Cơ học kỹ thuật. Các phương trình chuyển động có dạng



$$(I + m_2 u^2) \ddot{\phi} + 2m_2 u \dot{\phi} \dot{u} + (m_1 a + m_2 u) g \cos \phi = M(t) \quad (1)$$

$$m_2 \ddot{u} - m_2 u \dot{\phi}^2 + m_2 g \sin \phi = F(t) \quad (2)$$

Giả sử quỹ đạo chương trình của của tay máy là

$$u_R(t) = vt, \quad v = \text{const}, \quad 0 \leq t \leq t_1$$

$$\varphi_R(t) = \omega t, \quad \omega = \text{const}, \quad 0 \leq t \leq t_1 \quad (2)$$

Để tuyến tính hoá phương trình trên ta đặt

$$u(t) = u_R(t) + x_1$$

$$\varphi(t) = \varphi_R(t) + x_2 \quad (3)$$

Ta đưa vào các ký hiệu

$$f_1 = (I + m_2 u^2) \ddot{\phi} + 2m_2 u \dot{\phi} \dot{u} + (m_1 a + m_2 u) g \cos \phi \quad (4)$$

$$f_2 = m_2 \ddot{u} - m_2 u \dot{\phi}^2 + m_2 g \sin \phi \quad (5)$$

Hệ phương trình (1) bây giờ có dạng

$$f_1(u, \dot{u}, \ddot{u}, \varphi, \dot{\varphi}, \ddot{\varphi}) = M(t) \quad (6)$$

$$f_2(u, \dot{u}, \ddot{u}, \varphi, \dot{\varphi}, \ddot{\varphi}) = F(t) \quad (6)$$

Biểu thức đạo hàm riêng của các hàm trên

$$\frac{\partial f_1}{\partial \ddot{u}} = 0, \quad \frac{\partial f_1}{\partial \dot{u}} = 2m_2 u \dot{\varphi}, \quad \frac{\partial f_1}{\partial u} = 2m_2 u \ddot{\varphi} + 2m_2 \dot{\varphi} \dot{u} + m_2 g \cos \varphi \quad (7)$$

$$\frac{\partial f_1}{\partial \ddot{\varphi}} = I + m_2 u^2, \quad \frac{\partial f_1}{\partial \dot{\varphi}} = 2m_2 u \dot{u}, \quad \frac{\partial f_1}{\partial \varphi} = -(m_1 a + m_2 u) g \sin \varphi$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial \ddot{u}} = m_2, \quad \frac{\partial f_2}{\partial \dot{u}} = 0, \quad \frac{\partial f_2}{\partial u} = -m_2 \dot{\varphi}^2 \quad (8)$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial \ddot{\varphi}} = 0, \quad \frac{\partial f_2}{\partial \dot{\varphi}} = -2m_2 u \dot{\varphi}, \quad \frac{\partial f_2}{\partial \varphi} = m_2 g \cos \varphi$$

Tương ứng với phương trình (4.9) các ma trận $\mathbf{M}(t)$, $\mathbf{C}(t)$, $\mathbf{K}(t)$ trong thí dụ này có dạng

$$\mathbf{M}(t) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial \ddot{\varphi}} & \frac{\partial f_1}{\partial \ddot{u}} \\ \frac{\partial f_2}{\partial \ddot{\varphi}} & \frac{\partial f_2}{\partial \ddot{u}} \end{bmatrix}_R = \begin{bmatrix} I + m_2 v^2 t^2 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{C}(t) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial \dot{\varphi}} & \frac{\partial f_1}{\partial \dot{u}} \\ \frac{\partial f_2}{\partial \dot{\varphi}} & \frac{\partial f_2}{\partial \dot{u}} \end{bmatrix}_R = \begin{bmatrix} 2m_2 v^2 t & 2m_2 \omega v t \\ -2m_2 \omega v t & 0 \end{bmatrix}$$

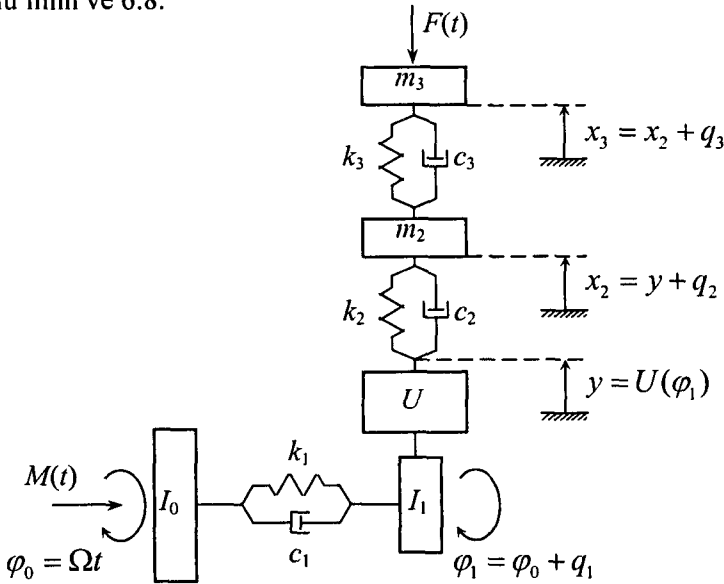
$$\mathbf{K}(t) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial \varphi} & \frac{\partial f_1}{\partial u} \\ \frac{\partial f_2}{\partial \varphi} & \frac{\partial f_2}{\partial u} \end{bmatrix}_R = \begin{bmatrix} -(m_1 a + m_2 v t) g \sin \omega t & 2m_2 v \omega + m_2 g \cos \omega t \\ m_2 g \cos \omega t & -m_2 \omega^2 \end{bmatrix}$$

Phương trình vi phân tuyến tính hoá quanh chuyển động theo chương trình có dạng

$$\begin{bmatrix} I + m_2 v^2 t^2 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2m_2 v^2 t & 2m_2 \omega v t \\ -2m_2 \omega v t & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -(m_1 a + m_2 v t) g \sin \omega t & 2m_2 v \omega + m_2 g \cos \omega t \\ m_2 g \cos \omega t & -m_2 \omega^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Delta M(t) \\ \Delta F(t) \end{bmatrix} \quad (9)$$

Trong đó $\Delta M(t)$, $\Delta F(t)$ là độ lệch giữa các lực suy rộng thực tế sử dụng và lực suy rộng cần thiết để tạo ra chuyển động qui chiếu.

Thí dụ 6.6. Thiết lập phương trình vi phân dao động tuyến tính hoá của hệ truyền động như hình vẽ 6.8.



Hình 6.8

Lời giải. Mô hình dao động như trên hình 6.8 là một hệ gồm các vật rắn nối ghép với nhau bằng các phần tử lò xo và phần tử cản tuyến tính, không khối lượng và hàm truyền \$U(\varphi_1)\$ phi tuyến. Các biểu thức động năng, thế năng của hệ có dạng

$$T = \frac{1}{2} I_0 \dot{\varphi}_0^2 + \frac{1}{2} I_1 \dot{\varphi}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 \dot{x}_2^2 + \frac{1}{2} m_3 \dot{x}_3^2 \quad (1)$$

$$\Pi = \frac{1}{2} k_1 (\varphi_1 - \varphi_0)^2 + \frac{1}{2} k_2 (x_2 - y)^2 + \frac{1}{2} k_3 (x_3 - x_2)^2 \quad (2)$$

Ta chọn các đại lượng \$\varphi_0, \varphi_1, q_2, q_3\$ làm các tọa độ suy rộng. Từ mô hình cơ học như hình vẽ 6.8 ta dễ dàng tính được các lực suy rộng ứng với các lực không có thế

$$\begin{aligned} Q_0^{np} &= M(t) + c_1 (\dot{\varphi}_1 - \dot{\varphi}_0) \\ Q_1^{np} &= -F(t)U' - c_1 (\dot{\varphi}_1 - \dot{\varphi}_0) \\ Q_2^{np} &= -F(t) - c_2 \dot{q}_2 \\ Q_3^{np} &= -F(t) - c_3 \dot{q}_3 \end{aligned} \quad (3)$$

Thế các biểu thức (1), (2) và (3) vào phương trình Lagrange loại hai

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} = -\frac{\partial \Pi}{\partial q_i} + Q_i^{np} \quad (4)$$

Ta nhận được các phương trình vi phân dao động của hệ truyền động như hình 6.8:

$$I_0\ddot{\phi}_0 - c_1(\dot{\phi}_1 - \dot{\phi}_0) - k_1(\phi_1 - \phi_0) = M(t) \quad (5)$$

$$\begin{aligned} [I_1 + (m_2 + m_3)U'^2] \ddot{\phi}_1 + (m_2 + m_3)U'\ddot{q}_2 + m_3U\ddot{q}_3 + (m_2 + m_3)U'U''\dot{\phi}_1^2 + \\ + c_1(\dot{\phi}_1 - \dot{\phi}_0) + k_1(\phi_1 - \phi_0) = -F(t)U' \end{aligned} \quad (6)$$

$$(m_2 + m_3)U'\ddot{\phi}_1 + (m_2 + m_3)\ddot{q}_2 + m_3\ddot{q}_3 + (m_2 + m_3)U''\dot{\phi}_1^2 + c_2\dot{q}_2 + k_2q_2 = -F(t) \quad (7)$$

$$m_3U'\ddot{\phi}_1 + m_3\ddot{q}_2 + m_3\ddot{q}_3 + m_3U''\dot{\phi}_1^2 + c_3\dot{q}_3 + k_3q_3 = -F(t) \quad (8)$$

Trong đó $U(\phi_1)$ là hàm truyền của cơ cấu. Ở trạng thái làm việc bình ổn ta xem gần đúng vận tốc góc Ω của khâu dẫn là hằng số. Do có phần tử đàn hồi k_1 và phần tử cản c_1 nên góc quay ϕ_1 của cam thay đổi một đại lượng nhỏ so với $\phi_0 = \Omega t$

$$\phi_1 = \Omega t + q_1 \quad (9)$$

Trong phạm vi dao động nhỏ, hàm truyền $y = U(\phi_1)$ phụ thuộc chủ yếu vào $\phi_0 = \Omega t$, và thay đổi nhỏ khi q_1 thay đổi. Do đó có thể khai triển Taylor hàm $U(\phi_1)$ tại vị trí Ωt

$$U(\Omega t + q_1) = \bar{U} + \bar{U}'q_1 + \frac{1}{2}\bar{U}''q_1^2 + \dots \quad (10)$$

Trong đó ta sử dụng ký hiệu

$$\bar{U} = U(\Omega t), \bar{U}' = U'(\Omega t), \bar{U}'' = U''(\Omega t), \dots \quad (11)$$

Với giả thiết các tọa độ $q_i (i=1,2,3)$ nhỏ (vận tốc, gia tốc cũng xem là nhỏ), từ các phương trình (6),(7),(8) ta suy ra phương trình vi phân dao động tuyến tính của hệ

$$\begin{aligned} [I_1 + (m_2 + m_3)\bar{U}'^2] \ddot{q}_1 + (m_2 + m_3)\bar{U}'\ddot{q}_2 + m_3\bar{U}\ddot{q}_3 + [c_1 + 2(m_2 + m_3)\Omega\bar{U}'\bar{U}''] \dot{q}_1 \\ + [k_1 + F\bar{U}'' + (m_2 + m_3)\Omega^2(\bar{U}\bar{U}''' + \bar{U}''^2)] q_1 = -F\bar{U}' - (m_2 + m_3)\Omega^2\bar{U}'\bar{U}'' \end{aligned} \quad (12)$$

$$\begin{aligned} (m_2 + m_3)\bar{U}\ddot{q}_1 + (m_2 + m_3)\ddot{q}_2 + m_3\ddot{q}_3 + 2(m_2 + m_3)\Omega\bar{U}''\dot{q}_1 + c_2\dot{q}_2 \\ + (m_2 + m_3)\Omega^2\bar{U}'''q_1 + k_2q_2 = -F - (m_2 + m_3)\Omega^2\bar{U}'' \end{aligned} \quad (13)$$

$$m_3\bar{U}\ddot{q}_1 + m_3\ddot{q}_2 + m_3\ddot{q}_3 + 2m_3\Omega\bar{U}''\dot{q}_1 + c_3\dot{q}_3 + m_3\Omega^2\bar{U}'''q_1 + k_3q_3 = -F - m_3\Omega^2\bar{U}'' \quad (14)$$

Thông thường $F(t)$ là hàm tuần hoàn (hoặc hằng số), do đó các phương trình (12), (13), (14) là một hệ phương trình vi phân tuyến tính hệ số tuần hoàn. Ta có thể viết hệ các phương trình đó dưới dạng ma trận như sau

$$\mathbf{M}(\Omega t)\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{C}(\Omega t)\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{K}(\Omega t)\mathbf{q} = \mathbf{d}(\Omega t) \quad (15)$$

Trong đó:

$$\mathbf{M}(\Omega t) = \begin{bmatrix} I_1 + (m_2 + m_3)\bar{U}^{\prime 2} & (m_2 + m_3)\bar{U}' & m_3\bar{U}' \\ (m_2 + m_3)\bar{U}' & m_2 + m_3 & m_3 \\ m_3\bar{U}' & m_3 & m_3 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{C}(\Omega t) = \begin{bmatrix} c_1 + 2(m_2 + m_3)\Omega\bar{U}'\bar{U}'' & 0 & 0 \\ 2(m_2 + m_3)\Omega\bar{U}' & c_2 & 0 \\ 2m_3\Omega\bar{U}'' & 0 & c_3 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{K}(\Omega t) = \begin{bmatrix} k_1 + F\bar{U}'' + (m_2 + m_3)\Omega^2(\bar{U}'\bar{U}''' + \bar{U}''^2) & 0 & 0 \\ (m_2 + m_3)\Omega^2\bar{U}''' & k_2 & 0 \\ m_3\Omega^2\bar{U}''' & 0 & k_3 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{d} = \begin{bmatrix} -F\bar{U}' - (m_2 + m_3)\Omega^2\bar{U}'\bar{U}'' \\ -F - (m_2 + m_3)\Omega^2\bar{U}'' \\ -F - m_3\Omega^2\bar{U}'' \end{bmatrix}, \quad \mathbf{q} = \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{bmatrix}$$

§5 ỔN ĐỊNH CHUYỂN ĐỘNG CỦA HỆ NHIỀU VẬT

Một lĩnh vực của hệ nhiều vật còn ít được nghiên cứu là ổn định chuyển động. Trong đoạn này trình bày một số vấn đề cơ bản của lý thuyết ổn định, đặc biệt là ổn định của các hệ tuyến tính hệ số tuần hoàn. Do các thí dụ tính toán ổn định của hệ nhiều vật khá công kềnh nên không trình bày kỹ ở đây. Bạn đọc nào quan tâm đến vấn đề này có thể tìm hiểu trong các bài báo của tác giả ở phần tài liệu tham khảo.

5.1 Khái niệm ổn định chuyển động

a) Khái niệm ổn định Liapunov

Phương trình trạng thái của một hệ cơ học f bậc tự do có dạng

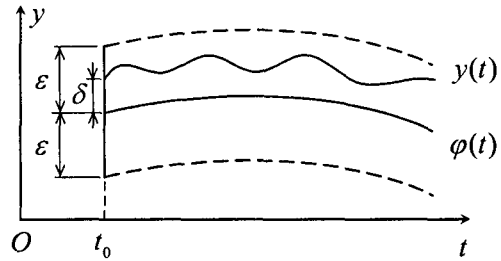
$$\dot{\mathbf{y}} = \mathbf{f}(t, \mathbf{y}), \quad \mathbf{y} = [y_1, \dots, y_n]^T, \quad n = 2f$$

Trong lý thuyết phương trình vi phân ta đã biết nghiệm của hệ phương trình vi phân

$$\dot{\mathbf{y}} = \mathbf{f}(t, \mathbf{y}), \quad \mathbf{y}(t_0) = \mathbf{y}_0 \quad (5.1)$$

phụ thuộc liên tục vào điều kiện đầu, khi t thay đổi liên tục trên đoạn $[a, b]$, nếu vế phải $\mathbf{f}(t, \mathbf{y})$ thoả mãn các điều kiện về tồn tại và duy nhất nghiệm. Trong phần này ta sẽ nghiên cứu sự phụ thuộc của nghiệm phương trình vi phân (5.1) vào các điều kiện đầu, khi t thay đổi trong khoảng vô hạn $[t_0, +\infty)$.

Định nghĩa 5.1. Nghiệm $y^* = \varphi(t)$ của hệ phương trình vi phân (5.1) được gọi là ổn định theo nghĩa Liapunov nếu như với ε dương cho trước bé tùy ý, luôn có thể tìm được một số dương $\delta(\varepsilon, t_0)$ sao cho mọi nghiệm $y(t)$ của hệ phương trình vi phân (5.1) tại thời điểm đầu ở khá gần nghiệm $y^* = \varphi(t)$



Hình 6.9

$$\|y(t_0) - \varphi(t_0)\| < \delta \tag{5.2}$$

thì nó sẽ luôn thoả mãn điều kiện

$$\|y(t) - \varphi(t)\| < \varepsilon, \quad \forall t \in [t_0, +\infty) \tag{5.3}$$

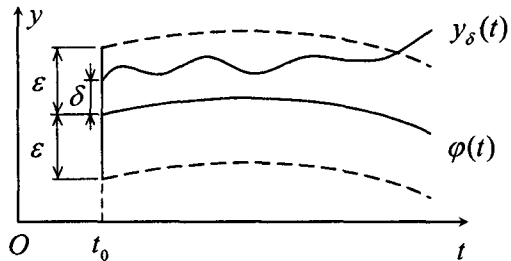
Định nghĩa 5.2. Nếu số $\delta > 0$ có thể chọn không phụ thuộc vào điều kiện đầu, tức là $\delta = \delta(\varepsilon)$ thì ổn định theo nghĩa Liapunov của nghiệm $y^* = \varphi(t)$ được gọi là ổn định đều.

Định nghĩa 5.3. Nghiệm $y^* = \varphi(t)$ của hệ phương trình vi phân (5.1) được gọi là ổn định tiệm cận, nếu $y^* = \varphi(t)$ ổn định theo nghĩa Liapunov và thoả mãn thêm điều kiện

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|y(t) - \varphi(t)\| = 0 \tag{5.4}$$

Định nghĩa 5.4. Nghiệm $y^* = \varphi(t)$ của hệ phương trình vi phân (5.1) là không ổn định nếu nó không thoả mãn định nghĩa 5.1 về ổn định theo nghĩa Liapunov.

Điều đó có nghĩa là: Tồn tại một nghiệm y_δ nào đó của hệ phương trình vi phân (5.1) mà tại thời điểm đầu t_0 thoả mãn điều kiện



Hình 6.10

$$\|y_\delta(t_0) - \varphi(t_0)\| < \delta \tag{5.5}$$

nhưng tồn tại một thời điểm $t_1 = t_1(\delta) > t_0$ mà

$$\|y_\delta(t_1) - \varphi(t_1)\| \geq \varepsilon. \tag{5.6}$$

Hình 6.9 minh hoạ khái niệm ổn định Liapunov, còn hình 6.10 minh hoạ khái niệm không ổn định Liapunov.

b) Ý nghĩa cơ học của khái niệm ổn định Liapunov

• Chuyển động bị nhiễu và chuyển động không bị nhiễu

Nếu (5.1) là phương trình trạng thái của một hệ cơ học thì mỗi nghiệm của hệ phương trình này cho biết một trạng thái chuyển động của cơ hệ. Ta cần nghiên cứu ổn định của nghiệm $\mathbf{y}^* = \boldsymbol{\varphi}(t)$. Trong cơ học chúng ta quy ước gọi chuyển động cần nghiên cứu ổn định là chuyển động không bị nhiễu. Các chuyển động $\mathbf{y}(t)$ khác mà lúc đầu ở gần $\boldsymbol{\varphi}(t)$ được gọi là chuyển động bị nhiễu. Nếu các chuyển động bị nhiễu lúc đầu ($t = t_0$) ở gần $\boldsymbol{\varphi}(t)$ mà sau đó vẫn luôn ở gần $\boldsymbol{\varphi}(t)$ thì chuyển động không bị nhiễu $\boldsymbol{\varphi}(t)$ được gọi là ổn định.

• Ý nghĩa cơ học của khái niệm ổn định Liapunov

Một trạng thái cơ học ($\mathbf{q}^*(t), \dot{\mathbf{q}}^*(t)$) được gọi là ổn định tiệm cận theo nghĩa Liapunov, nếu do tác dụng của một nhiễu tức thời nào đó làm thay đổi trạng thái ($\mathbf{q}^*(t), \dot{\mathbf{q}}^*(t)$) đó của cơ hệ, thì sau đó cơ hệ có khả năng tự quay trở lại trạng thái ($\mathbf{q}^*(t), \dot{\mathbf{q}}^*(t)$) của nó.

c) Biến đổi phương trình trạng thái, đưa chuyển động không bị nhiễu về gốc tọa độ

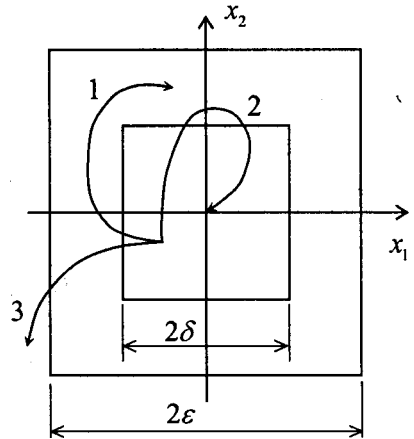
Thực hiện phép đổi biến số

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{y}(t) - \boldsymbol{\varphi}(t) \quad (5.7)$$

Thế (5.7) vào phương trình (5.1) ta được

$$\dot{\mathbf{x}} = \dot{\mathbf{y}} - \dot{\boldsymbol{\varphi}} = \mathbf{f}(t, \mathbf{x} + \boldsymbol{\varphi}) - \mathbf{f}(t, \boldsymbol{\varphi}) = \mathbf{g}(t, \mathbf{x}) \quad (5.8)$$

Từ (5.8) ta thấy hàm $\mathbf{g}(t, \mathbf{x})$ có tính chất $\mathbf{g}(t, \mathbf{0}) = \mathbf{0}$. Vậy nếu $\mathbf{y}^* = \boldsymbol{\varphi}(t)$ là nghiệm của phương trình (5.1) thì $\mathbf{x}^* = \mathbf{0}$ là nghiệm của phương trình (5.8). Sự ổn định của nghiệm $\mathbf{y}^* = \boldsymbol{\varphi}(t)$ của phương trình (5.1) tương đương với sự ổn định của nghiệm $\mathbf{x}^*(t) \equiv \mathbf{0}$ của phương trình (5.8). Hình 6.11 cho ta hình ảnh về khái niệm ổn định của nghiệm $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ trong không gian hai chiều. Trong đó đường (1) biểu diễn ổn định của nghiệm $\mathbf{x}^* = \mathbf{0}$; đường (2) biểu diễn ổn định tiệm cận của nghiệm $\mathbf{x}^* = \mathbf{0}$, còn đường (3) biểu diễn sự không ổn định của nghiệm $\mathbf{x}^* = \mathbf{0}$.



Hình 6.11

d) *Khái niệm ổn định đầu vào – đầu ra (ổn định BIBO)*

Xét hệ phương trình trạng thái của một hệ cơ học có điều khiển

$$\dot{\mathbf{y}} = \mathbf{f}(t, \mathbf{y}, \mathbf{u}), \quad \mathbf{y} = [y_1, \dots, y_n]^T, \quad \mathbf{u} = [u_1, \dots, u_m]^T \quad (5.9)$$

Trong đó u_k ($k=1, \dots, m$) là các điều khiển.

Định nghĩa 5.5. Một hệ cơ học được gọi là ổn định đầu vào - đầu ra, nếu tín hiệu vào $\mathbf{u}(t)$ bị chặn thì tín hiệu ra $\mathbf{y}(t)$ cũng bị chặn

$$\|\mathbf{u}(t)\| \leq M < \infty \Rightarrow \|\mathbf{y}(t)\| \leq N < \infty, \quad M \text{ và } N \text{ là các hằng số} \quad (5.10)$$

Chú ý:

- Tín hiệu vào thường là lực tác dụng hoặc một bộ phận của nó, tín hiệu ra là các toạ độ suy rộng và vận tốc các toạ độ suy rộng của cơ hệ.
- Ổn định đầu vào - đầu ra còn được gọi là ổn định BIBO (Bounded Input Bounded Output).
- Ổn định đầu vào - đầu ra liên quan trực tiếp đến khái niệm ổn định động lực.

e) *Khái niệm ổn định động lực*

Khái niệm ổn định động lực là một trong những khái niệm quan trọng khi giải quyết các bài toán động lực học kỹ thuật. Khái niệm này liên quan trực tiếp đến khái niệm giới nội của nghiệm phương trình vi phân. Giả sử phương trình vi phân phi tuyến mô tả chuyển động phụ trong một hệ nhiều vật có dạng

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{g}(\mathbf{x}, t) \quad (5.11)$$

Trong trường hợp tuyến tính hệ phương trình vi phân chuyển động có dạng

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{P}(t)\mathbf{x} + \mathbf{f}(t) \quad (5.12)$$

Định nghĩa 5.6. Chuyển động phụ của hệ nhiều vật $\mathbf{x} = \mathbf{x}(t; t_0, \mathbf{x}_0)$ được gọi là ổn định động lực, nếu tồn tại một hằng số dương K hữu hạn, mà hệ thức sau đây được thoả mãn

$$\|\mathbf{x}\| \leq K, \quad \text{với mọi } t \geq t_0 \quad (5.13)$$

Khảo sát ổn định động lực của hệ nhiều vật là một trong các bài toán mà các kỹ sư rất quan tâm. Về mặt phương pháp nghiên cứu, bài toán ổn định động lực được đưa về bài toán ổn định theo nghĩa Liapunov.

5.2 Lý thuyết tổng quát về sự ổn định của hệ phương trình vi phân tuyến tính

a) *Các định nghĩa và định lý cơ bản*

Xét hệ phương trình vi phân tuyến tính không thuần nhất

$$\frac{d\mathbf{y}}{dt} = \mathbf{A}(t)\mathbf{y} + \mathbf{f}(t) \quad (5.14)$$

và hệ phương trình vi phân tuyến tính thuần nhất tương ứng

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x \quad (5.15)$$

Trong đó ma trận $A(t)$ và véc-tơ $f(t)$ liên tục trong khoảng (a, ∞) .

Định nghĩa 5.7. Hệ phương trình vi phân tuyến tính (5.14) là ổn định (hoặc không ổn định), nếu tất cả các nghiệm $y = y(t)$ của nó sẽ ổn định (hoặc không ổn định) theo nghĩa Liapunov khi $t \rightarrow \infty$.

Chú ý. Ở đoạn sau ta sẽ thấy, các nghiệm của hệ phương trình vi phân tuyến tính hoặc là tất cả đều ổn định, hoặc là tất cả đều không ổn định. Tính chất này không có ở các hệ phi tuyến. Đối với các hệ phi tuyến có thể có nghiệm này ổn định, nghiệm khác không ổn định. Không có khái niệm ổn định của hệ phương trình vi phân phi tuyến.

Định lý 5.1. Điều kiện cần và đủ để cho hệ phương trình vi phân tuyến tính không thuần nhất (5.14) ổn định, với hàm $f(t)$ tùy ý, là nghiệm tầm thường $x_0 \equiv 0, (t_0 < t < \infty, t_0 \in (a, \infty))$ của hệ phương trình vi phân tuyến tính thuần nhất tương ứng (5.15) ổn định.

1) Chứng minh điều kiện cần. Giả sử $\eta = \eta(t), (t_0 \leq t < \infty)$ là một nghiệm ổn định nào đó của hệ không thuần nhất (5.14). Điều đó có nghĩa là đối với mọi $\varepsilon > 0$ cho trước, tồn tại $\delta > 0$ sao cho với mọi nghiệm $y = y(t)$ của hệ không thuần nhất (5.14) mà ở thời điểm đầu thỏa mãn điều kiện

$$\|y(t_0) - \eta(t_0)\| < \delta \quad (5.16)$$

thì với mọi $t (t_0 \leq t < \infty)$ sẽ thỏa mãn điều kiện

$$\|y(t) - \eta(t)\| < \varepsilon \quad (5.17)$$

Ta đặt

$$x(t) = y(t) - \eta(t) \quad (5.18)$$

Khi đó $x(t)$ sẽ là nghiệm của hệ phương trình vi phân thuần nhất (5.15). Mặt khác nghiệm tùy ý của nó có thể biểu diễn dưới dạng (5.18). Như thế các bất đẳng thức (5.16) và (5.17) tương đương với các bất đẳng thức sau

$$\|x(t_0)\| < \delta, \text{ suy ra } \|x(t)\| < \varepsilon \text{ với } t_0 \leq t < \infty.$$

Từ đó suy ra: Nghiệm tầm thường $x_0 \equiv 0$ của hệ phương trình thuần nhất tương ứng (5.15) ổn định theo nghĩa Liapunov khi $t \rightarrow \infty$.

Chú ý 1. Từ chứng minh trên ta suy ra rằng, sự ổn định của nghiệm tầm thường $x_0 \equiv 0$ của hệ thuần nhất (5.15) được suy ra từ sự ổn định của một nghiệm tùy ý của hệ phương trình không thuần nhất (5.14) với hàm vế phải $f(t)$ tùy ý (có thể $f(t) \equiv 0$).

2) Chứng minh điều kiện đủ. Giả sử nghiệm tầm thường $\mathbf{x}_0 \equiv 0$ của hệ thuần nhất (5.15) ổn định theo nghĩa Liapunov khi $t \rightarrow \infty$. Khi đó, nếu $\mathbf{x} = \mathbf{x}(t)$, ($t_0 \leq t < \infty$) là một nghiệm tùy ý của hệ thuần nhất, thì từ điều kiện $\|\mathbf{x}(t_0)\| < \delta(\varepsilon, t_0)$ ta suy ra

$$\|\mathbf{x}(t)\| < \varepsilon, \quad \text{khi } t_0 \leq t < \infty.$$

Do đó, nếu $\boldsymbol{\eta}(t)$ là một nghiệm nào đó của hệ không thuần nhất (5.15) và $\mathbf{y}(t)$ là nghiệm bất kỳ nào đó của hệ này, thì từ bất đẳng thức

$$\|\mathbf{y}(t_0) - \boldsymbol{\eta}(t_0)\| < \delta$$

ta suy ra bất đẳng thức

$$\|\mathbf{y}(t) - \boldsymbol{\eta}(t)\| < \varepsilon, \quad \text{với } t_0 \leq t < \infty.$$

Điều đó chứng tỏ $\boldsymbol{\eta}(t)$ ổn định khi $t \rightarrow \infty$.

Hệ quả 1. Hệ phương trình vi phân tuyến tính ổn định khi một nghiệm nào đó của hệ ổn định và không ổn định nếu có một nghiệm nào đó của hệ không ổn định.

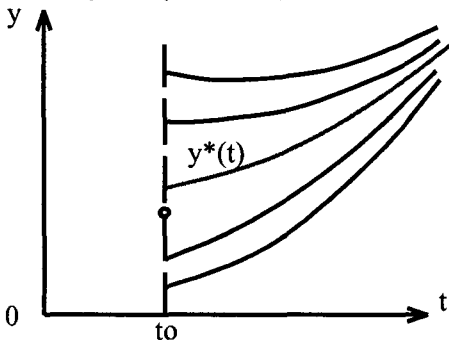
Hệ quả này suy ra trực tiếp từ định lý 5.1 và chú ý 1 của định lý 5.1.

Hệ quả 2. Hệ phương trình vi phân tuyến tính không thuần nhất ổn định khi và chỉ khi hệ phương trình vi phân tuyến tính thuần nhất tương ứng ổn định.

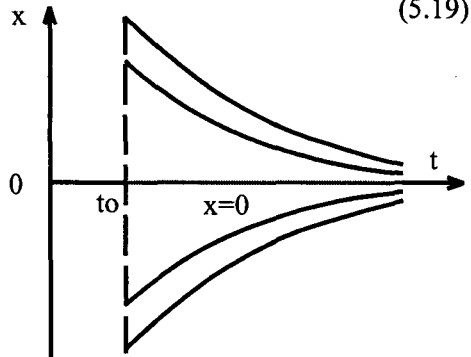
Chú ý 2. Về mặt ổn định, tính chất của các nghiệm của của hệ tuyến tính không thuần nhất (5.14) cũng giống như tính chất của các nghiệm của hệ thuần nhất tương ứng (5.15).

Thật vậy, trường các đường cong tích phân của hệ không thuần nhất (5.14) có dạng

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{y}^*(t) + \boldsymbol{\Phi}(t)\mathbf{c} \tag{5.19}$$



Hình 6.12



Hình 6.13

Trong đó $\mathbf{y}^*(t)$ là nghiệm riêng của hệ (5.14), $\boldsymbol{\Phi}(t)$ là ma trận cơ bản của hệ thuần nhất (5.15). Trường các đường cong tích phân của hệ không thuần nhất (5.14) tương đương tôpô với trường các đường cong tích phân của hệ thuần nhất (5.15). Sự khác nhau ở đây là: Trong trường hợp thứ nhất “trục” $y = y^*(t)$ nói chung là

một đường cong, còn trong trường hợp thứ hai trục $x \equiv 0$ là một đường thẳng (xem hình 6.12 và hình 6.13). Vì vậy sau này ta giới hạn chỉ nghiên cứu sự ổn định của hệ phương trình vi phân tuyến tính thuần nhất.

Định nghĩa 5.8. Hệ phương trình vi phân tuyến tính không thuần nhất (5.14) là ổn định đều nếu tất cả các nghiệm $y(t)$ của hệ ổn định đều khi $t \rightarrow +\infty$, với thời điểm đầu $t_0 \in (a, \infty)$.

Định lý 5.2. Hệ phương trình vi phân tuyến tính không thuần nhất (5.14) là ổn định đều khi và chỉ khi nghiệm tầm thường $x_0 \equiv 0$ của hệ thuần nhất tương ứng (5.15) ổn định đều khi $t \rightarrow +\infty$.

Chứng minh tương tự như chứng minh định lý 1.

Định nghĩa 5.9. Hệ phương trình vi phân tuyến tính không thuần nhất (5.14) là ổn định tiệm cận nếu tất cả các nghiệm $y(t)$ của hệ đều ổn định tiệm cận khi $t \rightarrow +\infty$.

Định lý 5.3. Hệ phương trình vi phân tuyến tính không thuần nhất (5.14) ổn định tiệm cận khi và chỉ khi nghiệm tầm thường $x_0 \equiv 0$ của hệ thuần nhất tương ứng (5.15) ổn định tiệm cận khi $t \rightarrow +\infty$.

Chứng minh tương tự như chứng minh định lý 5.1.

Hệ quả. Điều kiện cần và đủ để cho hệ phương trình vi phân tuyến tính không thuần nhất (5.14) ổn định tiệm cận là hệ thuần nhất (5.15) ổn định tiệm cận.

Định lý 5.4. Hệ phương trình vi phân tuyến tính thuần nhất (5.15) ổn định tiệm cận khi và chỉ khi tất cả các nghiệm $x = x(t)$ của hệ tiến dần tới không khi $t \rightarrow +\infty$

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} x(t) = 0$$

Hệ quả. Hệ phương trình vi phân tuyến tính ổn định tiệm cận thì sẽ ổn định tiệm cận toàn thể.

b) *Quan hệ giữa khái niệm ổn định động lực và ổn định theo nghĩa Liapunov*

Định lý 5.5. Hệ phương trình vi phân tuyến tính thuần nhất (5.15) ổn định theo nghĩa Lyapunov khi và chỉ khi mọi nghiệm $x = x(t)$, ($t_0 \leq t < \infty, t_0 \in (a, \infty)$) của hệ này giới nội trên bán trục $t_0 \leq t < \infty$.

Hệ quả 1. Nếu hệ phương trình vi phân tuyến tính không thuần nhất (5.15) ổn định, thì tất cả các nghiệm của nó hoặc là giới nội, hoặc là không giới nội khi $t \rightarrow +\infty$.

5.3 Lý thuyết Floquet về hệ phương trình vi phân tuyến tính thuần nhất hệ số tuần hoàn

a) *Định lý Floquet (Flôkê)*

Xét hệ phương trình vi phân tuyến tính thuần nhất hệ số tuần hoàn

$$\dot{x} = A(t)x \tag{5.20}$$

Với $A(t)$ là ma trận vuông cấp n liên tục, tuần hoàn với chu kỳ T .

Định nghĩa 5.10. Ma trận cơ bản $\Phi(t)$ của hệ phương trình vi phân tuyến tính thuần nhất (5.20) là một ma trận vuông gồm n cột, mỗi cột là một vectơ nghiệm \mathbf{x}_i ($i=1, \dots, n$) của hệ phương trình (5.20). Các vectơ nghiệm này tạo thành một hệ n vectơ độc lập tuyến tính.

$$\Phi(t) = [\mathbf{x}_1(t), \mathbf{x}_2(t), \dots, \mathbf{x}_n(t)]$$

Trong đó $\mathbf{x}_i(t)$ ($i=1, \dots, n$) là một hệ n nghiệm độc lập tuyến tính của hệ phương trình vi phân tuyến tính thuần nhất (5.20).

Bổ đề Floquet. Nếu $\Phi(t)$ là ma trận cơ bản của hệ phương trình vi phân (5.20) thì $\Phi(t+T)$ cũng là một ma trận cơ bản của hệ phương trình đó, và ta có hệ thức $\Phi(t+T) = \Phi(t)C$.

Chứng minh. Giả sử $\mathbf{x}(t)$ là một nghiệm của hệ phương trình (5.20). Khi đó ta có hệ thức

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}(t)\mathbf{x} \rightarrow \frac{d}{dt} \mathbf{x}(t+T) = \mathbf{A}(t+T)\mathbf{x}(t+T) = \mathbf{A}(t)\mathbf{x}(t+T)$$

Vậy, nếu $\mathbf{x}(t)$ là một nghiệm của hệ phương trình (5.20) thì $\mathbf{x}(t+T)$ cũng là nghiệm của hệ phương trình đó. Từ đó suy ra $\Phi(t+T)$ là một ma trận cơ bản. Do $\Phi(t+T)$ và $\Phi(t)$ là các ma trận độc lập tuyến tính nên tồn tại một ma trận C sao cho $\Phi(t+T) = \Phi(t)C$.

Định lý Floquet. Mỗi ma trận cơ bản $\Phi(t)$ của hệ phương trình vi phân tuyến tính thuần nhất hệ số tuần hoàn (5.20) có thể biểu diễn dưới dạng tích của hai ma trận vuông cấp n như sau

$$\Phi(t) = \mathbf{P}(t)e^{\mathbf{B}t} \tag{5.21}$$

Trong đó $\mathbf{P}(t)$ là ma trận vuông cấp n , tuần hoàn với chu kỳ T , còn \mathbf{B} là ma trận vuông cấp n có các phần tử là các hằng số.

Chứng minh. Các ma trận cơ bản $\Phi(t)$ và $\Phi(t+T)$ là các ma trận độc lập tuyến tính, cho nên tồn tại một ma trận C vuông cấp n , không suy biến mà hệ thức sau đây được thoả mãn

$$\Phi(t+T) = \Phi(t)C \tag{1}$$

Như vậy sẽ tồn tại một ma trận hằng \mathbf{B} sao cho

$$C = e^{\mathbf{B}T} \tag{2}$$

Ta sẽ chứng minh rằng ma trận $\Phi(t)e^{-\mathbf{B}t}$ là ma trận tuần hoàn chu kỳ T . Thật vậy theo (1) và (2) ta có

$$\Phi(t+T)e^{-\mathbf{B}(t+T)} = \Phi(t)Ce^{-\mathbf{B}T}e^{-\mathbf{B}t} = \Phi(t)e^{-\mathbf{B}t} \tag{3}$$

Ta đặt $\mathbf{P}(t) = \mathbf{\Phi}(t)e^{-\mathbf{B}t}$ (5.22)

Theo công thức (3) $\mathbf{P}(t)$ là một ma trận tuần hoàn chu kỳ T. Từ (5.22) ta suy ra

$$\mathbf{\Phi}(t) = \mathbf{P}(t)e^{\mathbf{B}t}$$

b) Định nghĩa ma trận đơn đạo (monodromy-matrix)

Định nghĩa 5.11. Ma trận $\mathbf{C} = e^{\mathbf{B}T}$ được gọi là ma trận đơn đạo (monodromy-matrix) của hệ phương trình tuyến tính thuần nhất hệ số tuần hoàn (5.20). Các trị riêng ρ của ma trận đơn đạo \mathbf{C} được gọi là nhân tử đặc trưng (Characteristic multiplies). Mỗi số phức λ được xác định từ hệ thức

$$\rho = e^{\lambda T} \quad (5.23)$$

được gọi là số mũ đặc trưng (hoặc số mũ Floquet).

Chú ý. Từ (5.23) ta suy ra

$$\lambda = \frac{1}{T} \ln \rho \quad (5.24)$$

Theo tính chất của hàm lôga, phần ảo của số mũ đặc trưng λ được xác định sai khác một hằng số cộng $i2\pi/T$. Như vậy, theo định nghĩa, nhân tử đặc trưng ρ được xác định một cách duy nhất, còn số mũ đặc trưng λ được xác định không duy nhất.

c) Biến đổi hệ phương trình vi phân tuyến tính hệ số tuần hoàn về hệ phương trình vi phân tuyến tính hệ số hằng số

Xét hệ phương trình vi phân tuyến tính thuần nhất hệ số tuần hoàn (5.20). Sử dụng phép thế

$$\mathbf{x} = \mathbf{P}(t)\mathbf{y} \quad (5.25)$$

Trong đó $\mathbf{P}(t)$ là ma trận tuần hoàn chu kỳ T và được xác định bởi phương trình (5.22). Thế (5.25) vào (5.20) ta được

$$\dot{\mathbf{P}}(t)\mathbf{y} + \mathbf{P}(t)\dot{\mathbf{y}} = \mathbf{A}(t)\mathbf{P}(t)\mathbf{y}$$

Từ đó suy ra

$$\dot{\mathbf{y}} = \mathbf{P}^{-1}(t)[\mathbf{A}(t)\mathbf{P} - \dot{\mathbf{P}}(t)]\mathbf{y} \quad (5.26)$$

Mặt khác đạo hàm biểu thức (5.22) theo t ta được

$$\dot{\mathbf{P}}(t) = \dot{\mathbf{\Phi}}(t)e^{-\mathbf{B}t} - \mathbf{\Phi}(t)e^{-\mathbf{B}t}(-\mathbf{B})$$

$$\dot{\mathbf{P}}(t) = \mathbf{A}(t)\mathbf{\Phi}(t)e^{-\mathbf{B}t} - \mathbf{\Phi}(t)e^{-\mathbf{B}t}(-\mathbf{B}) = \mathbf{A}\mathbf{P} - \mathbf{P}\mathbf{B} \quad (5.27)$$

Thế (5.27) vào (5.26) ta suy ra

$$\dot{\mathbf{y}} = \mathbf{P}^{-1}(\mathbf{A}\mathbf{P} - \mathbf{A}\mathbf{P} + \mathbf{P}\mathbf{B})\mathbf{y} = \mathbf{B}\mathbf{y} \quad (5.28)$$

Vậy bằng phép thế (5.25) ta đưa hệ phương trình vi phân tuyến tính thuần nhất hệ số tuần hoàn (5.20) về hệ phương trình vi phân tuyến tính hệ số hằng số (5.28). Chú ý rằng ma trận \mathbf{B} được xác định từ ma trận đơn đạo \mathbf{C} .

5.4 Sự ổn định của hệ phương trình vi phân tuyến tính thuần nhất hệ số hằng số

Xét hệ n phương trình vi phân tuyến tính thuần nhất

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} \quad (5.29)$$

Trong (5.29) \mathbf{A} là ma trận vuông cấp n hệ số hằng số. Gọi λ_j là các trị riêng của ma trận \mathbf{A} , tức là λ_j là nghiệm của phương trình đặc trưng

$$|\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E}| = 0 \quad (5.30)$$

Trong đó \mathbf{E} là ma trận đơn vị.

a) Tiêu chuẩn ổn định theo các trị riêng của ma trận \mathbf{A}

Tiêu chuẩn. Nếu tất cả các trị riêng của ma trận \mathbf{A} đều có phần thực âm thì nghiệm cân bằng $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ của hệ phương trình vi phân tuyến tính thuần nhất (5.29) sẽ ổn định tiệm cận. Nếu ít nhất có một trị riêng của ma trận \mathbf{A} có phần thực dương thì nghiệm cân bằng $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ của hệ phương trình vi phân tuyến tính thuần nhất (5.29) sẽ không ổn định.

Chú ý. Trường hợp không có trị riêng nào của ma trận \mathbf{A} có phần thực dương, nhưng có trị riêng có phần thực bằng không ta chưa xét ở đây.

b) Tiêu chuẩn ổn định theo các hệ số của phương trình đặc trưng của ma trận \mathbf{A}

Phương trình đặc trưng (5.30) có thể viết dưới dạng đa thức như sau

$$p(\lambda) = |\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E}| = a_0\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \dots + a_{n-1}\lambda + a_n = 0, \quad a_0 > 0 \quad (5.31)$$

Từ (5.31) ta xây dựng ma trận Hurwitz vuông cấp n theo qui tắc

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} a_1 & a_3 & a_5 & \dots & 0 \\ a_0 & a_2 & a_4 & \dots & 0 \\ 0 & a_1 & a_3 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_n \end{bmatrix} \quad (5.32)$$

Các định thức trên đường chéo chính của ma trận này được gọi là các định thức Hurwitz và có dạng như sau

$$\Delta_1 = a_1, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ a_0 & a_2 \end{vmatrix}, \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 & a_5 \\ a_0 & a_2 & a_4 \\ 0 & a_1 & a_3 \end{vmatrix}, \dots, \Delta_n = a_n \Delta_{n-1} \quad (5.33)$$

Tiêu chuẩn Hurwitz (1859 - 1919). Điều kiện cần và đủ để cho tất cả các nghiệm của phương trình đặc trưng (5.31) (tức là các trị riêng của ma trận \mathbf{A}) đều có phần thực âm là tất cả các định thức con Hurwitz $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3, \dots, \Delta_n$ đều dương.

Một số trường hợp đặc biệt:

Khi $n = 2$, phương trình (5.31) có dạng

$$p_2(\lambda) = a_0\lambda^2 + a_1\lambda + a_2 = 0, \quad a_0 > 0 \quad (5.34)$$

Ma trận Hurwitz có dạng

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} a_1 & 0 \\ a_0 & a_2 \end{bmatrix}$$

Theo tiêu chuẩn Hurwitz ta có

$$a_1 > 0, \quad a_1a_2 > 0 \Rightarrow a_1 > 0, \quad a_2 > 0 \quad (5.35)$$

Khi $n = 3$, từ phương trình (5.31) ta suy ra

$$p_3(\lambda) = a_0\lambda^3 + a_1\lambda^2 + a_2\lambda + a_3 = 0, \quad a_0 > 0 \quad (5.36)$$

Ma trận Hurwitz bây giờ có dạng

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} a_1 & a_3 & 0 \\ a_0 & a_2 & 0 \\ 0 & a_1 & a_3 \end{bmatrix}$$

Theo tiêu chuẩn Hurwitz ta có

$$\begin{cases} a_1 > 0 \\ a_1a_2 - a_0a_3 > 0 \\ \Delta_3 = a_3\Delta_2 > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_1 > 0 \\ a_1a_2 - a_0a_3 > 0 \\ a_3 > 0 \end{cases} \quad (5.37)$$

5.5 Sự ổn định của hệ phương trình vi phân tuyến tính thuần nhất hệ số tuần hoàn

Xét hệ phương trình vi phân tuyến tính thuần nhất hệ số tuần hoàn

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}(t)\mathbf{x} \quad (5.38)$$

Trong đó $\mathbf{A}(t)$ là ma trận vuông cấp n liên tục, tuần hoàn với chu kỳ T .

a) Phương trình đặc trưng

Giả sử cho biết ma trận đơn đạo \mathbf{C} của hệ phương trình vi phân tuyến tính hệ số tuần hoàn (5.38). Phương trình đặc trưng của ma trận đơn đạo có dạng

$$|\mathbf{C} - \rho\mathbf{E}| = \begin{vmatrix} c_{11} - \rho & c_{12} & \dots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} - \rho & \dots & c_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{n1} & c_{n2} & \dots & c_{nn} - \rho \end{vmatrix} = 0 \quad (5.39)$$

Phương trình (5.39) được gọi là phương trình đặc trưng của hệ phương trình vi phân tuyến tính hệ số tuần hoàn (5.38).

Chú ý. Việc xác định ma trận đơn đạo \mathbf{C} có một vai trò quan trọng trong lý thuyết phương trình vi phân tuyến tính hệ số tuần hoàn. Để xác định ma trận đơn đạo \mathbf{C} trước hết ta phải nghiên cứu một vài tính chất của phương trình đặc trưng.

b) Các tính chất cơ bản của phương trình đặc trưng

Tính chất 1. Phương trình đặc trưng (5.39) không phụ thuộc vào việc chọn dạng cụ thể của ma trận cơ bản của hệ phương trình (5.38).

Chứng minh. Gọi $\mathbf{X}(t) = [\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n]$, $\mathbf{Y}(t) = [\mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_n]$ là hai ma trận cơ bản của hệ phương trình vi phân (5.38). Theo Bổ đề Floquet ta có

$$\mathbf{X}(t+T) = \mathbf{X}(t)\mathbf{C}_1, \quad \mathbf{Y}(t+T) = \mathbf{Y}(t)\mathbf{C}_2 \quad (1)$$

Ta phải chứng minh nghiệm của hai phương trình

$$|\mathbf{C}_1 - \rho\mathbf{E}| = 0, \quad |\mathbf{C}_2 - \rho\mathbf{E}| = 0$$

là như nhau. Thật vậy, theo Bổ đề Floquet ta có

$$\mathbf{Y}(t) = \mathbf{X}(t)\mathbf{C}_3 \quad (2)$$

Từ (1) và (2) ta suy ra

$$\mathbf{Y}(t+T) = \mathbf{X}(t+T)\mathbf{C}_3 = \mathbf{X}(t)\mathbf{C}_1\mathbf{C}_3 = \mathbf{Y}(t)\mathbf{C}_3^{-1}\mathbf{C}_1\mathbf{C}_3 \quad (3)$$

$$\mathbf{Y}(t+T) = \mathbf{Y}(t)\mathbf{C}_2 \quad (4)$$

Từ (3) và (4) ta có

$$\mathbf{C}_2 = \mathbf{C}_3^{-1}\mathbf{C}_1\mathbf{C}_3 \quad (5)$$

Biến đổi phương trình đặc trưng ta được

$$\begin{aligned} |\mathbf{C}_2 - \rho\mathbf{E}| &= |\mathbf{C}_3^{-1}\mathbf{C}_1\mathbf{C}_3 - \rho\mathbf{E}| = |\mathbf{C}_3^{-1}\mathbf{C}_1\mathbf{C}_3 - \rho\mathbf{C}_3^{-1}\mathbf{E}\mathbf{C}_3| \\ &= |\mathbf{C}_3^{-1}(\mathbf{C}_1 - \rho\mathbf{E})\mathbf{C}_3| = |\mathbf{C}_3^{-1}| |\mathbf{C}_1 - \rho\mathbf{E}| |\mathbf{C}_3| = |\mathbf{C}_1 - \rho\mathbf{E}| \end{aligned}$$

Vậy ta đã chứng minh được tính chất 1.

Tính chất 2. Phương trình đặc trưng (5.39) của hệ phương trình vi phân tuyến tính hệ số tuần hoàn (5.38) không thay đổi khi ta biến đổi hệ phương trình (5.38) bằng phép biến đổi tuyến tính

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{T}(t)\mathbf{x}(t), \quad \text{với } \mathbf{T}(t+T) = \mathbf{T}(t)$$

Chứng minh. Thế $\mathbf{y}(t) = \mathbf{T}(t)\mathbf{x}(t)$ vào phương trình (5.38) và thực hiện một vài phép biến đổi đơn giản ta thu được

$$\dot{\mathbf{y}}(t) = \mathbf{B}(t)\mathbf{y}(t) \quad (1)$$

với $\mathbf{B}(t) = (\mathbf{T}\mathbf{A} + \dot{\mathbf{T}})\mathbf{T}^{-1}$ (2)

Để thiết lập phương trình đặc trưng của (5.38) và của (1) ta thực hiện các phép biến đổi sau

$$\mathbf{X}(t+T) = \mathbf{X}(t)\mathbf{C}_1, \quad \mathbf{Y}(t+T) = \mathbf{Y}(t)\mathbf{C}_2 \quad (3)$$

Và phải chứng minh các phương trình đặc trưng

$$|\mathbf{C}_1 - \rho\mathbf{E}| = 0, \quad |\mathbf{C}_2 - \rho\mathbf{E}| = 0$$

có nghiệm giống nhau. Thật vậy từ $\mathbf{y}(t) = \mathbf{T}(t)\mathbf{x}(t)$ và (3) ta suy ra

$$\mathbf{Y}(t+T) = \mathbf{T}(t+T)\mathbf{X}(t+T) = \mathbf{T}(t)\mathbf{X}(t+T)$$

$$\mathbf{Y}(t+T) = \mathbf{T}(t)\mathbf{X}(t)\mathbf{C}_1 = \mathbf{T}(t)\mathbf{T}^{-1}\mathbf{Y}(t)\mathbf{C}_1 = \mathbf{Y}(t)\mathbf{C}_1 \quad (4)$$

So sánh (3) và (4) ta suy ra $\mathbf{C}_1 = \mathbf{C}_2$ (đpcm).

c) *Tính toán ma trận đơn đạo và phương trình đặc trưng bằng phương pháp số*

Do tính chất phương trình đặc trưng của hệ phương trình vi phân tuyến tính hệ số tuần hoàn không phụ thuộc vào việc chọn hệ nghiệm cơ bản, ta có thể thiết lập phương trình đặc trưng của hệ phương trình vi phân tuyến tính hệ số tuần hoàn như sau. Chọn điều kiện đầu $\mathbf{x}_i(0)$ là các vectơ đơn vị của hệ n vectơ trực chuẩn

$$x_s^{(i)}(0) = \begin{cases} 1 & \text{khi } s = i \\ 0 & \text{khi } s \neq i \end{cases} \rightarrow \mathbf{E} = [\mathbf{x}_1(0), \mathbf{x}_2(0), \dots, \mathbf{x}_n(0)]$$

Tích phân bằng số hệ phương trình vi phân tuyến tính hệ số tuần hoàn (5.38), lần lượt với các điều kiện đầu trên, ở trong khoảng $[0, T]$, ta được n vectơ $\mathbf{x}_i(T)$, $i = 1, \dots, n$. Sau đó xây dựng ma trận đơn đạo dạng

$$\mathbf{C} = [\mathbf{x}_1(T), \mathbf{x}_2(T), \dots, \mathbf{x}_n(T)] = \Phi(T) \quad (5.40)$$

Từ đó phương trình đặc trưng của hệ phương trình vi phân tuyến tính hệ số tuần hoàn (5.38) có dạng

$$|\Phi(T) - \rho \mathbf{E}| = \begin{vmatrix} x_1^{(1)}(T) - \rho & x_1^{(2)}(T) & \dots & x_1^{(n)}(T) \\ x_2^{(1)}(T) & x_2^{(2)}(T) - \rho & \dots & x_2^{(n)}(T) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_n^{(1)}(T) & x_n^{(2)}(T) & \dots & x_n^{(n)}(T) - \rho \end{vmatrix} = 0 \quad (5.41)$$

Phương trình (5.41) là một phương trình đại số bậc n

$$\rho^n + a_1 \rho^{n-1} + a_2 \rho^{n-2} + \dots + a_{n-1} \rho + a_n = 0 \quad (5.42)$$

Giải phương trình (5.42) ta nhận được các nhân tử đặc trưng ρ_i ($i = 1, \dots, n$). Từ đó suy ra các số mũ đặc trưng

$$\lambda_k = \frac{1}{T} \ln \rho_k, \quad (k = 1, \dots, n) \quad (5.43)$$

Do tính chất của hàm loga mỗi λ_k được xác định sai khác một hằng số cộng $2\pi i/T$, với i là đơn vị ảo.

d) *Các tiêu chuẩn ổn định của hệ phương trình vi phân tuyến tính hệ số tuần hoàn*

Dựa vào định lý Floquet và dạng nghiệm của hệ phương trình vi phân tuyến tính thuần nhất hệ số tuần hoàn, ta có định lý sau.

Tiêu chuẩn ổn định theo số mũ đặc trưng. Nếu tất cả các số mũ đặc trưng λ_k đều có phần thực âm thì nghiệm $\mathbf{x} = 0$ của hệ phương trình tuyến tính thuần nhất hệ số tuần hoàn (5.38) ổn định tiệm cận. Ngược lại nếu ít nhất có một số mũ đặc trưng có phần thực dương thì nghiệm $\mathbf{x} = 0$ của hệ phương trình (5.38) sẽ không ổn định. Nếu không có số mũ đặc trưng nào có phần thực dương, nhưng có số mũ đặc trưng có phần thực bằng không thì nghiệm $\mathbf{x} = 0$ của hệ phương trình (5.38) có thể ổn định, và cũng có thể không ổn định, phụ thuộc vào các số hạng phi tuyến.

Tiêu chuẩn ổn định theo nhân tử đặc trưng. Nếu tất cả các nhân tử đặc trưng có môđun nhỏ hơn đơn vị, thì nghiệm $x = 0$ của hệ phương trình vi phân tuyến tính thuần nhất hệ số tuần hoàn (5.38) sẽ ổn định tiệm cận. Ngược lại nếu có ít nhất một nhân tử đặc trưng của hệ phương trình (5.38) có môđun lớn hơn đơn vị, thì nghiệm $x = 0$ sẽ không ổn định. Nếu không có nhân tử đặc trưng nào có môđun lớn hơn đơn vị, nhưng có nhân tử đặc trưng có môđun bằng đơn vị thì nghiệm $x = 0$ của hệ phương trình (5.38) có thể ổn định, và cũng có thể không ổn định, phụ thuộc vào các số hạng phi tuyến.

c) *Chú ý*

Trong trường hợp không có nhân tử đặc trưng nào có môđun lớn hơn đơn vị, nhưng có nhân tử đặc trưng có môđun bằng đơn vị thì ta cần nghiên cứu thêm:

- Nếu các nghiệm phương trình đặc trưng có môđun bằng đơn vị là các nghiệm đơn vị thì $x = 0$ của hệ phương trình vi phân tuyến tính hệ số tuần hoàn (5.38) ổn định.
- Nếu các nghiệm phương trình đặc trưng có môđun bằng đơn vị là nghiệm bội. Gọi bội đại số của ρ_j là k_j bội hình học của ρ_j là γ_j . Ta có kết luận sau:

+ Nếu $k_j = \gamma_j, (\forall j)$ thì nghiệm $x = 0$ ổn định,

+ Nếu $k_j > \gamma_j, (\exists j)$ thì chưa kết luận được về tính ổn định của nghiệm $x = 0$

5.6 Khảo sát ổn định của nghiệm phương trình vi phân phi tuyến bằng phương pháp xấp xỉ bậc nhất

Năm 1892 Liapunov, nhà toán học người Nga, đã trình bày trong luận án tiến sĩ của mình hai phương pháp nghiên cứu ổn định của nghiệm $x_s \equiv 0 (s=1, \dots, n)$ của hệ phương trình vi phân chuyển động (5.1). Ngày nay hai phương pháp đó có tên gọi như sau:

- Phương pháp nghiên cứu ổn định bằng các phương trình vi phân xấp xỉ bậc nhất (hay Phương pháp xấp xỉ bậc nhất).
- Phương pháp nghiên cứu ổn định bằng hàm Liapunov (hay Phương pháp trực tiếp).

Trong tài liệu này ta giới hạn xét ổn định của hệ phi tuyến bằng phương pháp xấp xỉ bậc nhất.

a) *Các phương trình xấp xỉ bậc nhất của hệ nhiều vật*

Giả sử hệ phương trình vi phân phi tuyến mô tả chuyển động phụ của hệ nhiều vật có dạng

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = g_1(t, x_1, x_2, \dots, x_n) \\ \dot{x}_2 = g_2(t, x_1, x_2, \dots, x_n) \\ \dots\dots\dots \\ \dot{x}_n = g_n(t, x_1, x_2, \dots, x_n) \end{cases} \quad (5.44)$$

Trong đó $g_i(t, x_1, \dots, x_n)$ là các hàm tuần hoàn chu kỳ T, khả vi ở lân cận gốc tọa độ và $g_i(t, 0, \dots, 0) = 0$. Khai triển Taylor các hàm $g_s(t, x_1, \dots, x_n)$, ($s = 1, 2, \dots, n$) ta được

$$g_s(t, x_1, x_2, \dots, x_n) = a_{s1}(t)x_1 + a_{s2}(t)x_2 + \dots + a_{sn}(t)x_n + r_s(t, x_1, x_2, \dots, x_n) \quad (5.45)$$

Trong đó $a_{si}(t) = a_{si}(t+T)$ là các hàm liên tục tuần hoàn, $r_s(t, x_1, x_2, \dots, x_n)$ là các hàm phi tuyến chứa các số hạng bậc ≥ 2 , $r_s(t, 0, 0, \dots, 0) = 0$.

Định nghĩa 5.6. Hệ phương trình vi phân tuyến tính hệ số tuần hoàn

$$\dot{x}_s = a_{s1}(t)x_1 + a_{s2}(t)x_2 + \dots + a_{sn}(t)x_n \quad (s = 1, 2, \dots, n) \quad (5.46)$$

được gọi là hệ phương trình xấp xỉ bậc nhất của hệ phương trình vi phân phi tuyến (5.45).

Phương trình đặc trưng của hệ phương trình vi phân tuyến tính (5.46) có dạng

$$|\Phi(T) - \rho E| = \begin{vmatrix} x_1^{(1)}(T) - \rho & x_1^{(2)}(T) & \dots & x_1^{(n)}(T) \\ x_2^{(1)}(T) & x_2^{(2)}(T) - \rho & \dots & x_2^{(n)}(T) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_n^{(1)}(T) & x_n^{(2)}(T) & \dots & x_n^{(n)}(T) - \rho \end{vmatrix} = 0 \quad (5.47)$$

b) **Định lý Liapunov về ổn định theo xấp xỉ bậc nhất**

Định lý 5.5. Nếu tất cả các số mũ đặc trưng của hệ phương trình vi phân tuyến tính thuần nhất hệ số tuần hoàn (5.46) đều có phần thực âm thì nghiệm $x_s^* \equiv 0$, ($s = 1, \dots, n$) của hệ phương trình vi phân phi tuyến (5.44) ổn định tiệm cận. Nếu phương trình (5.46) có ít nhất một số mũ đặc trưng có phần thực dương thì nghiệm $x_s^* \equiv 0$, ($s = 1, \dots, n$) của hệ phương trình vi phân phi tuyến (5.44) không ổn định.

Định lý 5.6. Nếu phương trình (5.46) không có số mũ đặc trưng với phần thực dương, nhưng có số mũ đặc trưng với phần thực bằng không thì nghiệm $x_s^* \equiv 0$, ($s = 1, \dots, n$) của hệ phương trình vi phân phi tuyến (5.44) có thể ổn định mà cũng có thể không ổn định, phụ thuộc vào các số hạng phi tuyến $r_s(t, x_1, \dots, x_n)$.

Chú ý. Trường hợp thứ hai này được gọi là trường hợp tới hạn.

§6 DAO ĐỘNG TUYẾN TÍNH CỦA HỆ NHIỀU VẬT

6.1. Tính toán dao động tuần hoàn bằng phương pháp số

Dao động của hệ nhiều vật là lĩnh vực còn ít được nghiên cứu. Trong đoạn này ta giới hạn trình bày việc tính toán dao động tuần hoàn của hệ nhiều vật khi phương trình vi phân mô tả dao động là phương trình vi phân tuyến tính hệ số tuần hoàn.

Xét trường hợp hệ phương trình vi phân tuyến tính

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{P}(t)\mathbf{x} + \mathbf{f}(t) \quad (6.1)$$

Trong đó ma trận $\mathbf{P}(t)$ và véc tơ $\mathbf{f}(t)$ tuần hoàn theo t chu kỳ T . Hệ phương trình vi phân tuyến tính thuần nhất tương ứng với hệ (6.1) có dạng

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{P}(t)\mathbf{x} \quad (6.2)$$

Từ lý thuyết phương trình vi phân ta đã biết: Nếu hệ phương trình (6.2) không có nghiệm tuần hoàn chu kỳ T , ngoài nghiệm tầm thường thì hệ phương trình vi phân (6.1) có đúng một nghiệm tuần hoàn chu kỳ T . Do đó nếu tìm được điều kiện đầu của nghiệm tuần hoàn, thì chỉ cần tích phân số trên một chu kỳ $[0, T]$ ta sẽ tìm được nghiệm tuần hoàn. Bây giờ ta trình bày một phương pháp số tìm các giá trị đầu của nghiệm tuần hoàn chu kỳ T của hệ phương trình vi phân tuyến tính (6.1). Nghiệm tuần hoàn chu kỳ T của hệ (6.1) phải thoả mãn điều kiện biên sau

$$\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}(T) \quad (6.3)$$

Ta chia đoạn $[0, T]$ thành m phần bằng nhau, mỗi phần có độ dài là:

$$h = t_i - t_{i-1} = T/m$$

như vậy các điểm chia là: $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_{m-1} < t_m = T$

Tương ứng với cách chia này ta đưa vào ký hiệu

$$\mathbf{x}_i = \mathbf{x}(t_i)$$

Theo phương pháp Runge-Kutta bậc bốn, nghiệm gần đúng được tính theo công thức:

$$\mathbf{x}_i = \mathbf{x}_{i-1} + \frac{1}{6} \left[\mathbf{k}_1^{(i-1)} + 2\mathbf{k}_2^{(i-1)} + 2\mathbf{k}_3^{(i-1)} + \mathbf{k}_4^{(i-1)} \right] \quad (6.4)$$

trong đó:

$$\begin{aligned} \mathbf{k}_1^{(i-1)} &= h \left[\mathbf{P}(t_{i-1})\mathbf{x}_{i-1} + \mathbf{f}(t_{i-1}) \right] \\ \mathbf{k}_2^{(i-1)} &= h \left[\mathbf{P}\left(t_{i-1} + \frac{h}{2}\right)\left(\mathbf{x}_{i-1} + \frac{1}{2}\mathbf{k}_1^{(i-1)}\right) + \mathbf{f}\left(t_{i-1} + \frac{h}{2}\right) \right] \\ \mathbf{k}_3^{(i-1)} &= h \left[\mathbf{P}\left(t_{i-1} + \frac{h}{2}\right)\left(\mathbf{x}_{i-1} + \frac{1}{2}\mathbf{k}_2^{(i-1)}\right) + \mathbf{f}\left(t_{i-1} + \frac{h}{2}\right) \right] \\ \mathbf{k}_4^{(i-1)} &= h \left[\mathbf{P}(t_i)\left(\mathbf{x}_{i-1} + \frac{1}{2}\mathbf{k}_3^{(i-1)}\right) + \mathbf{f}(t_i) \right] \end{aligned} \quad (6.5)$$

Thế (6.5) vào (6.4), ta nhận được phương trình

$$\mathbf{x}_i = \mathbf{A}_{i-1}\mathbf{x}_{i-1} + \mathbf{b}_{i-1} \quad (6.6)$$

Các ma trận \mathbf{A}_{i-1} được tính theo công thức

$$\begin{aligned}
\mathbf{A}_{i-1} = \mathbf{E} + \frac{1}{6} & \left\{ h \left[\mathbf{P}(t_{i-1}) + 4\mathbf{P}(t_{i-1} + \frac{h}{2}) + \mathbf{P}(t_i) \right] \right. \\
& + h^2 \left[\mathbf{P}(t_{i-1} + \frac{h}{2})\mathbf{P}(t_{i-1}) + \mathbf{P}^2(t_{i-1} + \frac{h}{2}) + \frac{1}{2}\mathbf{P}(t_i)\mathbf{P}(t_{i-1} + \frac{h}{2}) \right] \\
& + \frac{h^3}{2} \left[\mathbf{P}^2(t_{i-1} + \frac{h}{2})\mathbf{P}(t_{i-1}) + \frac{1}{2}\mathbf{P}(t_i)\mathbf{P}^2(t_{i-1} + \frac{h}{2}) \right] \\
& \left. + \frac{h^4}{8}\mathbf{P}(t_i)\mathbf{P}^2(t_{i-1} + \frac{h}{2})\mathbf{P}(t_{i-1}) \right\} \quad (i = 1, \dots, m) \quad (6.7)
\end{aligned}$$

còn các véc tơ \mathbf{b}_{i-1} có dạng

$$\begin{aligned}
\mathbf{b}_{i-1} = \frac{1}{6} & \left\{ h \left[\mathbf{f}(t_{i-1}) + 4\mathbf{f}(t_{i-1} + \frac{h}{2}) + \mathbf{f}(t_i) \right] \right. \\
& + h^2 \left[\mathbf{P}(t_{i-1} + \frac{h}{2})\mathbf{f}(t_{i-1}) + \mathbf{P}(t_{i-1} + \frac{h}{2})\mathbf{f}(t_{i-1} + \frac{h}{2}) + \frac{1}{2}\mathbf{P}(t_i)\mathbf{f}(t_{i-1} + \frac{h}{2}) \right] \\
& + \frac{h^3}{2} \left[\mathbf{P}^2(t_{i-1} + \frac{h}{2})\mathbf{f}(t_{i-1}) + \frac{1}{2}\mathbf{P}(t_i)\mathbf{P}(t_{i-1} + \frac{h}{2})\mathbf{f}(t_{i-1} + \frac{h}{2}) \right] \\
& \left. + \frac{h^4}{8}\mathbf{P}(t_i)\mathbf{P}^2(t_{i-1} + \frac{h}{2})\mathbf{f}(t_{i-1}) \right\} \quad (6.8)
\end{aligned}$$

Từ (4.25) ta suy ra hệ phương trình sau

$$\begin{aligned}
\mathbf{x}_1 &= \mathbf{A}_0\mathbf{x}_0 + \mathbf{c}_1; \quad \mathbf{c}_1 = \mathbf{A}_0\mathbf{c}_0 + \mathbf{b}_0 \\
\mathbf{x}_2 &= \mathbf{A}_1\mathbf{A}_0\mathbf{x}_0 + \mathbf{c}_2; \quad \mathbf{c}_2 = \mathbf{A}_1\mathbf{c}_1 + \mathbf{b}_1 \\
&\dots\dots\dots
\end{aligned} \quad (6.9)$$

$$\mathbf{x}_m = \left(\prod_{i=m-1}^0 \mathbf{A}_i \right) \mathbf{x}_0 + \mathbf{c}_m; \quad \mathbf{c}_m = \mathbf{A}_{m-1}\mathbf{c}_{m-1} + \mathbf{b}_{m-1}$$

Chú ý đến điều kiện (6.3), từ phương trình cuối của (6.9) ta có

$$\left(\mathbf{E} - \prod_{i=m-1}^0 \mathbf{A}_i \right) \mathbf{x}_0 = \mathbf{c}_m \quad (6.10)$$

Giải hệ phương trình đại số tuyến tính (6.10) ta nhận được giá trị đầu nghiệm tuần hoàn của hệ phương trình (6.1). Với các giá trị đầu đó, ta dễ dàng tính được nghiệm tuần hoàn của hệ phương trình (6.1) bằng phương pháp số.

6.2 Thí dụ áp dụng

Hình 6.14 là sơ đồ của bộ điều chỉnh của máy rền dập. Mô hình cơ học của bộ điều chỉnh của máy rền dập được biểu diễn trên hình 6.15. Từ các phương trình dao động của Thí dụ 6.6 ta dễ dàng nhận được các phương trình dao động tuyến tính của bộ điều chỉnh này

$$\mathbf{M}(\Omega t)\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{C}(\Omega t)\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{K}(\Omega t)\mathbf{q} = \mathbf{d}(\Omega t) \quad (6.11)$$

Trong đó

$$\mathbf{M}(\Omega t) = \begin{bmatrix} I_1 + m_2 \bar{U}'^2 & m_2 \bar{U}' \\ m_2 \bar{U}' & m_2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C}(\Omega t) = \begin{bmatrix} c_1 + 2m_2 \Omega \bar{U}' \bar{U}'' & 0 \\ 2m_2 \Omega \bar{U}'' & c_2 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{K}(\Omega t) = \begin{bmatrix} k_1 + F \bar{U}'' + m_2 \Omega^2 (\bar{U}' \bar{U}''' + \bar{U}''^2) & 0 \\ m_2 \Omega^2 \bar{U}''' & k_2 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{d} = \begin{bmatrix} -F \bar{U}' - m_2 \Omega^2 \bar{U}' \bar{U}'' \\ -F - m_2 \Omega^2 \bar{U}'' \end{bmatrix}, \quad \mathbf{q} = \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{bmatrix}$$

Hàm truyền bậc nhất của cơ cấu cam $U'(\varphi)$ có dạng

$$U'(\varphi) = \sum_{k=1}^K (a_k \cos k\varphi + b_k \sin k\varphi) \quad (6.12)$$

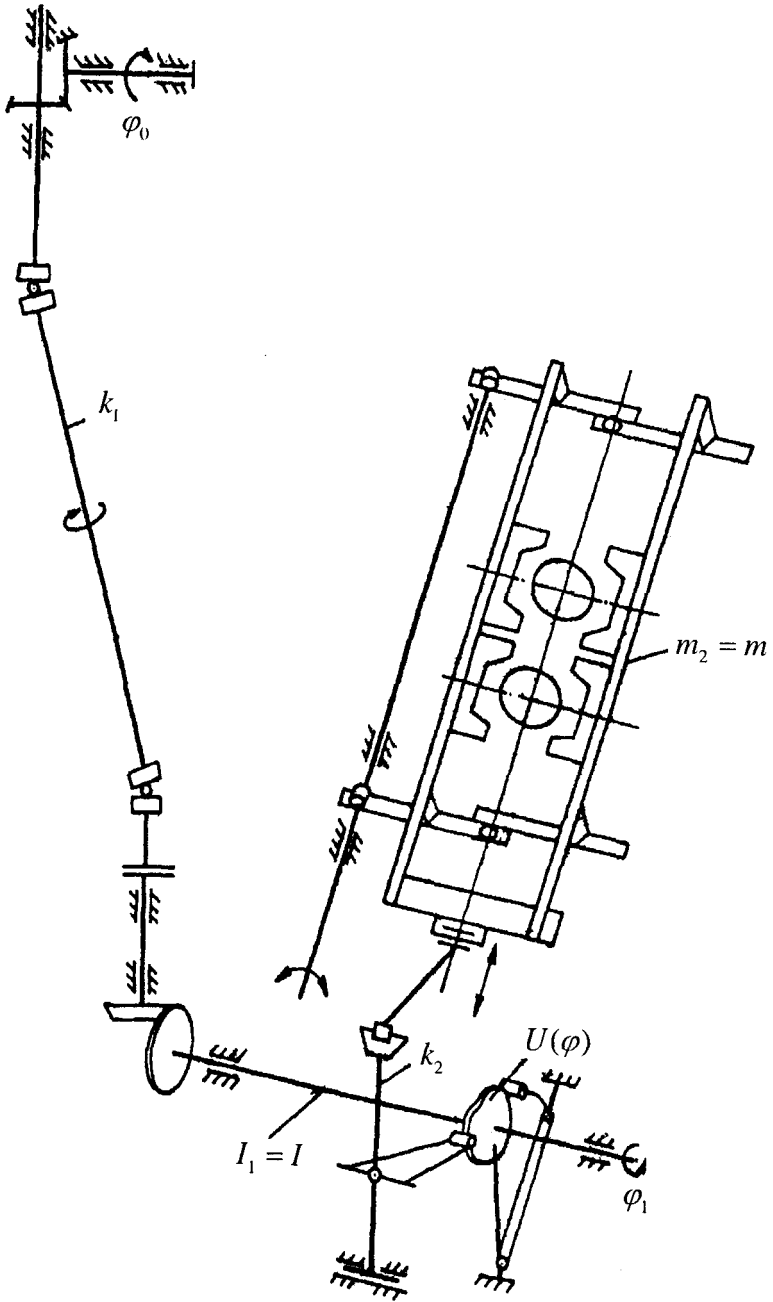
Để tính toán bằng số ta cho biết thêm số liệu của các tham số động lực cơ cấu:

$n = 50$ vòng/phút; $I_1 = 1,11 \text{ kgm}^2$; $m_2 = 136 \text{ kg}$; $c_1 = 18,5 \text{ Nms}$; $c_2 = 2332 \text{ Ns/m}$; $k_1 = 7692 \text{ Nm}$; $k_2 = 10^6 \text{ N/m}$.

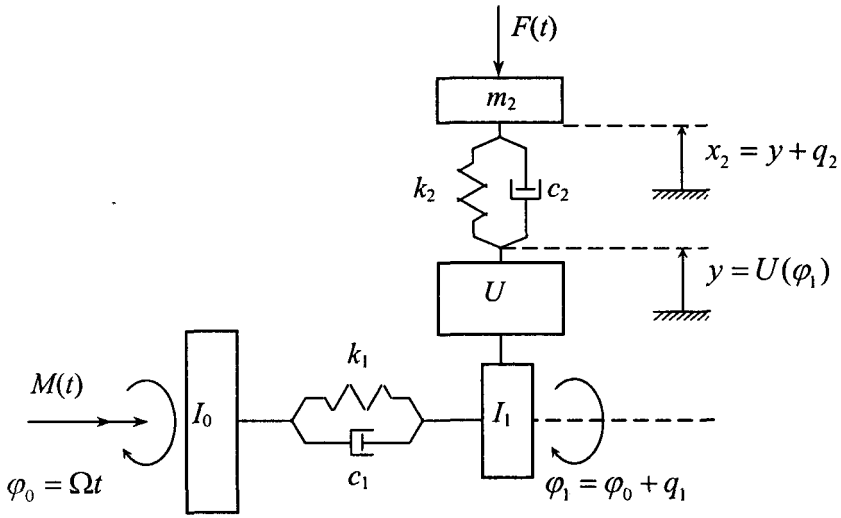
Ngoài ra số liệu của các hệ số của đa thức lượng giác (6.12) được cho trong bảng 6.1, với với các $b_i = 0$.

	Phương án 1	Phương án 2
a_1	0,22165	0,22206
a_2	0	0
a_3	0,05560	0,08539
a_4	0	0
a_5	-0,01706	0,00518
a_6	0	0
a_7	0	-0,00373
a_8	0	0
a_9	0	0,00345
a_{10}	0	0
a_{11}	0	-0,00182
a_{12}	0	0

Bảng 6.1



Hình 6.14. Sơ đồ bộ điều chỉnh của máy rền đập



Hình 6.15. Mô hình dao động

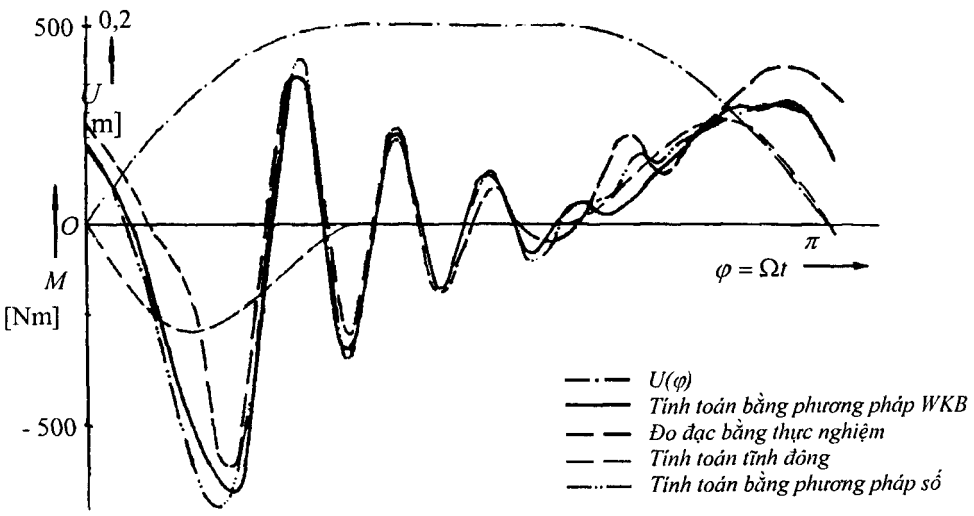
Việc tính toán thí dụ này bằng phương pháp số được tiến hành nhờ hệ chương trình “Tính toán chuyển động bình ổn của cơ cấu” của Bộ môn Cơ học ứng dụng, Trường Đại học Bách khoa Hà Nội. Một phần các kết quả tính toán được ghi lại ở bảng 6.2 và các hình 6.16 đến 6.18.

Bảng 6.2 cho biết giá trị tuyệt đối lớn nhất của nghiệm phương trình đặc trưng của phương trình vi phân dao động tuyến tính của cơ cấu với hai phương án về các hệ số của hàm truyền bậc nhất.

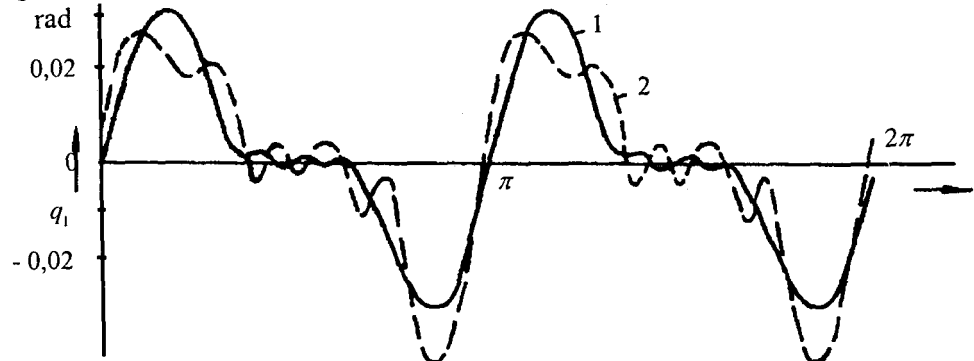
	ρ_{\max}
Phương án 1	0,001992
Phương án 2	0,001623

Bảng 6.2

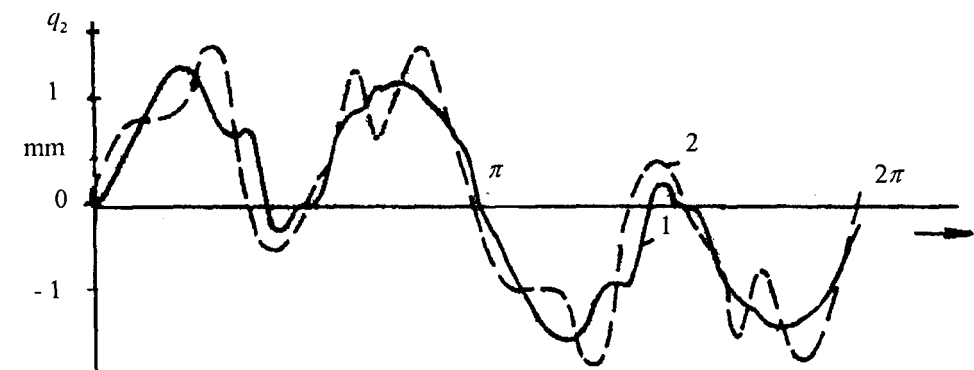
Từ đó ta thấy cơ cấu ổn định động lực vì $|\rho_{\max}| < 1$. Sự phù hợp giữa kết quả tính toán theo lý thuyết và kết quả thực nghiệm cho ở hình 6.16. Trong các hình 6.16, hình 6.17 cũng như hình 6.18 trình bày các kết quả tính theo phương pháp số và theo phương pháp WKB (xem Rössler, 1985). Khi tính bằng phương pháp WKB ta phải sử dụng giả thiết $\bar{U}^m \approx 0$ để cho ma trận $\mathbf{K}(\Omega t)$ đối xứng và ta cũng phải đưa ra một số giả thiết khá thô nữa về ma trận cản $\mathbf{C}(\Omega t)$. Các hạn chế này ta dễ dàng vượt qua khi sử dụng phương pháp số.



Hình 6.16. Mômen trực dẫn của bộ điều chỉnh các kết quả tính toán và thực nghiệm



Hình 6.17. Đường 1 - tính bằng phương pháp số, đường 2 - tính bằng phương pháp WKB



Hình 6.18. Đường 1 - tính bằng phương pháp số, đường 2 - tính bằng phương pháp WKB

TÀI LIỆU THAM KHẢO

1. F. M. L. Amirouche: *Computational Methods in Multibody Dynamics*. Prentice Hall, Englewood Cliffs, New Jersey 1992.
2. F. M. L. Amirouche: *Fundamentals of Multibody Dynamics/ Theory and Applications*. Birkhäuser, Boston 2006.
3. J. Angeles: *Spatial Kinematic Chains/Analysis, Synthesis, Optimization*. Springer-Verlag, Berlin 1982.
4. J. Angeles: *Rational Kinematics*. Springer-Verlag, New York 1988.
5. J. Angeles: *Fundamentals of Robotic Mechanical Systems (2.Edition)*. Springer-Verlag, New York 2003.
6. G. Antonelli: *Underwater Robots*. Springer-Verlag, Berlin 2003.
7. M.D. Ardema: *Newton-Euler Dynamics*. Springer-Verlag, New York 2005.
8. W. I. Arnold: *Mathematical Methods of Classical Mechanics*. Springer-Verlag, New York 1997.
9. H. Asada, J.-J. E. Slotine: *Robot Analysis and Control*. John Wiley & Sons, New York 1986.
10. D. S. Bae, E. J. Haug: A recursive Formulation for Constrained Mechanical System Dynamics/ Part I, Open Loop Systems. *Mechanics of Structures and Machines*, Vol. 15, pp. 359-382, 1987.
11. D. S. Bae, E. J. Haug: A recursive Formulation for Constrained Mechanical System Dynamics/ Part II, Closed Loop Systems. *Mechanics of Structures and Machines*, Vol. 15, pp. 481-506, 1987.
12. D. Bestle: *Analyse und Optimierung von Mehrkörpersystemen*. Springer-Verlag, Berlin 1994.
13. W. W. Bolotin: *Kinetische Stabilität elastischer Systeme*. Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin 1961.
14. O. Bottema, B. Roth: *Theoretical Kinematics*. North Holland, Amsterdam 1979.
15. H. Bremer: *Dynamik und Regelung mechanischer Systeme*. B.G.Teubner, Stuttgart 1988.
16. H. Bremer, F. Pfeiffer: *Elastische Mehrkörpersysteme*. B. G. Teubner, Stuttgart 1992.
17. J. M. McCarthy: *Introduction to Theoretical Kinematics*. The MIT Press, Cambridge 1990.
18. W.L. Cleghorn: *Mechanics of Machines*. Oxford University Press, New York 2005.

19. J. J. Craig: *Introduction to Robotics* (2.Edition). Addison-Wesley, Reading 1989.
20. J. Denavit, R.S. Hartenberg: „A Kinematic Notation for Low Pair Mechanisms Based on Matrices“. *Transactions of ASME, Journal of Applied Mechanics*, 22 (1955), pp. 215-221.
21. H. Dresig, F. Holzweißig: *Maschinendynamik* (7.Auflage). Springer-Verlag, Berlin 2006.
22. H. Dresig: *Schwingungen mechanischer Antriessysteme* (2.Auflage). Springer-Verlag, Berlin 2006.
23. H. Dresig, I.I. Vul'fson: *Dynamik der Mechanismen*. Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin 1989.
24. P. Eberhard: *Kontaktuntersuchungen durch hybride Mehrkörpersystem/ Finite Elemente Simulationen*. Shaker Verlag, Aachen 2000.
25. E. Eich-Soellner, C. Führer: *Numerical Methods in Multibody Dynamics*. B.G. Teubner, Stuttgart 1998.
26. U. Fischer, W. Stephan: *Prinzipien und Methoden der Dynamik*. Fachbuchverlag, Leipzig 1972.
27. C. W. Gear: *Numerical Initial Value Problem in Ordinary Differential Equations*. Prentice Hall, Englewood Cliffs, New Jersey 1971.
28. C. W. Gear: Differential Algebraic Equations. In *Computer Aided Analysis and Optimization of Mechanical System Dynamics*, edited by E. J. Haug, Springer-Verlag, Berlin 1984, pp. 323-334.
29. M. Geradin, A. Cardona: *Flexible Multibody Dynamics/ A Finite Element Approach*. John Wiley & Sons, Chichester 2001.
30. G. H. Golub, Ch. F. Van Loan: *Matrix Computations* (3. Edition). The Johns Hopkins University Press, London 1996.
31. H. Göcke, J. Rössler: „KOGEAN- Ein Algorithmus zur vollautomatisierten Analyse ebener Mechanismen, von der Berechnung bis zur lochbandgesteuerten Zeichnungsausgabe“. *WZ der TH Karl-Marx-Stadt* 17 (1975), N.1, S.203-248.
32. H. Göcke, Nguyen Van Khang: „Ein Beitrag zur Lösung der Bewegungsgleichungen von Mechanismen mit mehreren Freiheitsgraden“. *WZ der TH Karl-Marx-Stadt* 17(1975), N.2, S.175-186.
33. H. Hahn: *Rigid Body Dynamics of Mechanisms / 1 Theoretical Basis*. Springer-Verlag, Berlin 2002.
34. H. Hahn: *Rigid Body Dynamics of Mechanisms / 2 Applications*. Springer-Verlag, Berlin 2003.
35. G. Hamel: *Theoretische Mechanik*. Springer-Verlag, Berlin 1949.

36. L. N. Hand, J. D. Finch: *Analytical Mechanics*. Cambridge University Press, 1998.
37. H.-J. Hardtke, B. Heimann, H. Sollmann: *Technische Mechanik II*. Fachbuchverlag Leipzig in Carl Hanser Verlag, München 1997.
38. R. S. Hartenberg, J. Denavit: *Kinematic Synthesis of Linkages*. McGraw-Hill, New York 1964.
39. E. J. Haug: *Computer Aided Kinematics and Dynamics of Mechanical Systems, Vol. I: Basic Methods*. Allyn and Bacon, Boston 1989.
40. E.J. Haug: *Intermediate Dynamics*. Prentice Hall, Englewood Cliffs, New Jersey 1992.
41. E.J. Haug, S.S. Kim, and F.F. Tsai: *Computer Aided Kinenatics and Dynamics, Vol II: Advanced Methods*. Prentice Hall, Englewood Cliffs, New Jersey 1992.
42. B. Heimann, W. Gerth, K. Popp: *Mechatronik (2.Auflage)*. Fachbuchverlag Leipzig in Carl Hanser Verlag, München 2001.
43. M.Hiller, A. Kecskemethy, Ch.Woernle: *Computergestützte Kinematik und Dynamik für Fahrzeuge, Roboter und Mechanismen*. Institut A für Mechanik, Universität Stuttgart 1987.
44. J. M. Hollerbach: „A recursive Lagrangian Formulation of Manipulator Dynamics and Comparative Study of Dynamics Formulation Complexity. *IEEE Transaction on System, Man, and Cybernetics*“, V. 10 (1980), pp. 730-736.
45. R. L. Huston: *Multibody Dynamics*. Butterworth-Heinemann, Boston 1990.
46. M. Husty, A. Karger, H. Sachs, W. Steinhilper: *Kinematik und Robotik*. Springer-Verlag, Berlin 1997.
47. R. Isermann: *Mechatronische Systeme*. Springer-Verlag, Berlin 1999.
48. J. G. De Jalon, E. Bayo: *Kinematic and Dynamic Simulation of Multibody Systems*. Springer-Verlag, New York 1994.
49. K. L. Johnson: *Contact Mechanics*. Cambridge University Press, Cambridge 1985.
50. H. Josephs, R. L. Huston: *Dynamics of Mechanical Systems*. CRS Press, Boca Raton 2002.
51. T. R. Kane, P. W. Likins, D. A. Levinson: *Spacecraft Dynamics*. McGraw.Hill, New York 1983.
52. T. R. Kane, D. A. Levinson: *Dynamics/ Theory and Applications*. McGraw-Hill, New York 1985.
53. T. R. Kane, D.A. Levinson: The Use of Kane's Dynamical Equations in Robotics. *The Int. Journal of Robotics Res.* 2 (1983), No.3, pp. 3-21.

54. S. S. Kim, M. J. Vanderploeg: "QR Decomposition for State Space Representation of Constrained Mechanical Dynamic Systems". *ASME Journal of Mechanisms, Transmissions, and Automation in Design*, Vol. 108, 1986, pp. 183-188.
55. W. Kortüm, P. Lugner: *Systemdynamik und Regelung von Fahrzeugen*. Springer-Verlag, Berlin 1994.
56. E. Kreuzer: *Symbolische Berechnung der Bewegungsgleichungen von Mehrkörpersystemen*. VDI Verlag, Düsseldorf 1979.
57. T. A. Laurwen: *Computational Contact and Impact Mechanics*. Springer-Verlag, New York 2002.
58. A. I. Lurie: *Analytical Mechanics*. Springer-Verlag, Berlin 2002.
59. K. Magnus: *Kreiseltheorie und Anwendungen*. Springer-Verlag, Berlin 1971.
60. K. Magnus, H. H. Müller: *Grundlagen der Technischen Mechanik*. B. G. Teubner, Stuttgart 1988.
61. P. Maisser: "Analytische Dynamik von Mehrkörpersystemen". *ZAMM* 68 (1988), pp. 463-481.
62. L. Meriovitch: *Methods of Analytical Dynamics*. McGraw-Hill, New York 1970.
63. J.-P. Merlet: *Parallel Robots*. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht 2000.
64. F. C. Moon: *Applied Dynamics*. John Wiley & Sons, New York 1998.
65. R. M. Murray, Z. Li, S. S. Sastry: *A Mathematical Introduction to Robotic Manipulation*. CRC Press, Boca Raton 1994.
66. Y. Nakamura: *Advanced Robotics/ Redundancy and Optimization*. Addison-Wesley, Reading 1991.
67. D. Negrut, E.J. Haug, H.C. German: An Implicit Runge-Kutta Method for Integration of Differential Algebraic Equations of Multibody Dynamics. *Multibody System Dynamics* 9 (2003), pp. 121-142.
68. J. I. Neimark, N. A. Fufaev: *Dynamics of Nonholonomic Systems*. American Mathematical Society 1972.
69. Nguyen Van Dao: *Stability of Dynamic Systems*. Vietnam National University Publishing House, Hanoi 1998.
70. Nguyen Quang Hoang: *Zur Modellierung und Regelung ferngesteuerter Unterwasserfahrzeuge*. Fortschritt-Berichte VDI, Reihe 12, Nr. 624. VDI Verlag, Düsseldorf 2006.
71. Nguyen Van Khang: *Ein Beitrag zur dynamischen Analyse ebener Koppelgetriebe mit mehreren Freiheitsgraden mit Hilfe der numerischen Lösung der Bewegungsdifferentialgleichungen*. Diss. A, TH Karl-Marx-Stadt 1973.

72. Nguyen Van Khang: "Über eine Methode zur Lösung der Bewegungsgleichungen von Mechanismen mit mehreren Freiheitsgraden". *WZ der TH Karl-Marx-Stadt* 17(1975), N.1, S.59-70.
73. Nguyen Van Khang: "Über die Relativbewegung ebener Mechanismen". *Rev. Roum. Sci. Techn. - Mec. Appl.* 23(1978), N.2, pp.311-319.
74. Nguyen Van Khang: "Zur näherungsweise Berechnung der dynamischen Stabilität der Bewegung ebener Koppelgetriebe". *Maschinenbautechnik* 27(1978), N.7, S.310-312.
75. Nguyen Van Khang: "Zur Berechnung der dynamischen Stabilitätsbedingungen und periodischen Schwingungen des Gestells ebener Mechanismen". *Rev. Roum. Sci. Techn. - Mec. Appl.* 25(1980), N.2, pp.269-284.
76. Nguyen Van Khang: "Zur Berechnung der dynamischen Stabilitätsbedingungen und periodischen Schwingungen in Mechanismen mit drehelastischer Antriebswelle". *Theoretical and Applied Mechanics*, Sofia 1981, N.1, pp.31-39.
77. Nguyen Van Khang: "Zur Berechnung der dynamischen Stabilitätsbedingungen und periodischen Schwingungen ebener Koppelgetriebe". *Rev. Roum. Sci. Techn. - Mec. Appl.* 26(1981), N.4, pp. 565-578.
78. Nguyen Van Khang: "Numerische Bestimmung der dynamischen Stabilitätsparameter und periodischen Schwingungen ebener Mechanismen". *Rev. Roum. Sci. Techn. - Mec. Appl.* 27 (1982), N.4, pp.495-507.
79. Nguyen Van Khang: "Zur dynamischen Analyse ebener Mechanismen mit mehreren Freiheitsgraden unter Berücksichtigung der Gestellschwingungen". *Rev. Roum. Sci. Techn. - Mec. Appl.* 29(1984), N.1, pp. 65-74.
80. Nguyen Van Khang: "Numerische Untersuchung von periodischen Schwingungen des Gestells ebener Mechanismen". *Technische Mechanik* 5, H.1, S.14-18, Magdeburg 1984.
81. Nguyen Van Khang: "Über den Einfluß von Schwingungen des Gestells auf die dynamischen Stabilitätsbedingungen und periodischen Schwingungen ebener Mechanismen". *Rev. Roum. Sci. Techn. - Mec. Appl.* 29(1984), N.3, S.255-261.
82. Nguyen Van Khang: "Zur numerischen Berechnung der periodischen Schwingungen ebener Mechanismen mit mehreren Freiheitsgraden". *Proceedings of the XV. International Conference on Dynamics of Machines*, Frankfurt/Oder, GDR 1985, Part 2, pp.175-184.

83. Nguyen Van Khang: "Zur numerischen Berechnung der periodischen Torsionsschwingungen in Antriebssystemen in ungleichförmig übersetzenden Getrieben". *Theoretical and Applied Mechanics*, Sofia 1986, N.1, pp.11-17.
84. Nguyen Van Khang: *Dynamische Stabilität und periodische Schwingungen in Mechanismen*. Diss. B, TH Karl-Marx-Stadt 1986.
85. Nguyen Van Khang: "Über den Massenausgleich in Mehrkörpersystemen". *Technische Mechanik* 14, H.3-4, S.233-240, Magdeburg 1994.
86. Nguyen Van Khang: "Anwendung der Substrukturtechnik bei der dynamischen Analyse ebener Mechanismen mit elastischen Gliedern". *ZAMM* 75, Supplement 1, S.119-120, Berlin 1995.
87. Nguyen Van Khang: "On the dynamic stability and periodic vibration of cam mechanisms with elastic drive". *Machine Vibration*, Vol.5, pp.127-130, Springer London 1996.
88. Nguyen Van Khang, Vu Van Khiem: "Numerische Berechnung der dynamischen Stabilitätsbedingungen und der periodischen Schwingungen in Kurvengetrieben mit elastischer Stößelstange". *Technische Mechanik* 16, H.4, S.317-325, Magdeburg 1996.
89. Nguyen Van Khang, Nguyen Quang Hoang: "On a Stability Problem of Industrial Robots". *Applied Electromagnetism and Mechanics (II)*. Japan Society of Applied Electromagnetism and Mechanics 2002, pp. 127-134.
90. Nguyen Van Khang, Do Thanh Trung: "A Contribution to the Dynamic Simulation of Robot Manipulator with the Software Robodyn". *Vietnam Journal of Mechanics*, VAST, Vol.26, No. 4 (2004), pp. 215-225.
91. Nguyen Van Khang, Nguyen Phong Dien, Pham Van Son: "Complete Shaking Force and Shaking Moment Balancing of Spatial Multibody Systems with Open Kinematic Chains". *Vietnam Journal of Mechanics*, VAST, Vol.27, No. 3 (2005), pp. 171-178.
92. Nguyen Van Khang, Nguyen Phong Dien, Pham Van Son: "Balancing Conditions of Planar Mechanisms with Multi-Degree of Freedom". *Vietnam Journal of Mechanics*, VAST, Vol.27, No. 4, (2005), pp. 204-212.
93. Nguyen Van Khang: "About the Gibbs-Appel Equations for Multibody Systems". *Vietnam Journal of Mechanics*, VAST, Vol.28, No. 4 (2006), pp.1-5.
94. Nguyen Van Khang, Nguyen Phong Dien: "Balancing Condition of Spatial Mechanisms". *Mechanism and Machine Theory* 42 (2007).
95. P. E. Nikravesh: *Computer Aided Analysis of Mechanical Systems*. Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New Jersey 1988.
96. J. G. Papastavridis: *Analytical Mechanics*. Oxford University Press, New York 2002.

97. B. Paul: *Kinematics and Dynamics of Planar Machinery*. Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New Jersey 1979.
98. R. P. Paul: *Robot Manipulator / Mathematics, Programming and Control*. The MIT Press, Cambridge 1981.
99. F. Pfeiffer: *Einführung in die Dynamik* (2.Auflage). B.G.Teubner, Stuttgart 1992.
100. F. Pfeiffer, Ch. Glocker: *Multibody Dynamics with Unilateral Contacts*. John Wiley & Sons, New York 1996.
101. K. Popp, W. Schiehlen: *Fahrzeugdynamik*. Teubner, Stuttgart 1993.
102. K. Popp: *Manuskrip zur Vorlesung Mehrkörpersysteme*. Institut für Mechanik, Universität Hannover, 2001.
103. M. Riemer, J. Wauer, W. Wedig: *Mathematische Methoden der Technischen Mechanik*. Springer-Verlag, Berlin 1993.
104. F.P.J. Rimrott: *Introductory Attitude Dynamics*. Springer-Verlag, New York 1989.
105. R.E. Roberson, R. Schwertassek: *Dynamics of Multibody Systems*. Springer-Verlag, New York 1988.
106. W. Roddeck: *Einführung in die Mechatronik* (2. Auflage). B.G. Teubner, Stuttgart 2003.
107. J. Rössler: *Dynamik von Mechanismen-Antriebssystemen in Textil- und Verarbeitungsmaschinenbau*. Diss. B, TH Karl-Marx-Stadt 1985.
108. S. K. Saha, W. Schiehlen: „Recursive Kinematics and Dynamics for Parallel Structural Coupled-Loop Multibody Systems“. *Mechanics of Structures and Machines*, Vol. 29 (2001), pp. 143-175.
109. J.-C. Samin, P. Fiset: *Symbolic Modeling of Multibody Systems*. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht 2003.
110. W. Satdler: *Analytical Robotics and Mechatronics*. McGraw-Hill, New York 1995.
111. W. O. Schiehlen, P. C. Müller: *Lineare Schwingungen*. Akademische Verlagsgesellschaft, Wiesbaden 1976.
112. W. Schiehlen: Dynamics of Complex Multibody Systems“, *SM Archives*, Vol. 9, 1982, pp. 297-308.
113. W. Schiehlen, P. Eberhard: *Technische Dynamik* (2.Auflage). B.G. Teubner, Stuttgart 2004.
114. W. Schiehlen (Editor): *Multibody Systems Handbook*. Springer-Verlag, Berlin 1990.

115. W. Schiehlen, E. Kreuzer: *Symbolic Computerized Derivation of Equations of Motion*. In *Dynamics of Multibody Systems*, edited by K. Magnus, Springer-Verlag, Berlin 1978.
116. R. J. Schilling: *Fundamentals of Robotics*. Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New Jersey 1990.
117. R. Schwertassek, O. Wallrapp: *Dynamik flexibler Mehrköpersysteme*. Vieweg, Braunschweig/Wiesbaden 1999.
118. L. Sciavicco, B. Siciliano: *Modelling and Control of Robot Manipulators* (2. Edition). Springer-Verlag, London 2000.
119. R. von Schwerin: *Multibody System Simulation / Numerical Methods, Algorithms, and Software*. Springer-Verlag, Berlin 1999.
120. A. A. Shabana: *Dynamics of Multibody Systems* (3. Edition). Cambridge University Press, Cambridge 2005.
121. A. A. Shabana: *Computational Dynamics* (2. Edition), John Wiley & Sons, New York 2001.
122. M. W. Spong, M. Vidyasagar: *Robot Dynamics and Control*. John Wiley & Sons, New York 1989.
123. V. Stejskal, M. Valasek: *Kinematics and Dynamics of Machinery*. Marcel Dekker, New York 1996.
124. W. J. Stronge: *Impact Mechanics*. Cambridge University Press, Cambridge 2000.
125. H. Troger, A. Steindl: *Nonlinear Stability and Bifurcation Theory*. Springer-Verlag, Wien 1991.
126. Lung-Wen Tsai: *Robot Analysis*. John Wiley & Sons, New York 1999.
127. H. Ulbrich: *Maschinendynamik*. B.G. Teubner, Stuttgart 1996.
128. J. Volmer und Autorenkollektiv: *Getriebetechnik/Koppelgetriebe*. Verlag Technik, Berlin 1979.
129. J. Volmer und Autorenkollektiv: *Getriebetechnik/Kurvengetriebe* (2. Auflage). Verlag Technik, Berlin 1989.
130. X. Wang, E.J. Haug, W. Pan: *Implicit Numerical Integration for Design Sensitivity Analysis of Rigid Multibody Systems*. *Mechanics Based Design of Structures and Machines*, 33 (2005), pp. 1-30.
131. R. A. Wehage, E. J. Haug: "Generalized Coordinate Partitioning for Dimension Reduction in Analysis of Constrained Dynamic Systems". *ASME Journal of Mechanical Design*, Vol. 104, 1982, pp. 247-255.
132. J. Wittenburg: *Dynamics of Systems of Rigid Bodies*. B. G. Teubner, Stuttgart 1977.

- 133.Ch. Wörnle: *Manuskript zur Vorlesung Dynamik von Mehrköpersystemen*. Universität Rostock 2001.
- 134.M. Xie: *Flexible Multibody Systems Dynamics/ Theory and Applications*. Taylor& Francis, London 1994.
- 135.T. Yoshikawa: *Foundations of Robotics*. The MIT Press, Cambridge 1990.
- 136.I. I. Artobolevskii: *Theory of Mechanisms and Machines* (in Russian). Nauka, Moscow 1975.
- 137.L. V. Assur: *Investigation of Planar Mechanisms Containing Lower Kinematic Pairs from the Point of View of Their Structure and Classification* (in Russian). Izdatelstvo Akademii Nauk, Moscow 1952.
- 138.V. V. Dobronravov: *Fundamentals of Mechanics of Nonholonomic Systems* (in Russian). Vysshaya Schkola, Moscow 1976.
- 139.V. A. Zinovev: *Spatial Mechanisms with Lower Kinematic Pairs* (in Russian). Gostechizdat, Moscow 1952.
- 140.Đào Huy Bích, Phạm Huyễn: *Cơ học lý thuyết*. NXB Đại học Quốc gia, Hà Nội 2002.
- 141.Phan Nguyên Di, Nguyễn Văn Khang, Đỗ Sanh: *Ổn định chuyển động trong kỹ thuật*. NXB Khoa học và Kỹ thuật, Hà Nội 1986.
- 142.Phan Nguyên Di, Nguyễn Văn Khang: *Tính toán dao động máy*. NXB Khoa học và Kỹ thuật, Hà Nội 1991.
- 143.Nguyễn Văn Đạo: *Cơ học giải tích*. NXB Đại học Quốc gia, Hà Nội 2002.
- 144.Nguyễn Thế Hoàn, Phạm Phú: *Cơ sở Phương trình vi phân và Lý thuyết ổn định*. NXB Giáo dục, Hà Nội 2000.
- 145.Nguyễn Văn Khang: *Cơ sở Cơ học kỹ thuật* (in lần thứ 2). NXB Đại học Quốc gia, Hà Nội 2005.
- 146.Nguyễn Văn Khang: *Dao động kỹ thuật* (in lần thứ 4). NXB Khoa học và Kỹ thuật, Hà Nội 2005.
- 147.Vũ Văn Khiêm: *Tính toán dao động tuần hoàn của cơ cấu có các khâu rắn và khâu đàn hồi bằng phương pháp số*. Luận án PTSKH, Trường Đại học Bách khoa Hà Nội 1996.
- 148.Đình Văn Phong: *Phương pháp số trong Cơ học*. NXB Khoa học và Kỹ thuật, Hà Nội 1999.
- 149.Nguyễn Thiện Phúc: *Rôbot công nghiệp*. NXB Khoa học và Kỹ thuật, Hà Nội 2002.
- 150.Đỗ Sanh: *Động lực học máy*. NXB Khoa học và Kỹ thuật, Hà Nội 2004.
- 151.Phạm Văn Sơn: *Về các điều kiện cân bằng khối lượng của hệ nhiều vật*. Luận án Tiến sĩ kỹ thuật, Trường Đại học Bách khoa Hà Nội 2006.
- 152.Bùi Tường: *Cơ học giải tích*. NXB Đại học và THCN, Hà Nội 1971.

DANH MỤC TỪ TRA CỨU (INDEX)

A

Ánh xạ tuyến tính 33

B

Bài toán giá trị đầu 273

Bàn kẹp 135

Bậc tự do 107

Bậc tự do của cơ cấu 107

Bậc tự do khớp động 118

Biểu thức động lượng vật rắn 162

Biểu thức động năng vật rắn 165

Biểu thức mômen động lượng vật rắn 162, 164

Bổ đề Floquet 310

C

Các góc Cardan 77

Các góc Euler 73

Các góc Roll-Pitch-Yaw 85

Các phép tính đại số vectơ 30

Các phép tính đại số tenxơ 43

Các số siêu phức 98

Các tham số Euler 88

Các tham số Rodrigues 99

Cân bằng khối lượng 267

Cấu trúc cây 102

Cấu trúc mạch vòng 102

Chuỗi động 102

Con lắc toán học kép 197, 209, 239

Con lắc vật lý kép 199, 213, 242, 261

Công thức cộng gia tốc góc 70

Công thức cộng vận tốc góc 69

Cơ cấu Cardan 80

Cơ cấu bốn khâu phẳng 109, 110, 292

Cơ cấu hành tinh nón 71

Cơ cấu vi sai nón 71

Cơ cấu tay quay - con trượt không gian 150

D

Dao động của hệ nhiều vật 317

Di chuyển ảo của vật rắn 180

Đ

Đạo hàm ma trận theo thời gian 38

Đạo hàm riêng của vectơ theo vectơ 39

Đạo hàm riêng của vô hướng theo vectơ 40

Đạo hàm vectơ theo thời gian 38

Đạo hàm vectơ trong các hệ quy chiếu khác nhau 69

Điểm định vị 48

Điều kiện ràng buộc 112

Định lý biến thiên động lượng 168

Định lý biến thiên mômen động lượng 168

Định lý Euler 53

Định lý Floquet 294

Định lý nhân tử Lagrange 184

Định lý trực giao 183

Định lý về gia tốc góc 70

Định lý về vận tốc góc 58, 69

Định nghĩa gia tốc góc 68

Định nghĩa vận tốc góc 57, 65

Độ dời ảo 181

Độ quay ảo 181

G

Gia tốc góc của vật rắn 68

Gyrôscóp 172

H

Hạng của ma trận 22

Hệ hólônôm 203, 245

Hệ lực quán tính 178, 267

Hệ phi hólônôm 245, 253

Hướng của vật rắn 48

K

Không gian Euclide 33

Không gian vectơ 31

Khớp bậc cao 107

Khớp bậc thấp 105

Khớp Cardan 80

Khớp động 104

L

- Lực hoạt động 186
- Lực hoạt động suy rộng 232
- Lực quán tính của vật rắn 178, 253
- Lực quán tính suy rộng 232

M

- Ma trận chính quy 19
- Ma trận cosin chỉ hướng 49
- Ma trận của ánh xạ tuyến tính 35
- Ma trận của tenxơ quán tính 157
- Ma trận của toán tử tuyến tính 34
- Ma trận Denavit-Hartenberg 134
- Ma trận đối xứng 19
- Ma trận đối xứng lệch 19
- Ma trận đơn đạo 311
- Ma trận đơn vị 18
- Ma trận Jacôbi quay 142, 191
- Ma trận Jacôbi tịnh tiến 142, 191
- Ma trận kỳ dị 19
- Ma trận nghịch đảo 21
- Ma trận quay cơ bản 54
- Ma trận trực giao 21
- Ma trận tựa nghịch đảo 22
- Ma trận vuông 17
- Ma trận xác định dương 37

N

- Nguyên lý d'Alembert-Lagrange 186
- Nguyên lý Gauss 190
- Nguyên lý Jordan 188

Ô

- Ôn định chuyển động 303
- Ôn định của hệ phương trình vi phân tuyến tính 306, 312, 313
- Ôn định đầu ra - đầu vào 306
- Ôn định động lực 306
- Ôn định Lyapunôv 303
- Ôn định theo xấp xỉ thứ nhất 316

P

- Phép dịch chuyển song song các hệ quy chiếu 168
- Phép quay các hệ quy chiếu 169
- Phong tính đại số tenxơ 43
- Phương pháp Adams 278
- Phương pháp chiếu vuông góc 146
- Phương pháp dự báo - hiệu chỉnh 279
- Phương pháp hai bước 277
- Phương pháp ma trận cosin chỉ hướng 118
- Phương pháp ma trận Denavit-Hartenberg 127
- Phương pháp ma trận Jacôbi 141
- Phương pháp mặt cắt 114
- Phương pháp Newmark 280
- Phương pháp Runge-Kutta 274
- Phương pháp Runge-Kutta-Nyström 276
- Phương pháp tách các nhân tử Lagrange 284
- Phương pháp tách khớp 115
- Phương pháp Wilson 281
- Phương trình Gibbs-Appel 253
- Phương trình Kane 227
- Phương trình Lagrange dạng nhân tử 245
- Phương trình Lagrange loại hai 202
- Phương trình liên kết 113
- Phương trình trạng thái 271
- Phương trình vi phân 272
- Phương trình vi phân tuyến tính 273, 280, 281, 306
- Phương trình vi phân - đại số 283, 290

R

- Rôbot 210, 216, 221
- Rôbot cục 125
- Rôbot dưới nước 174
- Robotdyn 217, 220
- Rôbot hai khâu 210
- Rôbot Puma 221
- Rôbot Scara 216

T

Tenxơ hạng hai 42
Tenxơ hạng hai đơn vị 45
Tenxơ quán tính khối của vật rắn 156
Tham số động học Denavit-Hartenberg 131
Tích vô hướng hai véctơ 25
Tích véctơ hai véctơ 26
Tích tenxơ hai véctơ 41
Tọa độ suy rộng 58, 107
Tọa độ suy rộng đủ 109
Tọa độ suy rộng dư 109, 245
Toán tử sóng 29, 30
Toán tử tuyến tính 33
Tuyến tính hóa 296

V

Vận tốc điểm 90
Vận tốc góc 57
Vận tốc góc riêng của vật rắn 227
Vận tốc riêng của điểm 227
Véctơ đại số 29
Véctơ hình học 24
Véctơ riêng 36
Vị trí của vật rắn 48

ĐỘNG LỰC HỌC HỆ NHIỀU VẬT

Tác giả: GS.TSKH Nguyễn Văn Khang

Chịu trách nhiệm xuất bản:

PGS. TS. Tô Đăng Hải

Biên tập:

Nguyễn Thị Ngọc Khuê

Trình bày và chế bản:

Nguyễn Minh Phương

Vẽ bìa:

Trịnh Tiến Hùng

In 500 cuốn, khổ 16 x 24cm tại Xưởng in NXB Văn hoá Dân tộc
Quyết định xuất bản số: 193-2007/CXB/50-06/KHKT ngày 23/4/2007
In xong và nộp lưu chiểu Quý II năm 2007.