

MỤC LỤC	
CHƯƠNG 1: CÁC KHÁI NIỆM CƠ BẢN	9
1.1 NHIỆM VỤ MÔN HỌC	9
1.2 CÁC KHÁI NIỆM	10
1.2.1 Tải trọng động	10
1.2.2 Phân loại tải trọng động	11
1.2.3 Bậc tự do của kết cấu (BTD)	12
1.2.4 Phân loại dao động	14
1.3 CÁC PHƯƠNG PHÁP RỜI RẠC HÓA	15
1.3.1 Phương pháp khối lượng thu gọn (<i>Lumped Mass</i>)	15
1.3.2 Phương pháp tọa độ suy rộng (<i>Generalised Coordinates</i>)	16
1.3.3 Phương pháp phần tử hữu hạn (<i>Finite Element Method - FEM</i>)	17
1.4 CÁC PHƯƠNG PHÁP THIẾT LẬP PHƯƠNG TRÌNH CHUYỂN ĐỘNG	18
1.4.1 Nguyên lý D'Alembert	18
1.4.2 Nguyên lý công khả dĩ	19
1.4.3 Nguyên lý Hamilton	20
CHƯƠNG 2: HỆ MỘT BẬC TỰ DO	25
2.1 THIẾT LẬP PHƯƠNG TRÌNH CHUYỂN ĐỘNG	25
2.1.1 Mô hình hệ một bậc tự do	25

MỤC LỤC

2.1.2	Thiết lập phương trình chuyển động	27
2.1.2.1	Nguyên lý D'Alembert	27
2.1.2.2	Nguyên lý công khả dĩ	28
2.1.2.3	Nguyên lý Hamilton	28
2.1.2.4	Ảnh hưởng của trọng lực	31
2.1.2.5	Ảnh hưởng của sự rung động gổĩ tựa	33
2.2	DAO ĐỘNG TỰ DO	34
2.2.1	Nghiệm của phương trình chuyển động	34
2.2.2	Dao động tự do không cản ($c = 0$)	35
2.2.3	Dao động tự do có cản ($c \neq 0$)	37
2.2.3.1	Trường hợp lực cản nhỏ (Underdamping) $\xi < 1$	38
2.2.3.2	Trường hợp lực cản tới hạn (Critical damping) $\xi = 1$	42
2.2.3.3	Trường hợp lực cản lớn (Overdamping) $\xi > 1$	42
2.3	DAO ĐỘNG CƯỜNG BỨC VỚI TẢI TRỌNG ĐIỀU HÒA	46
2.3.1	Dao động cưỡng bức không có lực cản	46
2.3.2	Dao động cưỡng bức có lực cản	49
2.4	PHẢN ỨNG VỚI TẢI TRỌNG XUNG	54
2.4.1	Khái niệm về tải trọng xung (Impulsive Loads)	54
2.4.2	Dao động với tải trọng xung hình sin	54
2.4.3	Dao động với tải trọng xung tam giác	56
2.4.4	Dao động với tải trọng xung chữ nhật	59

2.4.5	Tính toán gần đúng phản ứng do lực xung	61
2.5	PHẢN ỨNG VỚI TẢI TRỌNG BẤT KỲ	63
2.5.1	Tích phân Duhamel cho hệ không cản	63
2.5.2	Tích phân bằng phương pháp số cho <i>Duhamel Integral</i>	65
2.5.3	Phản ứng của hệ có cản	66
2.6	HỆ MỘT BẬC TỰ DO SUY RỘNG (GENERALISED SDOF SYSTEM)	68
2.6.1	Mô hình hệ một bậc tự do suy rộng	68
2.6.2	Thiết lập phương trình chuyển động	68
2.6.3	Ví dụ áp dụng	72
	BÀI TẬP CHƯƠNG 2	75
	CHƯƠNG 3: HỆ NHIỀU BẬC TỰ DO	78
3.1	THIẾT LẬP PHƯƠNG TRÌNH CHUYỂN ĐỘNG	78
3.1.1	Lựa chọn bậc tự do	78
3.1.2	Phương trình cân bằng động	78
3.1.3	Ảnh hưởng của lực dọc nén	81
3.2	XÁC ĐỊNH CÁC MA TRẬN TÍNH CHẤT CỦA HỆ KẾT CẤU	82
3.2.1	Tính chất đàn hồi	82
3.2.1.1	<i>Độ mềm của kết cấu</i>	82
3.2.1.2	<i>Độ cứng của kết cấu</i>	84
3.2.1.3	<i>Các khái niệm cơ sở</i>	84

MỤC LỤC

3.2.1.4	<i>Thiết lập ma trận độ cứng bằng phương pháp phân tử hữu hạn</i>	86
3.2.2	Tính chất khối lượng	91
3.2.2.1	<i>Ma trận khối lượng thu gọn</i>	91
3.2.2.2	<i>Ma trận khối lượng tương thích (Consistent mass matrix)</i>	92
3.2.3	Tính chất cản	95
3.2.4	Tải trọng	96
3.2.4.1	<i>Tải trọng nút tương đương tĩnh học</i>	96
3.2.4.2	<i>Tải trọng nút tương thích</i>	96
3.2.5	Độ cứng hình học	97
3.2.6	Lựa chọn cách thiết lập ma trận tính chất kết cấu	100
3.3	DAO ĐỘNG TỰ DO KHÔNG CẢN	103
3.3.1	Phân tích tần số dao động	103
3.3.2	Phân tích hình dạng mode của dao động	106
3.3.3	Phân tích tần số theo ma trận mềm	109
3.3.4	Ảnh hưởng của lực dọc	110
3.3.4.1	<i>Dao động tự do</i>	110
3.3.4.2	<i>Tải trọng tới hạn gây mất ổn định</i>	110
3.3.4.3	<i>Mất ổn định với tải trọng điều hòa</i>	111
3.3.5	Điều kiện trực giao (Orthogonality)	113
3.3.5.1	<i>Các điều kiện cơ bản</i>	113

3.3.5.2	<i>Chuẩn hóa theo ma trận khối lượng</i>	114
3.4	PHÂN TÍCH PHẢN ỨNG ĐỘNG	115
3.4.1	Tọa độ chuẩn (<i>Normal Coordinates</i>)	115
3.4.2	Phương trình chuyển động tách rời (<i>Uncoupled</i>) của hệ không cản	117
3.4.3	Phương trình chuyển động tách rời của hệ có cản	119
3.4.4	Tóm tắt phương pháp chồng chất dạng	120
	BÀI TẬP CHƯƠNG 3	127
	CHƯƠNG 4: PHÂN TÍCH KẾT CẤU CHỊU ĐỘNG ĐẤT	130
4.1	HIỆN TƯỢNG ĐỘNG ĐẤT	131
4.1.1	Hiện tượng động đất	131
4.1.2	Nguyên nhân động đất	131
4.1.3	Các đặc trưng cơ bản của động đất	134
4.1.3.1	<i>Chấn tiêu và chấn tâm động đất</i>	135
4.1.3.2	<i>Độ mạnh động đất</i>	135
4.1.3.3	<i>Cường độ động đất</i>	138
4.1.4	Hoạt động địa chấn trên lãnh thổ Việt Nam	140
4.2	PHÂN TÍCH KẾT CẤU ĐÀN HỒI CHỊU TÁC DỤNG CỦA DAO ĐỘNG NỀN	145
4.2.1	Phản ứng của hệ đàn hồi một bậc tự do chịu dao động nền	145
4.2.2	Phổ phản ứng đàn hồi ứng với một dao động nền cụ thể	148
4.2.3	Phổ phản ứng đàn hồi theo TCXDVN 9386 – 2012	155

MỤC LỤC

4.2.3.1	Tung độ phổ phản ứng đàn hồi S_e	157
4.2.3.2	Hoành độ phổ phản ứng đàn hồi T	157
4.2.3.3	Gia tốc nền thiết kế trên nền loại A, a_g	158
4.2.3.4	Hệ số nền S	158
4.2.3.5	Các giá trị chu kỳ phân vùng phổ T_B , T_C và T_D	160
4.2.3.6	Hệ số điều chỉnh độ cản η	161
4.2.4	Phân tích hệ đàn hồi nhiều bậc tự do chịu dao động nền	164
4.3	PHÂN TÍCH KẾT CẤU KHÔNG ĐÀN HỒI CHỊU DAO ĐỘNG NỀN	171
4.3.1	Phân tích phản ứng không đàn hồi của hệ nhiều bậc tự do chịu dao động nền	177
4.4	QUY TRÌNH TÍNH TOÁN TÁC ĐỘNG ĐỘNG ĐẤT LÊN CÔNG TRÌNH	177
4.4.1	Xác định gia tốc nền tham chiếu a_{gR}	177
4.4.2	Nhận dạng điều kiện đất nền	177
4.4.3	Xác định gia tốc đỉnh nền đất thiết kế với giả thiết nền loại A, a_g	178
4.4.4	Xác định hệ số ứng xử q của kết cấu bê tông cốt thép	178
4.4.5	Xác định đặc trưng động học công trình	179
4.4.6	Phổ thiết kế dùng cho phân tích đàn hồi	180
4.4.7	Phương pháp phân tích tĩnh lực ngang tương đương	180
4.4.7.1	Xác định lực cắt đáy	181
4.4.7.2	Phân bố lực động đất theo phương ngang	181

4.4.8	Phương pháp phân tích phổ phản ứng dạng dao động	182
4.4.8.1	Xác định số dạng dao động cần xét	182
4.4.8.2	Lực ngang tương đương ứng với từng dạng dao động theo phương X	183
4.4.8.3	Xác định nội lực (yêu cầu về cường độ) và tổ hợp nội lực	184
4.4.8.4	Lực ngang theo phương Y	185
	BÀI TẬP CHƯƠNG 4	194
	PHỤ LỤC: CHƯƠNG TRÌNH TÍNH BẰNG MATLAB	198
	Bài thực hành 1: Xác định chuyển vị hệ một bậc tự do dao động tự do không cản.	198
	Bài thực hành 2: Xác định chuyển vị hệ một bậc tự do dao động tự do có cản (trường hợp lực cản nhỏ).	199
	Bài thực hành 3: Xác định chuyển vị hệ một bậc tự do chịu tải trọng xung.	201
	Bài thực hành 4: Xác định chuyển vị hệ một bậc tự do chịu tải trọng điều hòa không cản.	203
	Bài thực hành 5: Xác định chuyển vị hệ một bậc tự do chịu tải trọng điều hòa có cản.	205
	Bài thực hành 6: Sử dụng phương pháp tích phân Duhamel xác định phản ứng của hệ một bậc tự do chịu tải trọng bất kỳ.	207

MỤC LỤC

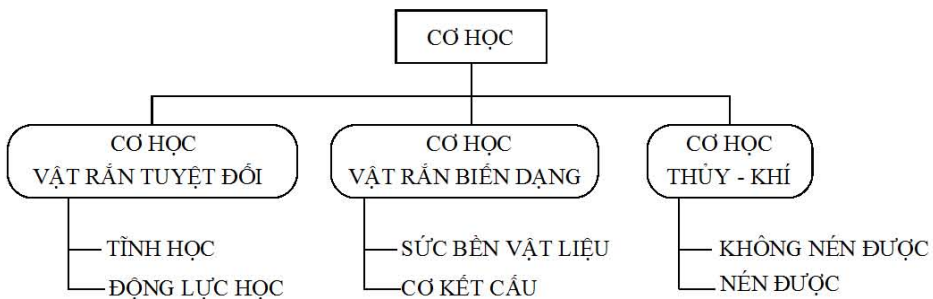
Bài thực hành 7: Lặp lại bài thí dụ 6 sử dụng phương pháp sai phân trung tâm.	209
Bài thực hành 8: Sử dụng kết quả chuyển vị lớn nhất tìm được từ bài thực hành 6 để xây dựng phổ phản ứng đàn hồi chuyển vị, vận tốc và gia tốc ứng với băng ghi động đất El Centro.	210

Chương 1

CÁC KHÁI NIỆM CƠ BẢN

1.1 NHIỆM VỤ MÔN HỌC

Trong thực tế các công trình xây dựng đều chịu tác dụng của tải trọng động như gió, động đất...tuy nhiên các phương pháp tính toán đã được giới thiệu ở giáo trình Sức bền vật liệu và Cơ học kết cấu chỉ giải quyết cho các tải trọng tĩnh. Việc tính toán kết cấu dưới tác dụng của các nguyên nhân động là một vấn đề rất phức tạp, tuy nhiên trên cơ sở các giả thiết và mô hình toán học hợp lý, một phương pháp phân tích phản ứng (nội lực, ứng suất hoặc chuyển vị, vận tốc, gia tốc...) trong kết cấu khi chịu tác dụng của các nguyên nhân động đã được đưa vào nghiên cứu, đó chính là *Động lực học*.



Hình 1.1 Lĩnh vực cơ học

Động lực học kết cấu là một lĩnh vực của cơ học, nhiệm vụ cơ bản của bài toán động lực học là xác định nội lực và chuyển vị kết cấu dưới tác dụng động của tải trọng thay đổi theo thời gian. Trên

cơ sở đó sẽ lựa chọn các kích thước kết cấu hợp lý, đảm bảo an toàn và tính thực tế.

1.2 CÁC KHÁI NIỆM

1.2.1 Tải trọng động

Tải trọng động là tải trọng thay đổi theo thời gian về trị số, phương, vị trí và gây ra ứng suất, chuyển vị... cũng thay đổi theo thời gian.

Đặc điểm cơ bản của bài toán tĩnh là nội lực được xác định từ sự cân bằng với ngoại lực, không cần dùng đường đàn hồi nên mang tính chất đơn giản. Ứng suất và chuyển vị không phụ thuộc thời gian do sự chuyển động của hệ chậm và lực quán tính được bỏ qua.

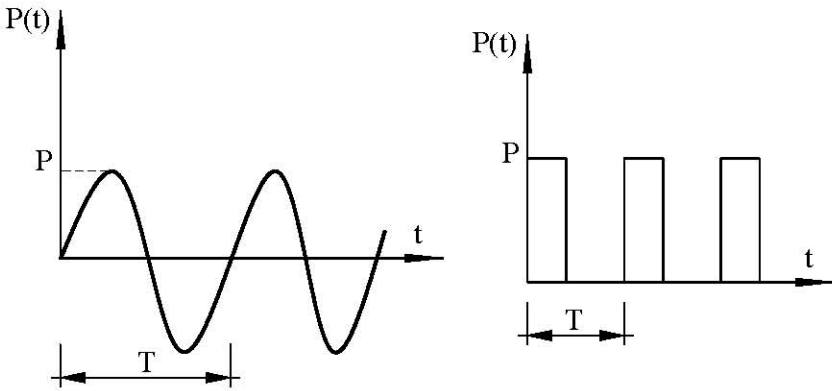
Đặc điểm cơ bản của bài toán động là ngoại lực bao gồm *lực quán tính* phụ thuộc vào đường đàn hồi. Vì vậy, dẫn tới phương trình vi phân phức tạp về toán học, khối lượng tính toán lớn, phải bắt đầu từ việc xác định phương trình đường đàn hồi. Mặt khác, ứng suất và chuyển vị phụ thuộc vào thời gian do hệ chuyển động với gia tốc lớn và lực quán tính lại phụ thuộc vào gia tốc chuyển động nên không thể bỏ qua.

Nói chung bài toán tĩnh (bao gồm cả bài toán ổn định) là trường hợp đặc biệt của bài toán động khi lực quán tính được bỏ qua. Ngoài ra yếu tố lực cản đôi khi được đưa vào xem xét trong bài toán động với những giả thiết phù hợp, làm cho bài toán càng gần với thực tế.

1.2.2 Phân loại tải trọng động

Tải trọng động tác dụng lên công trình rất đa dạng và phức tạp. Theo các đặc trưng tính chất của nó, tải trọng động cơ bản được phân thành tải trọng tiền định và tải trọng ngẫu nhiên

a) Tải trọng tiền định: (*Deterministic Loads*): là tải trọng biết trước qui luật biến đổi theo thời gian $P = P(t)$. Qui luật biến đổi này có thể dạng điều hòa như hình sin, hình cos (hình 1.2a) hoặc có chu kỳ, cứ sau một chu kỳ lặp lại hình dạng ban đầu (hình 1.2b) hoặc tải trọng xung kích tác dụng trong khoảng thời gian rất ngắn, tải trọng tăng lên và giảm xuống cực nhanh theo qui luật tuyến tính như trong trường hợp một vụ nổ.

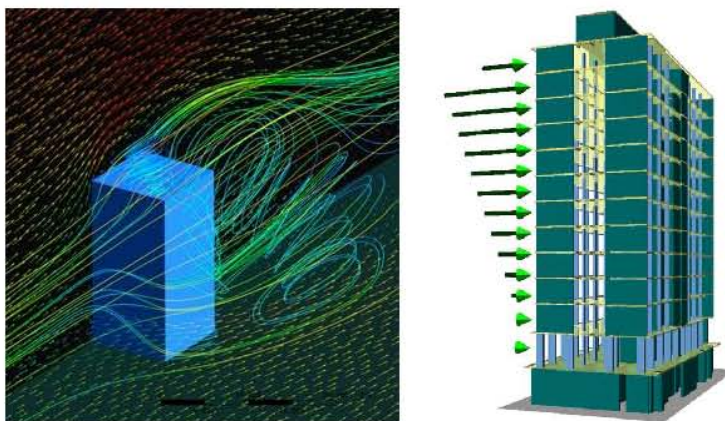


a) Tải trọng máy đang hoạt động b) Tải trọng búa đập lên cọc

Hình 1.2. Tải trọng tiền định

b) Tải trọng ngẫu nhiên: (*Random, Stochastic Loads*): là tải trọng biết trước qui luật xác suất và các đặc trưng xác suất như giá trị trung bình, độ lệch chuẩn...

Ví dụ: tải trọng gió, sóng biển, lực động đất....



Hình 1.3. Tác động tải trọng gió đến công trình

Bài toán động lực học kết cấu chịu tải trọng ngẫu nhiên được giải quyết bằng lý thuyết dao động ngẫu nhiên (*Random Vibration Theory*). Các thông tin cần tìm bao gồm ứng suất, chuyển vị, cũng mang tính ngẫu nhiên với các đặc trưng xác suất giá trị trung bình, độ lệch chuẩn...

Nói chung, các tải trọng trong thực tế đều mang tính chất ngẫu nhiên ở mức độ khác nhau, và được xác định bằng phương pháp thống kê toán học.

1.2.3 Bậc tự do của kết cấu (BTD)

Bậc tự do động lực học (*Number of dynamics degrees of freedom*) của kết cấu là số thành phần chuyển vị phải xét để thể hiện được ảnh hưởng của tất cả các lực quán tính.

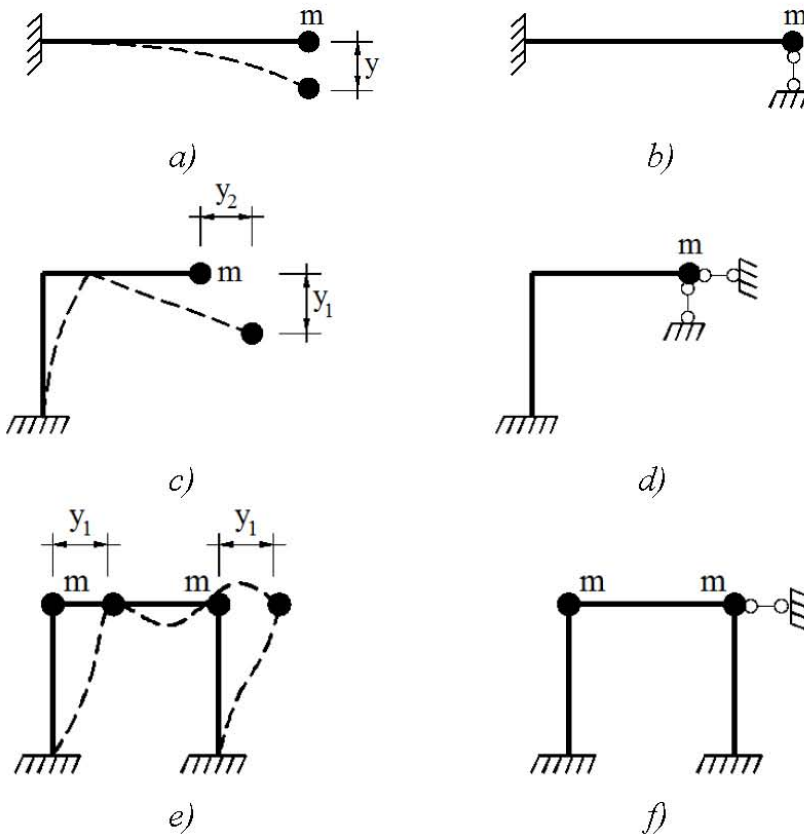
Bậc tự do được định nghĩa trong sự liên quan đến lực quán tính và do đó liên quan đến khối lượng. Số khối lượng càng nhiều thì càng chính xác nhưng cũng càng phức tạp.

Nói chung, một kết cấu liên tục có vô số bậc tự do. Tuy nhiên, ta có thể đưa nó về hệ có ít bậc tự do hoặc thậm chí là hệ một bậc tự do dựa vào các giả thiết:

- Xem các khối lượng tập trung của hệ là các chất điểm (bỏ qua chuyển vị xoay)
- Bỏ qua chiều dài co giãn do các biến dạng uốn.

Hay nói cách khác bậc tự do động lực học là số liên kết tựa ta đặt vào các khối lượng của hệ sao cho tất cả các khối lượng này đều bất động.

Ví dụ:



Hình 1.4 Bậc tự do động lực học

Chú ý: Bậc tự do động lực học khác với bậc tự do trong bài toán tĩnh (số chuyển vị nút của kết cấu) và số bậc tự do có thể lớn hơn, nhỏ hơn hoặc bằng số khối lượng của hệ.

Trong thực tế, các kết cấu có khối lượng phân bố nên có vô hạn bậc tự do, việc giải bài toán rất phức tạp nên phải tìm cách rời rạc hóa hệ.

1.2.4 Phân loại dao động

Dao động được phân loại theo nhiều cách khác nhau, tùy theo sự làm việc, kích thước, cấu tạo... của hệ hoặc tùy theo tính chất và nguyên nhân gây ra dao động.

a) Phân theo bậc tự do: cách phân theo bậc tự do đưa dao động của hệ về 3 loại sau:

- Dao động của hệ một bậc tự do
- Dao động của hệ hữu hạn bậc tự do (số bậc tự do lớn hơn hoặc bằng 2)
- Dao động của hệ vô hạn bậc tự do

b) Phân theo tính chất và nguyên nhân gây ra dao động:

- Dao động sinh ra do tự bản thân của hệ khi chịu tác động từ một lực kích thích ban đầu và hệ vẫn dao động khi ngừng lực kích thích gọi là *dao động tự do*.

Ví dụ: dao động dây đàn...

- Dao động sinh ra do hệ chịu tác động từ một lực kích thích ban đầu và hệ ngừng dao động khi lực kích thích không còn nữa gọi là *dao động cưỡng bức*.

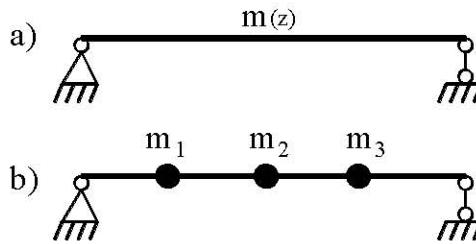
Ví dụ: dao động do tải trọng điều hòa từ mô tơ máy đặt trên hệ...

c) Phân theo dạng phương trình vi phân dao động:

- Dao động tuyến tính: phương trình vi phân dao động dạng tuyến tính.
- Dao động phi tuyến: phương trình vi phân dao động dạng phi tuyến.

1.3 CÁC PHƯƠNG PHÁP RỜI RẠC HÓA

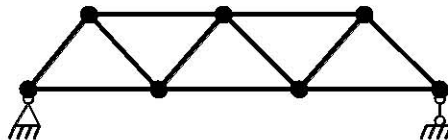
1.3.1 Phương pháp khối lượng thu gọn (*Lumped Mass*)



Hình 1.5 Phương pháp thu gọn khối lượng

Thay thế hệ có khối lượng phân bố (Hình 1.5a) thành các khối lượng tập trung (Hình 1.5b) theo nguyên tắc tương đương tĩnh học. Đây là phương pháp thường được dùng trong hệ kết cấu phức tạp. Khối lượng thường được thu gọn về điểm nút

Ví dụ: hệ dàn lý tưởng có khối lượng và tải trọng tập trung tại các nút dàn



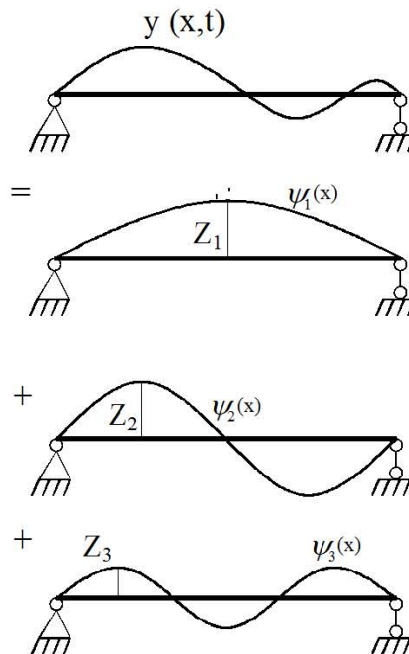
Hình 1.6 Hệ dàn lý tưởng

Số bậc tự do của hệ tùy thuộc vào giả thiết về tính chất chuyển vị của hệ và tính chất quán tính của các khối lượng m_i . Chẳng hạn, xét hệ (Hình 1.5b) là hệ phẳng:

- Nếu có biến dạng dọc trục và khối lượng m_i có quán tính xoay: hệ có 9 BTĐ (3BTĐ/khối lượng m_i).
- Nếu coi m_i là một chất điểm (không có quán tính xoay): hệ có 6 BTĐ (2 chuyển vị thẳng/ khối lượng m_i).
- Nếu bỏ qua biến dạng dọc trục thì hệ chỉ có chuyển vị đứng: hệ có 3 BTĐ (1 chuyển vị đứng/ khối lượng m_i).

Chú ý: Độ phức tạp của bài toán động lực học phụ thuộc vào số bậc tự do.

1.3.2 Phương pháp tọa độ suy rộng (*Generalised Coordinates*)



Hình 1.7 Phương pháp tọa độ suy rộng

Giả sử đường đàn hồi $y(x, t)$ là tổ hợp tuyến tính của các hàm xác định $\psi_i(x)$ có biên độ Z_i như sau:

$$y(x, t) = \sum_{i=1}^{\infty} Z_i(t) \psi_i(x) \quad (1.1)$$

trong đó: $\psi_i(x)$: Hàm dạng

$Z_i(t)$: Tọa độ suy rộng

Hàm dạng $\psi_i(x)$ được tìm từ việc giải phương trình vi phân đạo hàm riêng, hoặc do giả thiết phù hợp với điều kiện biên. Khi tính toán thường giữ lại một số số hạng đầu tiên của chuỗi (1.1) và hệ trở thành hữu hạn bậc tự do (Z_i đóng vai trò bậc tự do).

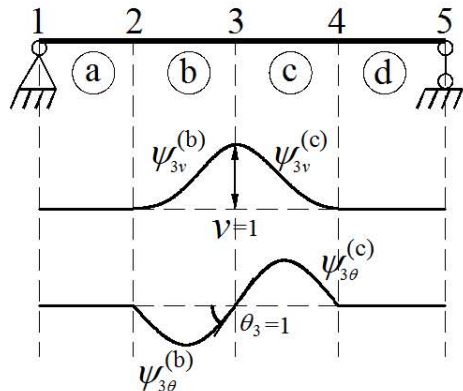
Ví dụ: đường đàn hồi $y(x, t)$ trên hình 1.7 được biểu diễn với hàm

$$\psi_i(x) = \sin \frac{i\pi x}{L} \quad (i=1, 2, 3, \dots, n) \text{ như sau :}$$

$$y(x, t) = Z_1 \sin \frac{\pi x}{L} + Z_2 \sin \frac{2\pi x}{L} + Z_3 \sin \frac{3\pi x}{L} + \dots + Z_n \sin \frac{n\pi x}{L}$$

1.3.3 Phương pháp phần tử hữu hạn (Finite Element Method - FEM)

Đây là trường hợp đặc biệt của phương pháp tọa độ suy rộng, trong đó: Z_i là các chuyển vị nút (tọa độ suy rộng) và $\psi_i(x)$ là các hàm nội suy các phần tử (hàm dạng)



Hình 1.8 Phương pháp phần tử hữu hạn FEM

Thường các hàm nội suy $\psi_i(x)$ được chọn giống nhau cho các phần tử (ứng với cùng một bậc tự do) và là hàm đa thức nên việc tính toán được đơn giản. Đặc biệt, do tính chất cục bộ của các hàm nội suy nên các phương trình ít liên kết với nhau làm giảm nhiều khối lượng tính toán.

1.4 CÁC PHƯƠNG PHÁP THIẾT LẬP PHƯƠNG TRÌNH CHUYỂN ĐỘNG

Sự thay đổi chuyển vị theo thời gian của một hệ được thể hiện bằng các biểu thức toán học dạng phương trình vi phân. Các phương trình vi phân chuyển động này phản ánh đặc trưng dao động của hệ. Vì vậy, bài toán động lực học được giải quyết khi các phương trình vi phân được giải. Việc thiết lập các phương trình vi phân chuyển động hiện nay dựa trên cơ sở nguyên lý D'Alembert và nguyên lý biến phân năng lượng.

1.4.1 Nguyên lý D'Alembert

Nguyên lý D'Alembert được phát biểu như sau: Đối với một hệ bao gồm nhiều chất điểm mang khối lượng, phương trình chuyển động được thiết lập bằng cách viết phương trình cân bằng tĩnh học các khối lượng và kể cả các lực quán tính đặt lên chúng.

Cụ thể, ta xét khối lượng m_i ($i=1, n$) chịu tác động của lực $P_i(t)$ có chuyển vị $v_i(t)$ và gia tốc $\ddot{v}_i(t)$. Nếu đặt thêm lực quán tính thì khối lượng m_i sẽ cân bằng:

$$P_i(t) - m_i \ddot{v}_i(t) = 0 \quad (1.2)$$

Nếu hệ có n bậc tự do thì sẽ có n phương trình vi phân chuyển động.

trong đó :

- $P_i(t)$ – bao gồm tải trọng động, lực đàn hồi và lực tắt dần tác dụng vào khối lượng m_i
- $m_i \ddot{v}_i(t)$ - dạng tổng quát các lực quán tính của các khối lượng m_i theo định luật II Newton.

Tuy nhiên nguyên lý D'Alembert chỉ áp dụng cho các trường hợp đơn giản. Các bài toán phức tạp hơn như vật thể chuyển động với gia tốc thay đổi đột ngột... thì việc áp dụng các nguyên lý biến phân năng lượng tỏ ra hiệu quả hơn.

1.4.2 Nguyên lý công khả dĩ

Đối với các sơ đồ kết cấu với lực tác dụng lên hệ dạng phức tạp thì việc thực hiện phép cân bằng các lực theo đại lượng vector là vô cùng khó khăn. Do đó, một phương pháp thiết lập phương trình vi phân chuyển động hợp lý trong trường hợp này đã được áp dụng, đó chính là đưa các đại lượng vector về đại lượng vô hướng dưới dạng công của lực. Phương pháp này dựa trên nguyên lý công khả dĩ.

Cho khối lượng m_i ($i=1, n$) một chuyển vị khả dĩ δv_i , công khả dĩ δW của các lực tác dụng lên m_i (cân bằng) trên chuyển vị δv_i phải triệt tiêu:

$$\sum [P_i(t) - m_i \ddot{v}_i(t)] \delta v_i = 0 \quad (1.3)$$

Nguyên lý công khả dĩ thích hợp cho hệ phức tạp gồm các khối lượng điểm và khối lượng có quán tính xoay. Nếu cho hệ các chuyển vị khả dĩ δv_i lần lượt theo các bậc tự do sẽ thu được n phương trình vi phân của chuyển động.

Ký hiệu công khả dĩ của ngoại lực $P_i(t)$ là δW , từ (1.3) ta có biến phân công khả dĩ:

$$\delta W = \sum P_i(t) \delta v_i = \sum m_i \ddot{v}_i(t) \delta v_i \quad (1.4)$$

1.4.3 Nguyên lý Hamilton

Đối với hệ phức tạp hơn, cũng với mục đích đưa các đại lượng vector về thành đại lượng vô hướng, người ta còn dùng một phương pháp áp dụng nguyên lý biến phân động học Hamilton. Phương trình vi phân chuyển động được thiết lập từ các biểu thức biến phân các hàm năng lượng của hệ.

Xét hệ gồm các khối lượng m_i ($i=1, n$) có các chuyển vị $v_i(t)$ ở hai thời điểm t_1 và t_2 (hình 1.9), chuyển vị có các trị số $v_i(t_1)$ và $v_i(t_2)$ tương ứng với hai đường biên dạng (b) và (c). Đường biên dạng (d) ứng với $t = t_1 + \Delta t < t_2$. Đường biên dạng thật tuân theo định luật II Newton. Đường lệch trùng với đường thật tại hai thời điểm t_1 và t_2 :

$$\delta v_1(t_1) = \delta v_1(t_2) = 0 \quad (1.5)$$

Động năng của hệ tại thời điểm t :

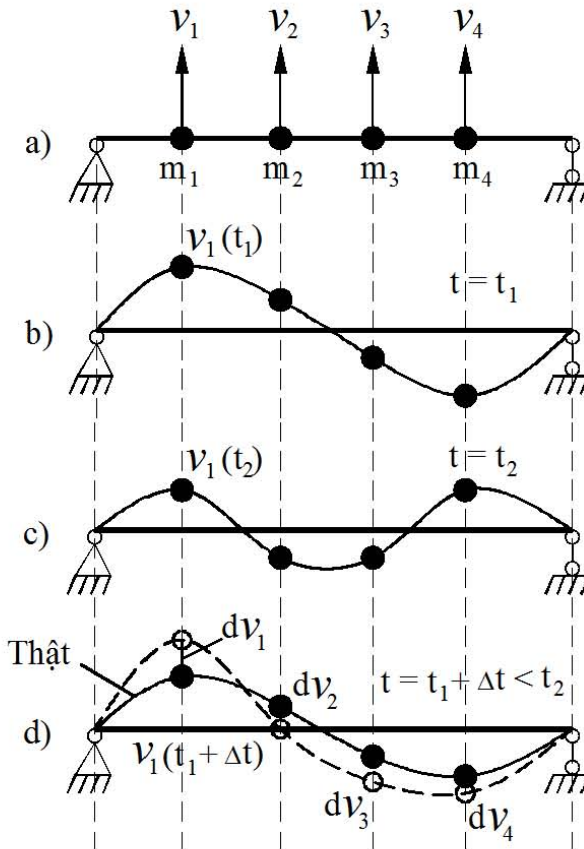
$$T = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n m_i \dot{v}_i^2 = T(\dot{v}_i) \quad (1.6)$$

Biến phân của động năng δT tương ứng với biến phân của chuyển vị δv_i

$$\delta T = \sum_{i=1}^n \frac{\partial T}{\partial \dot{V}_i} \delta \dot{v}_i = \sum_{i=1}^n m_i \dot{v}_i \delta \dot{v}_i = \sum_i m_i \dot{v}_i \delta \frac{dv_i}{dt} = \sum_i m_i \dot{v}_i \frac{d}{dt} \delta v_i \quad (1.7)$$

Mặt khác, ta có đồng nhất thức:

$$\frac{d}{dt}(\dot{v}_i \delta v_i) = \ddot{v}_i \delta v_i + \dot{v}_i \frac{d}{dt} \delta v_i \quad (1.8)$$



Hình 1.9 Nguyên lý Hamilton

Nhân cả hai vế (1.8) với m_i và lấy tổng cho toàn hệ:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt} \sum_i (m_i \dot{v}_i \delta v_i) &= \sum_i m_i \ddot{v}_i \delta v_i + \sum_i m_i \dot{v}_i \frac{d}{dt} \delta v_i \\ \frac{d}{dt} \sum_i (m_i \dot{v}_i \delta v_i) &= \delta T + \delta W\end{aligned}\quad (1.9)$$

Nhân hai vế (1.9) với dt và lấy tích phân từ t_1 đến t_2 :

$$\sum_i m_i v_i \delta v_i \Big|_{t_1}^{t_2} = \int_{t_1}^{t_2} (\delta T + \delta W) dt$$

Theo trên vì $\delta v_i(t_1) = \delta v_i(t_2) = 0$ với mọi i nên vế trái triệt tiêu:

$$\int_{t_1}^{t_2} (\delta T + \delta W) dt = 0 \quad (1.10)$$

Nếu ngoại lực tác dụng trên hệ gồm lực bảo toàn (lực thế) và lực không bảo toàn (thí dụ lực ma sát) thì biến phân của công ngoại lực δW được tách ra hai thành phần:

$$\delta W = \delta W_c + \delta W_{nc} \quad (1.11)$$

Đối với lực bảo toàn thì công của lực bằng độ giảm thế năng của hệ nên:

$$\delta W_c = -\delta V \quad (1.12)$$

với δV là biến phân của thế năng

Thế (1.12) vào (1.11):

$$\delta W = -\delta V + \delta W_{nc} \quad (1.13)$$

Thế (1.13) vào (1.10):

$$\int_{t_1}^{t_2} \delta(T - V) dt + \int_{t_1}^{t_2} \delta W_{nc} dt = 0 \quad (1.14)$$

Đây là nguyên lý biến phân của Hamilton, trong đó:

- T : Động năng của hệ.
- V : Thế năng của hệ, gồm thế năng biến dạng đàn hồi và thế năng của lực bảo toàn.
- W_{nc} : Công của lực không bảo toàn (lực cản, ma sát, ngoại lực...)

Nhận xét:

- Công thức (1.10) được viết lại:

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} (T + W) dt = 0 \quad (1.15)$$

Như vậy, trong tất cả các đường chuyển động trong khoảng thời gian từ t_1 đến t_2 thì đường làm cho tích phân $\int_{t_1}^{t_2} (T + W) dt = 0$ có giá trị dừng (cực tiểu) là đường chuyển động tuân theo định luật Newton

- Đối với bài toán tĩnh, không có động năng ($T=0$) thì biểu thức (1.10) trở thành:

$$\int_{t_1}^{t_2} \delta W dt = 0 \Rightarrow \delta W = 0 \Rightarrow \delta(V - W_{nc}) = 0 \quad (1.10)$$

Đây là nguyên lý thế năng cực tiểu trong bài toán tĩnh (Nếu một hệ cân bằng ổn định thì thế năng của hệ cực tiểu).

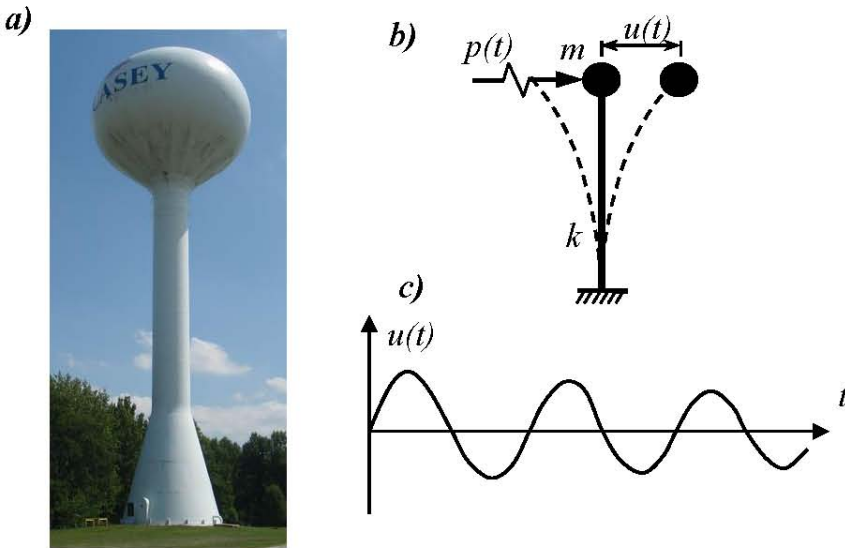
Chú ý: Nguyên lý Hamilton cũng là một phương pháp năng lượng, trong đó không dùng trực tiếp đến lực quán tính và lực bảo toàn, dùng thích hợp cho hệ phức tạp, khối lượng phân bố.

Chương 2

HỆ MỘT BẬC TỰ DO

2.1 THIẾT LẬP PHƯƠNG TRÌNH CHUYỂN ĐỘNG

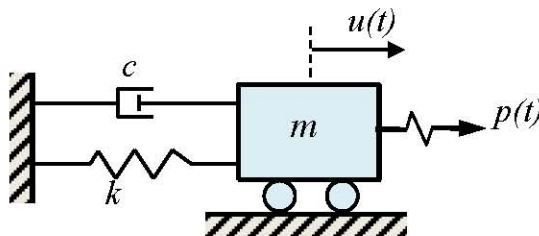
2.1.1 Mô hình hệ một bậc tự do



Hình 2.1 Hệ một bậc tự do

Xét một tháp nước như *Hình 2.1a*, nếu bỏ qua ảnh hưởng lực phân bố dọc trục do trọng lượng bản thân của trụ đứng thì đây là hệ một bậc tự do. Khi đó, ta có thể xem hệ như một thanh công xôn có độ cứng tương đương k , khối lượng tập trung m tại trọng tâm khối cầu nước dưới tác dụng lực ngang (gió) thay đổi theo thời gian $p(t)$ (*Hình 2.1b*). Hệ trên được đơn giản thành một mô hình của *hệ một bậc tự do* (Single Degree of Freedom system - SDOFs) được biểu diễn như *Hình 2.2*. Hệ có các đặc trưng vật lý (Concentrated

Properties) sau: khối lượng m , độ cứng k , hệ số cản c và lực kích động $p(t)$.



Hình 2.2 Mô hình hệ một bậc tự do

Trong quá trình dao động, hệ chịu tác động của các lực rất đa dạng. Các lực tác động chủ yếu là:

- Lực kích động $p(t)$: là lực thay đổi theo thời gian tác dụng từ bên ngoài lên hệ như *mục 1.1.3*
- Lực đàn hồi f_s (*Elastic force*): là lực xuất hiện khi tách hệ khỏi vị trí cân bằng và có xu hướng đưa hệ về lại trạng thái cân bằng. Lực này phụ thuộc vào độ cứng k và chuyển vị động u của hệ là tuyến tính hay phi tuyến. Với hệ đàn hồi tuyến tính thì:

$$f_s = k * u \quad (2.1)$$

Hay nói cách khác, lực đàn hồi chính là lực tương ứng chuyển vị bằng đơn vị gây ra tương ứng với phương của bậc tự do.

- Lực cản nhớt f_D (*Viscous damping*): là lực thường ngược chiều với chuyển động và có khả năng khử dao động của hệ do bộ giảm chấn c làm tiêu hao năng lượng trong quá trình dao động. Với mô hình cản nhớt tuyến tính thì lực này phụ thuộc vào vận tốc dao động $\dot{u}$ của hệ

$$f_D = c * \dot{u} \quad (2.2)$$

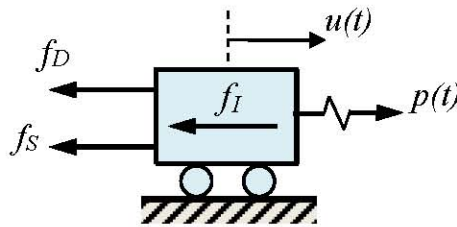
- Lực quán tính f_I (*Inertia force*): là lực ngược chiều với chuyển động của hệ, phụ thuộc vào khối lượng m của hệ và gia tốc chuyển động $\ddot{u}$ của hệ

$$f_I = m * \ddot{u} \quad (2.3)$$

Chú ý: Hệ một bậc tự do có các đặc trưng phân bố về m , k , c , $p(t)$ đều có thể đưa về mô hình có các đặc trưng vật lý tập trung (hệ một bậc tự do suy rộng).

2.1.2 Thiết lập phương trình chuyển động

2.1.2.1 Nguyên lý D'Alembert



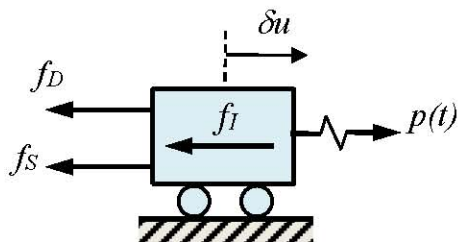
Hình 2.3 Các lực tác dụng lên hệ một bậc tự do

Cách thiết lập phương trình chuyển động cho hệ Hình 2.2 theo phương pháp áp dụng *nguyên lý D'Alembert* hay *phương pháp tĩnh động* cần phải bổ sung vào hệ lực quán tính f_D . Như vậy, các lực tác dụng lên một bậc tự do được biểu diễn như Hình 2.3, trong đó f_s , f_D , f_I , $p(t)$ lần lượt là lực đàn hồi, lực cản nhớt, lực quán tính và lực kích thích lên hệ. Phương trình cân bằng lực tĩnh học:

$$p(t) - f_s - f_I - f_D = 0 \quad (2.4)$$

$$\text{hay} \quad m\ddot{u} + c\dot{u} + ku = p(t) \quad (2.5)$$

2.1.2.2 Nguyên lý công khả dĩ



Hình 2.4 Các lực tác dụng lên hệ một bậc tự do

Khi xây dựng phương trình vi phân chuyển động theo nguyên lý công khả dĩ ta cho khối lượng m chuyển vị khả dĩ một lượng δu . Khi đó, các lực tác dụng lên khối lượng đều thực hiện một công tương ứng với chuyển vị khả dĩ δu (Hình 2.4). Do đó, tổng công khả dĩ các lực lên hệ phải bằng 0

$$\delta W = p(t)\delta u - f_S \delta u - f_I \delta u - f_D \delta u = 0 \quad (2.6)$$

$$\text{hay} \quad [-m\ddot{v} - c\dot{v} - kv + p(t)]\delta u = 0 \quad (2.7)$$

Vì δu tùy ý nên thu được phương trình chuyển động giống (2.5)

2.1.2.3 Nguyên lý Hamilton

Để thiết lập phương trình vi phân chuyển động theo nguyên lý Hamilton, ta cần xác định các biểu thức biến phân động năng, thế năng, công do lực cản và tải trọng bên ngoài. Do đó, động năng của hệ được xác định như sau:

$$T = \frac{1}{2} m \dot{u}^2 \quad (2.8)$$

Suy ra biến phân động năng:

$$\delta T = m \dot{u} \delta \dot{u} \quad (2.9)$$

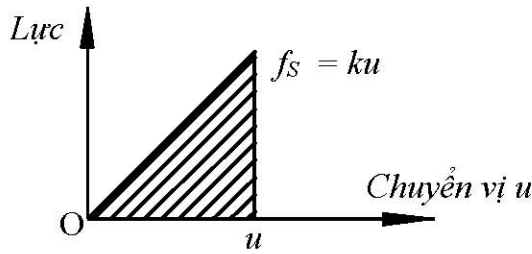
Thế năng của hệ được biểu thị bằng năng lượng biến dạng đàn hồi của lò xo:

$$V = \frac{1}{2}ku^2 \quad (2.10)$$

Ta cũng thu được biến phân của thế năng biến dạng đàn hồi:

$$\delta V = ku \delta u \quad (2.11)$$

Hình 2.5 mô tả quan hệ giữa chuyển vị và lực đàn hồi $f_s = ku$, dựa vào đồ thị ta thấy sự tương quan giữa lực và chuyển vị là tuyến tính.



Hình 2.5 Quan hệ giữa lực và chuyển vị

Ngoại lực $p(t)$ và lực cản f_D là các lực không bảo toàn của hệ, biểu thức công của các lực này là :

$$W_{nc} = p(t)u - f_D u = p(t)u - c\dot{u} u \quad (2.12)$$

Biến phân công khả dĩ của hai lực này trên chuyển vị khả dĩ δu :

$$\delta W_{nc} = p(t)\delta u - c\dot{u} \delta u \quad (2.13)$$

Theo nguyên lý Hamilton:

$$\int_{t_1}^{t_2} [\delta(T - V) + \delta W_{nc}] dt = 0 \quad (2.14)$$

$$\text{Thay vào : } \int_{t_1}^{t_2} \left[\delta \left(\frac{1}{2} m \dot{u}^2 - \frac{1}{2} k u^2 \right) + p(t) \delta u - c \dot{u} \delta u \right] dt = 0$$

$$\text{Hay } \int_{t_1}^{t_2} [m \ddot{u} \delta u - k u \delta u - c \dot{u} \delta u + p(t) \delta u] dt = 0 \quad (2.15)$$

Tích phân từng phần số hạng thứ nhất phương trình (2.15), ta được:

$$\int_{t_1}^{t_2} m \ddot{u} \delta u dt = \underbrace{m \dot{u} \delta u}_{0} \Big|_{t_1}^{t_2} - \int_{t_1}^{t_2} m \dot{u} \delta u dt = - \int_{t_1}^{t_2} m \dot{u} \delta u dt \quad (2.16)$$

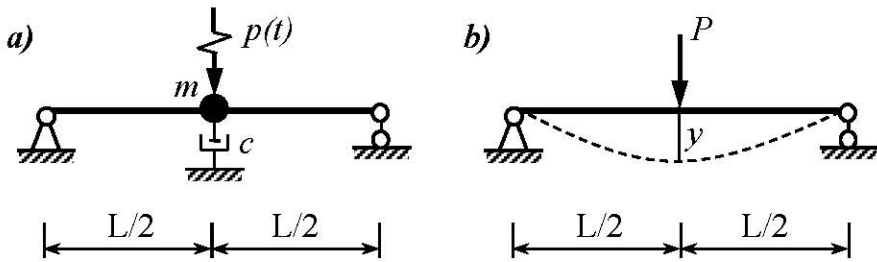
Thế phương trình (2.16) vào (2.15) ta thu được:

$$\int_{t_1}^{t_2} [-m \ddot{u} - c \dot{u} - k u + p(t)] \delta u dt = 0 \quad (2.17)$$

Vì δu tùy ý nên biểu thức: $-m \ddot{u} - c \dot{u} - k u + p(t) = 0$ có dạng giống với (2.5)

Nhận xét: Cả 3 phương pháp cho cùng kết quả vì cùng dựa trên định luật quán tính của Newton. Trong trường hợp cụ thể này nguyên lý *D'Alembert* là đơn giản nhất.

Ví dụ 2.1: Thiết lập phương trình chuyển động cho dầm đơn giản với khối lượng tập trung $m = 100$ kg đặt ở giữa dầm, hệ số cản $c = 50$ kN.s/m, chịu lực tác dụng $p(t) = 20 \sin 10t$ (kN) như Hình 2.6. Bỏ qua trọng lượng bản thân dầm, biết $L = 4$ m; $E = 2 \times 10^4$ kN/cm²; $I = 2500$ cm⁴.



Hình 2.6 Hệ một bậc tự do

- Độ cứng k của dầm:

Để tính độ cứng dầm ta cần tạo một trạng thái phụ bằng cách tại vị trí đặt vật thì đặt một lực P (Hình 2.6b) và tính chuyển vị tĩnh do lực này gây ra cho hệ. Sau đó, dựa vào ý nghĩa vật lý của độ cứng chính là lực làm cho hệ chuyển vị bằng 1 đơn vị theo phương chuyển động của bậc tự do cần xét.

Chuyển vị tại vị trí đặt lực P theo phương pháp lực ta tính được:

$$y = \frac{PL^3}{48EI}$$

Do đó, độ cứng dầm :

$$k = P = \frac{48EI \times y}{L^3} = \frac{48EI \times 1}{L^3} = \frac{48 \times 2 \times 10^4 \times 2500}{400^3} = 3750 \text{ kN / m}$$

Phương trình chuyển động của hệ theo (2.5):

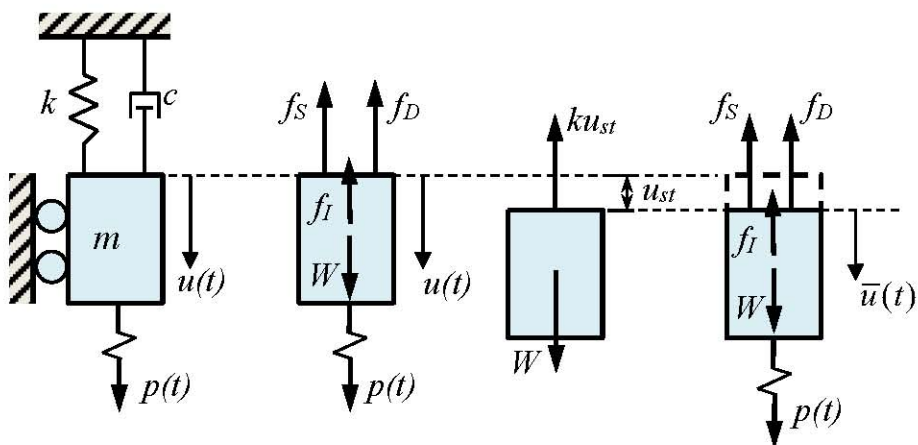
$$100\ddot{u} + 50\dot{u} + 3750u = 20 \sin 10t \quad (\text{kN})$$

2.1.2.4 Ảnh hưởng của trọng lực

Cho hệ như Hình 2.7, khi đến trọng lực của khối lượng thì phương trình chuyển động của hệ:

$$m\ddot{u} + c\dot{u} + ku = p(t) + W \quad (2.18)$$

Trong đó : W - trọng lượng của khối cứng ; $W = k_{ust}$



Hình 2.7 Ảnh hưởng của trọng lực

Chuyển vị toàn phần $u(t)$ gồm tổng của chuyển vị tổng tĩnh u_{st} (Static displacement) gây ra bởi trọng lực W và chuyển vị động $\bar{u}(t)$:

$$u(t) = u_{st} + \bar{u}(t) ; \dot{u} = \dot{\bar{u}} ; \ddot{u} = \ddot{\bar{u}} \quad (2.19)$$

Thay vào biểu thức lực đàn hồi ta có:

$$f_s = ku = ku_{st} + k\bar{u} \quad (2.20)$$

Thế các biểu thức (2.19), (2.20) vào (2.18) ta được:

$$m\ddot{\bar{u}} + c\dot{\bar{u}} + k(u_{st} + \bar{u}) = p(t) + ku_{st}$$

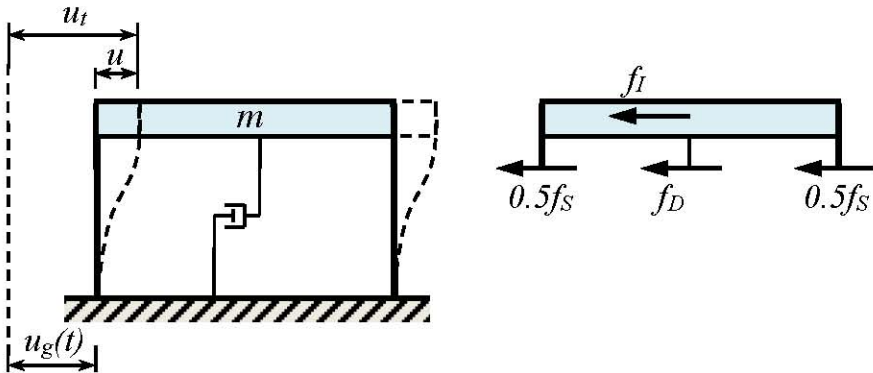
$$\text{Hay } m\ddot{\bar{u}} + c\dot{\bar{u}} + k\bar{u} = p(t) \quad (2.21)$$

Nếu lấy vị trí cân bằng tĩnh học do trọng lượng gây ra $G = mg$ gây ra làm mốc để tính chuyển vị thì phương trình vi phân vẫn có dạng giống (2.5). Như vậy, trọng lượng không ảnh hưởng đến phương trình vi phân chuyển động.

2.1.2.5 Ảnh hưởng của sự rung động gối tựa

Sự chuyển vị của nền đất do các nguyên nhân như động đất, các vụ nổ trong lòng đất gây ra sự dao động cho công trình thì cần phải xét đến khi tính toán công trình. Đặc trưng cơ bản của tải trọng động đất là chuyển vị ngang rất lớn của nền cùng với gia tốc của nó. Chẳng hạn, xét hệ chịu ảnh hưởng của sự rung động gối tựa hay chuyển vị của mặt đất như *Hình 2.8*, với giả thiết thanh ngang có độ cứng vô cùng, khối lượng toàn hệ tập trung ở thanh ngang m . Ta có phương trình chuyển động hệ :

$$f_I + f_D + f_S = 0 \quad (2.22)$$



Hình 2.8 Ảnh hưởng của trọng lực đến hệ

Chuyển vị toàn phần của khối lượng: $u_t = u + u_g$

Suy ra:
$$\ddot{u}_t = \ddot{u} + \ddot{u}_g \quad (2.23)$$

Trong đó : u - chuyển vị theo phương ngang của khối lượng do chuyển vị uốn gây ra ; u_g - chuyển vị của nền đất hay gối tựa.

Thế (2.23) vào (2.22), ta được:

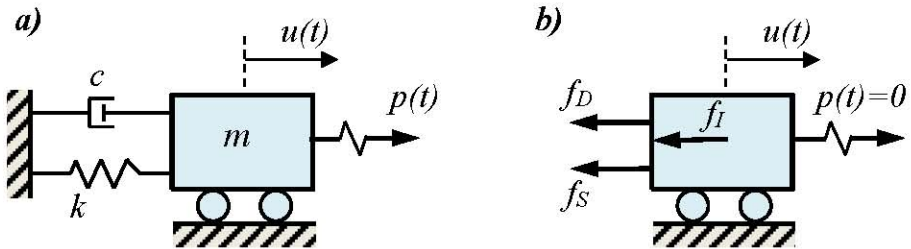
$$m(\ddot{u} + \ddot{u}_g) + c\dot{u} + ku = 0$$

$$\text{Hay} \quad m\ddot{u} + c\dot{u} + ku = -m\ddot{u}_g = P_{eff}(t) \quad (2.24)$$

Như vậy tải trọng tác dụng gây ra dao động của hệ bằng tích số giữa khối lượng và gia tốc của nền. Dấu âm để biểu thị cho lực ngược chiều với gia tốc nền. Như vậy, sự rung động gối tựa của mặt đất tương đương như lực kích thích P_{eff} tác dụng lên khối lượng.

2.2 DAO ĐỘNG TỰ DO

2.2.1 Nghiệm của phương trình chuyển động



Hình 2.9 Mô hình hệ dao động một bậc tự do

Phương trình chuyển động của hệ một bậc tự do có dạng (Hình 2.9a):

$$m\ddot{u} + c\dot{u} + ku = p(t) \quad (2.24)$$

Nếu hệ không có lực kích thích $p(t) = 0$ (Hình 2.8b) thì:

$$m\ddot{u} + c\dot{u} + ku = 0 \quad (2.25)$$

Đây là phương trình vi phân thuần nhất, nghiệm của (2.25) có dạng:

$$u(t) = Ge^{st} \quad (2.26)$$

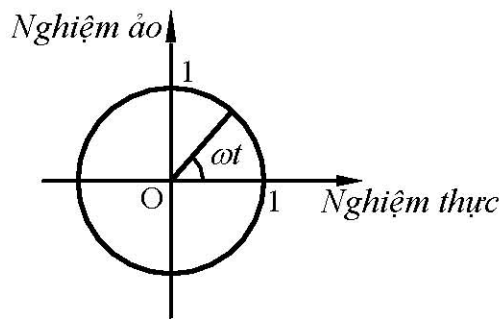
Thế vào (2.25) ta được:

$$(ms^2 + cs + k) Ge^t = 0 \quad (2.27)$$

Đặt $\omega^2 = \frac{k}{m}$ thì phương trình (2.27) dẫn tới:

$$s^2 + \frac{c}{m} + \omega^2 = 0 \quad (2.28)$$

Phương trình (2.28) là phương trình đặc trưng, nghiệm s của (2.28) tùy thuộc vào hệ số cản c và nghiệm có thể biểu diễn dưới dạng phức (nghiệm thực và ảo) như Hình 2.10



Công thức Euler $e^{\pm i\omega t} = \cos \omega t \pm i \sin \omega t$

Hình 2.10 Nghiệm thực và nghiệm ảo

2.2.2 Dao động tự do không cản ($c = 0$)

Dao động tự do không cản với hệ số cản $c = 0$, khi đó (2.28) có nghiệm: $s = \pm i\omega$, do đó nghiệm của phương trình (2.27) là:

$$u(t) = G_1 e^{i\omega t} + G_2 e^{-i\omega t} \quad (2.29)$$

Phương trình (2.29) có thể biểu diễn ở dạng hàm lượng giác thuận lợi hơn bằng cách sử dụng phương trình Euler trên :

$$e^{\pm i\omega t} = \cos \omega t \pm i \sin \omega t \quad (2.30)$$

Thế (2.30) vào (2.29) ta được:

$$u(t) = (G_1 + G_2) \cos \omega t + (G_1 - G_2) i \omega \sin \omega t \quad (2.31)$$

$$\ddot{u}(t) = -(G_1 + G_2)\omega \sin \omega t + (G_1 - G_2)i\omega \cos \omega t \quad (2.32)$$

Các hằng số G_1 và G_2 được xác định từ điều kiện ban đầu ($t=0$) :

$$u(0) = G_1 + G_2; \quad \frac{\dot{u}(0)}{i\omega} = G_1 - G_2 \quad (2.33)$$

Thế (2.33) vào (2.31) ta được :

$$u(t) = \frac{\dot{u}(0)}{\omega} \sin \omega t + u(0) \cos \omega t \quad (2.34)$$

hay
$$u(t) = A \sin \omega t + B \cos \omega t \quad (2.35)$$

với A, B được xác định từ điều kiện ban đầu: $B = u(0)$ và $A = \frac{\dot{u}(0)}{\omega}$

Có thể viết (2.35) dưới dạng khác:

$$u(t) = \rho \cos(\omega t - \theta) \quad (2.36)$$

trong đó: ρ là biên độ dao động và θ là pha ban đầu được xác định bởi:

$$\rho = \sqrt{[u(0)]^2 + \left[\frac{\dot{u}(0)}{\omega}\right]^2} \quad (2.37)$$

$$\theta = \tan^{-1} \frac{\dot{v}(0)}{\omega v(0)} \quad (2.38)$$

Chu kỳ dao động : kí hiệu T , là thời gian cần thiết để thực hiện một dao động toàn phần. Ta có :

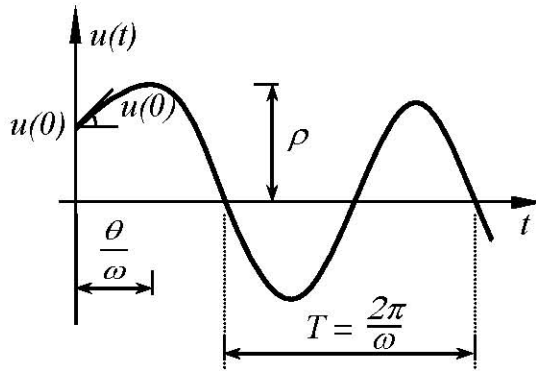
$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{1}{f} \quad (2.39)$$

với ω là tần số vòng hay tần số tuần hoàn của dao động tự nhiên và gọi tắt là tần số dao động riêng. Được xác định như sau :

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{1}{m\delta_{11}}} = \sqrt{\frac{g}{u_{st}}} \quad (2.40)$$

trong đó : k là độ cứng của hệ, g là gia tốc trọng trường, u_{st} là chuyển vị của khối lượng m tương ứng với lực $P = m.g$ tác dụng tĩnh tại vị trí khối lượng gây ra.

Đồ thị *Hình 2.11* biểu diễn quá trình dao động tự do không cản với biên độ ρ , pha ban đầu θ và chu kỳ dao động T của hệ.



Hình 2.11 Dao động tự do không cản

2.2.3 Dao động tự do có cản ($c \neq 0$)

Dao động tự do có cản với hệ số cản $c \neq 0$, khi đó nghiệm của phương trình (2.28) là :

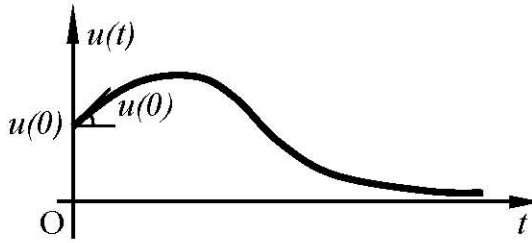
$$s = -\frac{c}{2m} \pm \sqrt{\left(\frac{c}{2m}\right)^2 - \omega^2} \quad (2.41)$$

Dạng dao động phụ thuộc vào trị số của hệ số cản c hay phụ thuộc vào biểu thức dưới dấu căn $\left(\frac{c}{2m}\right)^2 - \omega^2$ có dấu dương, âm

hay bằng không. Đồ thị *Hình 2.12* diễn tả dao động tự do có cản tắt dần theo thời gian.

Đặt
$$\xi = \frac{c}{c_{cr}} = \frac{c}{2m\omega} \quad (2.42)$$

trong đó ξ là tỉ số cản (*damping ratio*); c_{cr} là hệ số cản tới hạn.



Hình 2.12 Dao động tự do có cản

2.2.3.1 Trường hợp lực cản nhỏ (*Underdamping*) $\xi < 1$

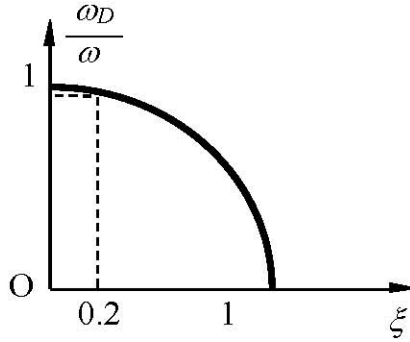
Thế vào (2.42) vào (2.41), ta thu được:

$$s = -\xi \omega \pm \sqrt{(\xi \omega)^2 - \omega^2} = -\xi \omega \pm i\omega_D \quad (2.43)$$

với $\omega_D = \omega\sqrt{1-\xi^2}$ là tần số dao động có cản. Ta có thể biến đổi thành biểu thức sau:

$$\left(\frac{\omega_D}{\omega}\right)^2 + \xi^2 = 1 \quad (2.44)$$

Dựa vào biểu thức trên cho thấy sự phụ thuộc của quan hệ các tần số dao động riêng tính đến và không tính đến sự cản $\frac{\omega_D}{\omega}$ và tham số tỉ số cản ξ . Biểu đồ mô tả phương trình (2.44) là vòng tròn có bán kính bằng đơn vị như *Hình 2.13*



Hình 2.13

Trong thực tế các kết cấu xây dựng thông thường có $\xi < 20\%$ nên $\omega_D \approx \omega$ (với $\xi = 0.2$ thì $\omega_D = 0.98\omega$), do đó sự khác biệt giữa tần số dao động riêng khi tính và không tính đến lực cản là không đáng kể.

Phương trình chuyển động của hệ dao động tự do cản nhỏ:

$$u(t) = G_1 e^{(-\xi\omega + i\omega_D)t} + G_2 e^{(-\xi\omega - i\omega_D)t} = e^{-\xi\omega t} (G_1 e^{i\omega_D t} + G_2 e^{-i\omega_D t}) \quad (2.45)$$

Biểu thức trong ngoặc (2.45) biểu thị cho dao động điều hòa không cản tương tự (2.29). Ta có thể viết lại sau :

$$u(t) = e^{-\xi\omega t} (A \sin \omega_D t + B \cos \omega_D t) \quad (2.46)$$

$$\dot{u}(t) = -\xi\omega u(t) + e^{-\xi\omega t} \omega_D (-B \sin \omega_D t + A \cos \omega_D t) \quad (2.47)$$

Từ điều kiện ban đầu ta xác định các hằng số A, B: t = 0 với biên độ là $u(0)$ và vận tốc $\dot{u}(0)$. Thế vào (2.46) và (2.47), ta được :

$$A = \frac{\dot{u}(0) + \xi\omega u(0)}{\omega_D} ; \quad B = u(0) \quad (2.48)$$

Suy ra :

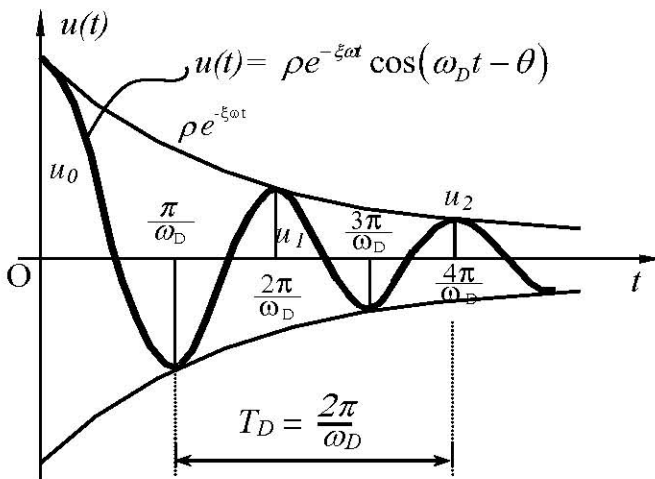
$$u(t) = e^{-\xi\omega t} \left[\frac{\dot{u}(0) + \xi\omega u(0)}{\omega_D} \sin \omega_D t + u(0) \cos \omega_D t \right] \quad (2.49)$$

$$= \rho e^{-\xi\omega t} \cos(\omega_D t - \theta)$$

$$\text{trong đó: } \rho = \sqrt{\left[\frac{\dot{u}(0) + u(0)\xi\omega}{\omega_D} \right]^2 + [u(0)]^2} \quad (2.50)$$

$$\theta = \tan^{-1} \left(\frac{\dot{u}(0) + u(0)\xi\omega}{\omega_D u(0)} \right) \quad (2.51)$$

Đồ thị chuyển động của dao động tự do cản nhỏ với $u(0) \neq 0$, $\dot{u}(0) = 0$ như Hình 2.14



Hình 2.14 Dao động tự do cản nhỏ

Xác định tỉ số cản ξ :

Phương trình dao động tự do theo điều kiện ban đầu:

$$u(t) = e^{-\xi\omega t} \left[\frac{\dot{u}(0) + \xi\omega u(0)}{\omega_D} \sin \omega_D t + u(0) \cos \omega_D t \right] \quad (2.52)$$

$$\text{Chu kỳ dao động có cản: } T_D = \frac{2\pi}{\omega_D} = \frac{2\pi}{\omega\sqrt{1-\xi^2}} \quad (2.53)$$

Dựa vào biểu đồ *Hình 2.14* ta thấy biên độ giảm dần theo quy luật số mũ âm $\rho e^{-\xi\omega t}$ và nó tiệm cận dần đến không. Bản chất của tỉ số cản trong các kết cấu xây dựng thường rất phức tạp và việc tính toán không hề đơn giản. Tuy nhiên, ta có thể biểu diễn sự tắt dần của dao động của hệ thức thông qua hệ số tương đương để xác định sự giảm dần của biên độ dao động. Muốn vậy ta xét tỉ số giữa hai biên độ dương cách nhau một chu kỳ T_D

$$\frac{u_n}{u_{n+1}} = \frac{\rho e^{-\xi\omega t}}{\rho e^{-\xi\omega(t+T_D)}} = e^{\frac{2\pi\xi\omega}{\omega_D}} \quad (2.54)$$

$$\text{Đặt } \delta = \ln \frac{u_n}{u_{n+1}} = 2\pi\xi \frac{\omega}{\omega_D} = 2\pi\xi \frac{\omega}{\omega\sqrt{1-\xi^2}} = \frac{2\pi\xi}{\sqrt{1-\xi^2}} \quad (2.55)$$

với δ là *độ giảm Loga*, biểu thị cho tốc độ tắt dần của dao động.

Khi lực cản nhỏ (ξ nhỏ) thì độ giảm Loga tính gần đúng:

$$\delta \approx 2\pi\xi \quad (2.56)$$

$$\text{hay } \xi = \frac{\delta}{2\pi} \quad (2.57)$$

Với sự gần đúng của độ giảm Loga theo (2.56), ta biểu thị quan hệ trong biểu thức (2.54) như sau:

$$\frac{u_n}{u_{n+1}} = e^\delta = e^{2\pi\xi} = 1 + 2\pi\xi + \frac{(2\pi\xi)^2}{2!} + \dots \approx 1 + 2\pi\xi \quad (2.58)$$

$$\text{Do đó: } \xi = \frac{u_n - u_{n+1}}{2\pi u_{n+1}} \quad (2.59)$$

Chính xác hơn từ quan hệ $\frac{u_n}{u_{n+m}} = e^{\xi \omega m t}$ ta có:

$$\xi = \frac{u_n - u_{n+m}}{2m\pi u_{n+m}} \quad (2.60)$$

Công thức (2.59) và (2.60) dùng xác định tỉ số cản ξ bằng thực nghiệm. Từ đó, hệ số cản c được xác định theo công thức:

$$c = 2m\omega\xi \quad (2.61)$$

2.2.3.2 Trường hợp lực cản tới hạn (Critical damping) $\xi = 1$

Khi $c_{cr} = 2m\omega$ thì ta có:

$$\sqrt{\left(\frac{c_{cr}}{2m}\right)^2 - \omega^2} = 0 \quad \text{và} \quad s = -\frac{c_{cr}}{2m} = -\omega$$

Phương trình chuyển động của hệ dao động tự do cản tới hạn là:

$$u(t) = (G_1 + G_2 t) e^{-\omega t} \quad (2.62)$$

Các hằng số G_1 và G_2 được xác định từ điều kiện ban đầu:

$$D_1 = u(0); \quad \dot{u}(0) = D_2 - \omega u(0), \quad \text{Suy ra} \quad D_2 = \dot{u}(0) + \omega u(0)$$

Thay vào (2.59) ta được :

$$u(t) = [u(0)(1 + \omega t) + \dot{u}(0)t] e^{-\omega t} \quad (2.63)$$

Đồ thị của dao động tự do cản tới hạn có dạng như Hình 2.12, không có dao động (Oscillation).

2.2.3.3 Trường hợp lực cản lớn (Overdamping) $\xi > 1$

Nghiệm của phương trình đặc trưng (2.28) là

$$s = -\xi\omega \pm \lambda \quad \text{với} \quad \lambda = \omega\sqrt{\xi^2 - 1}$$

Nghiệm của phương trình dao động tự do cản lớn là:

$$u(t) = e^{-\xi\omega t} (G_1 e^{\lambda t} + G_2 e^{-\lambda t}) = A e^{-\xi\omega t} \text{sh}(\lambda t + \gamma) \quad (2.64)$$

Dựa vào điều kiện ban đầu tại thời điểm $t = 0$, ta xác định :

$$u(0) = A \text{sh} \gamma, \dot{u}(0) = -A\xi\omega \text{sh} \gamma + A\lambda \text{ch} \gamma$$

$$\begin{aligned} \text{Vậy :} \quad A &= \sqrt{-[u(0)]^2 - \left[\frac{\dot{u}(0) + \xi\omega u(0)}{\lambda} \right]^2} \\ \gamma &= \tan^{-1} \left(\frac{\lambda u(0)}{\dot{u}(0) + \xi\omega u(0)} \right) \end{aligned} \quad (2.65)$$

Chuyển động của hệ trong trường hợp cản lớn là chuyển động không tuần hoàn. Tương tự khi $c = c_{cr}$ càng lớn thì chuyển động về vị trí cân bằng càng chậm.

Ví dụ 2.2 Xác định độ cứng, tần số dao động tự nhiên của hệ như Hình 2.15a, bỏ qua trọng lượng bản thân của hệ. Biết $a = 2\text{m}$; $b = 3\text{m}$, $m = 1$ tấn, dầm làm bằng thép I có số hiệu N⁰24a có $E = 2.1 \times 10^8 \text{ kN/m}^2$; $I = 3733 \times 10^{-8} \text{ m}^4$.

– Độ cứng k của dầm tại vị trí đặt khối lượng

Trước tiên ta cần tính chuyển vị trí đặt khối lượng m tương ứng với lực P (phương pháp lực trong Cơ học kết cấu) bằng cách nhân biểu đồ Hình 2.15b và Hình 2.15c, kết quả chuyển vị:

$$\Delta_{st} = \frac{1}{EI} \left[\frac{1}{2} \frac{Pab}{L} \times a \times \frac{2}{3} \frac{ab}{L} + \frac{1}{2} \frac{Pab}{L} \times b \times \frac{2}{3} \frac{ab}{L} \right] = \frac{Pa^2b^2}{EI \times 3L} \quad (m)$$

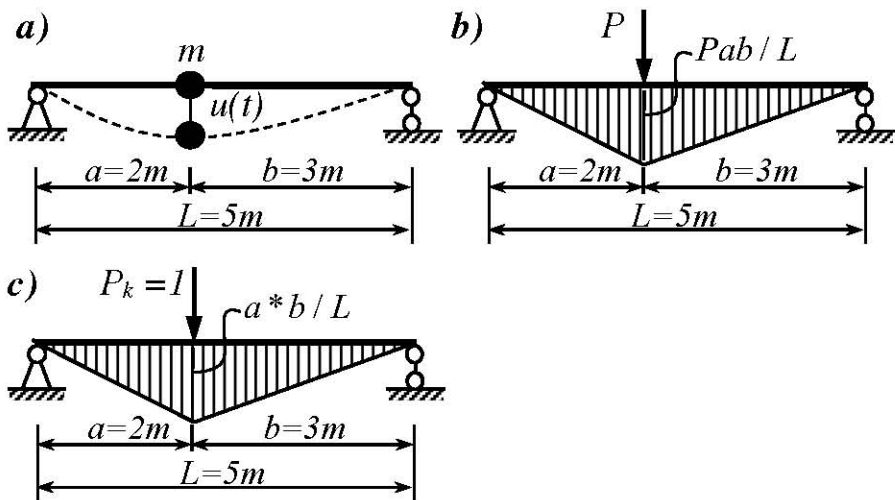
Độ cứng k của dầm chính là lực tương ứng với chuyển vị $\Delta_{st} = 1$, tức là:

$$k = \frac{EI \times 3L}{a^2 b^2} \times \Delta_{st} = \frac{EI \times 3L}{a^2 b^2} = \frac{2.1 \times 10^8 \times 3733 \times 10^{-8} \times 3 \times 5}{2^2 \times 3^2}$$

$$= 3266 \text{ kN / m}$$

– Tần số dao động riêng của hệ:

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{3266}{1}} = 57 \text{ (rad / s)}$$



Hình 2.15 Dao động tự do không cản

– Chu kỳ dao động riêng của hệ:

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{57} = 0.11 \text{ (s)}$$

– Phương trình dao động tự do không cản của hệ:

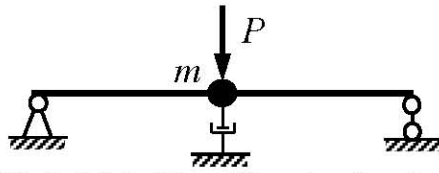
$$\ddot{u} + 3266u = 0$$

– Nghiệm của phương trình chuyển động:

$$u(t) = \rho \cos(\omega t - \theta) = \rho \cos(\omega t - \theta)$$

với
$$\rho = \sqrt{[u(0)]^2 + \left[\frac{\dot{u}(0)}{\omega}\right]^2} ; \theta = \tan^{-1} \frac{\dot{v}(0)}{\omega v(0)}$$

Ví dụ 2.3 Xác định các đặc trưng động học và biên độ dao động sau 4 chu kì của hệ dao động tự do tắt dần như *Hình 2.16*. Biết khối lượng m chịu tác dụng lực kích thích P tức thời và sau đó không tác dụng nữa. Trong thời gian tác dụng lực $P = 100\text{kN}$ chuyển vị của khối lượng đạt 0.4 cm . Khi ngưng tác dụng lực P , chuyển vị cực đại đầu tiên của khối lượng đạt 0.35 cm . Thời gian chu kỳ tương ứng với hai chuyển vị này là $T = 1.5 \text{ s}$



Hình 2.16 Dao động tự do có cản

– Xác định độ cứng của hệ:

$$k = \frac{P}{u_{st}} = \frac{100}{0.004} = 25000 \text{ (kN / m)}$$

– Xác định khối lượng của hệ:

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{\frac{k}{m}}$$

$$\text{Suy ra } m = \left(\frac{T}{2\pi}\right)^2 * k = \left(\frac{1.5}{2\pi}\right)^2 * 25000 = 1425 \left(\frac{\text{kN} \cdot \text{s}^2}{\text{m}}\right)$$

– Tần số dao động riêng của hệ:

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{1.5} = 4.189 \text{ (rad / s)}$$

– Xác định các tham số cản:

$$\text{Độ giảm loga: } \delta = \ln \frac{u_n}{u_{n+1}} = \ln \frac{0.4}{0.35} = 0.136$$

$$\text{Tỉ số cản: } \xi = \frac{\delta}{2\pi} = \frac{0.136}{2\pi} = 0.021$$

– Xác định tần số khi dao động có cản:

$$\omega_D = \omega \sqrt{1 - \xi^2} = 4.189 \sqrt{1 - 0.021^2} = 4.187 \text{ (rad / s)}$$

– Hệ số cản:

$$c = \xi c_{cr} = 2m\omega\xi = 2 * 1425 * 4.187 * 0.021 = 250,592 \text{ (kNs / m)}$$

– Biên độ sau 4 chu kỳ dao động:

$$u_5 = u_0 \left(\frac{u_1}{u_0} \right)^4 = 0.4 \left(\frac{0.35}{0.4} \right)^4 = 0.306 \text{ cm}$$

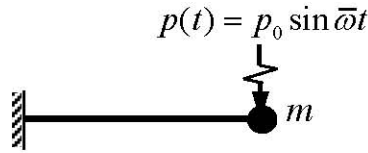
2.3 DAO ĐỘNG CƯỜNG BỨC VỚI TẢI TRỌNG ĐIỀU HÒA

2.3.1 Dao động cưỡng bức không có lực cản

Giả sử lực kích thích tác dụng lên dao động không cản ($c=0$) có dạng sau:

$$p(t) = p_0 \sin \bar{\omega} t \quad (2.66)$$

trong đó : p_0 là biên độ của tải trọng ; $\bar{\omega}$ là tần số vòng của lực kích thích.



Hình 2.17 Hệ dao động cưỡng bức không cản

Phương trình dao động của hệ dao động không cản:

$$m\ddot{u}(t) + ku(t) = p_0 \sin \bar{\omega} t \quad (2.67)$$

Nghiệm thuần nhất (quá độ) của phương trình (2.67) trên là:

$$u_h(t) = A \sin \omega t + B \cos \omega t \quad (2.68)$$

Nghiệm riêng dạng (ổn định) của phương trình (2.67) trên là:

$$u_p(t) = G \sin \bar{\omega} t \quad (2.69)$$

Thế các nghiệm trên vào (2.67) ta rút ra:

$$G = \frac{p_0}{k} \frac{1}{1 - \beta^2} \quad \text{với: } \beta = \frac{\bar{\omega}}{\omega} \quad (2.70)$$

Vậy nghiệm tổng quát:

$$u(t) = u_h(t) + u_p(t) = A \sin \omega t + B \cos \omega t + \frac{p_0}{k} \frac{1}{1 - \beta^2} \sin \bar{\omega} t \quad (2.71)$$

trong đó các hằng số A, B được xác định từ điều kiện ban đầu.

Nếu tại thời điểm $t=0$, $u(0) = 0$, $\dot{u}(0) = 0$, dễ dàng tìm được:

$$A = -\frac{p_0 \beta}{k} \frac{1}{1 - \beta^2}, \quad B = 0 \quad (2.72)$$

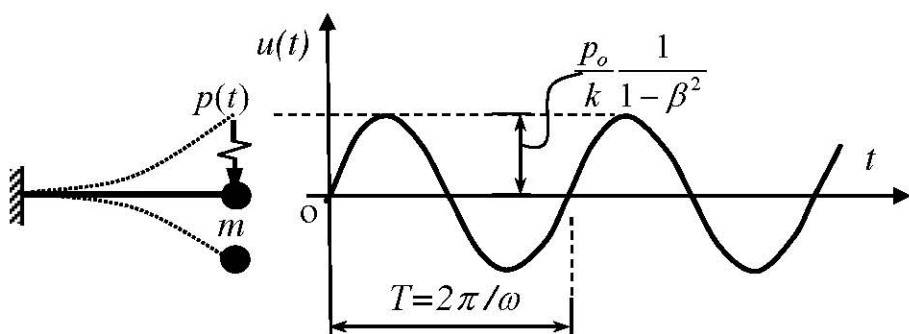
Thế vào (2.71) ta được:

$$u(t) = \frac{p_0}{k} \frac{1}{1 - \beta^2} (\sin \bar{\omega} t - \beta \sin \omega t) \quad (2.73)$$

Ta thấy phương trình (2.73) có hai thành phần: một thành phần dao động ứng với tần số của tải trọng điều hòa $\bar{\omega}$ và một thành phần ứng với tần số của dao động tự do ω . Trong thực tế, các dao động đều chịu ảnh hưởng của lực cản, lực cản dù nhỏ cũng sẽ làm cho dao động tự do tắt dần sau một thời gian dao động. Sau đó hệ sẽ chuyển sang dao động ổn định với chu kỳ của tải trọng điều hòa

$$u(t) = \frac{p_o}{k} \frac{1}{1 - \beta^2} \sin \bar{\omega} t \quad (2.74)$$

Hình 2.18 diễn tả dao động cưỡng bức của hệ chịu tải trọng điều hòa với tần số lực kích nhỏ hơn tần số dao động riêng ($\bar{\omega} < \omega$)



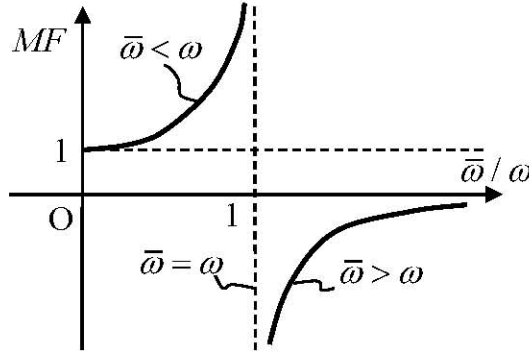
Hình 2.18 Dao động cưỡng bức không cản

Tỉ số phản ứng (*Response Ratio*): là tỉ số giữa chuyển động ứng với trạng thái chuyển động của hệ và chuyển vị tĩnh do biên độ tải trọng động tác dụng tĩnh gây ra cho hệ:

$$R(t) = \frac{u(t)}{u_{st}} = \frac{u(t)}{p_o/k} = \frac{1}{1 - \beta^2} (\sin \bar{\omega} t - \beta \sin \omega t) \quad (2.75)$$

Hệ số động (*Manification Factor*): là tỉ số giữa chuyển động cực đại với trạng thái chuyển động của hệ và chuyển vị tĩnh do biên độ tải trọng động tác dụng tĩnh gây ra cho hệ:

$$MF = \frac{u(t)}{u_{p(t)}^{st}} = \frac{1}{1 - \beta^2} = \frac{1}{1 - \left(\frac{\bar{\omega}}{\omega}\right)^2} \quad (2.76)$$



Hình 2.19 Quan hệ giữa hệ số động MF và tỉ số tần số $\bar{\omega} / \omega$

Dựa vào đồ thị *Hình 2.19*, ta nhận thấy:

+ Khi $\frac{\bar{\omega}}{\omega} > 1$ thì $MF < 0$

+ Khi $0 \leq \frac{\bar{\omega}}{\omega} < 1$ thì $MF \geq 1$

+ Khi $\bar{\omega} = \omega$ thì $MF = \infty$ lúc này xuất hiện hiện tượng cộng hưởng (chuyển vị của hệ sẽ lớn vô cùng).

2.3.2 Dao động cưỡng bức có lực cản

Phương trình chuyển động hệ với lực kích thích $p(t) = p_o \sin \bar{\omega} t$ có xét đến ảnh hưởng của lực cản:

$$m\ddot{u}(t) + c\dot{u}(t) + ku(t) = p_o \sin \bar{\omega} t \quad (2.77)$$

Thế (2.42) vào phương trình (2.77) ta được

$$\ddot{u}(t) + 2\xi\omega\dot{u}(t) + \omega^2 u(t) = \frac{p_o}{m} \sin \bar{\omega} t \quad (2.78)$$

Nghiệm tổng quát (quá độ) của phương trình (2.78) là:

$$u_h(t) = e^{-\xi\omega t} (A \sin \omega_D t + B \cos \omega_D t) \quad (2.79)$$

Nghiệm riêng của phương trình (2.78) là:

$$u_p(t) = G_1 \sin \bar{\omega} t + G_2 \cos \bar{\omega} t \quad (2.80)$$

Thế vào (2.78) và đồng nhất 2 vế, thu được:

$$\begin{aligned} G_1 &= \frac{p_o}{k} \frac{1 - \beta^2}{(1 - \beta^2)^2 + (2\xi\beta)^2} \\ G_2 &= \frac{p_o}{k} \frac{-2\xi\beta}{(1 - \beta^2)^2 + (2\xi\beta)^2} \end{aligned} \quad (2.81)$$

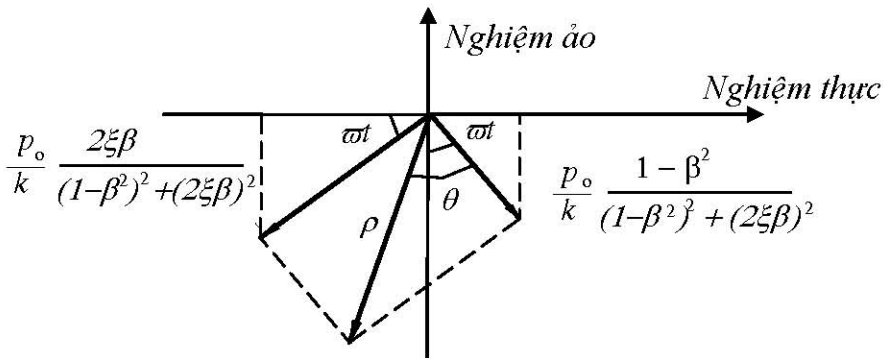
Vì nghiệm quá độ tắt rất nhanh, nên hệ chỉ dao động theo nghiệm riêng. Dùng vector quay trên giản đồ *Argrand* để biểu diễn dao động như Hình 2.20, ta tìm được giá trị:

$$\rho = \frac{p_o}{k} [(1 - \beta^2)^2 + (2\xi\omega)^2]^{-1/2} \quad (2.82)$$

$$\theta = \operatorname{tg}^{-1} \frac{2\xi\beta}{1 - \beta^2} \quad (2.83)$$

và phương trình dao động ổn định (*Steady state*):

$$u(t) = \rho \sin(\bar{\omega} t - \theta) \quad (2.84)$$



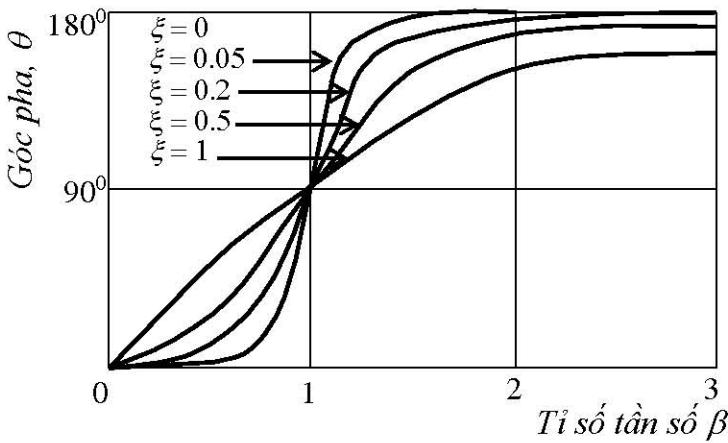
Hình 2.20 Biểu diễn dao động bằng vector quay

Đồ thị trên Hình 2.21 diễn tả mối quan hệ giữa pha dao động θ và tỷ số động β ứng với các tỷ số cản ξ khác nhau và mối quan hệ được thiết lập trên phương trình (2.83).

- Hệ số động (*Dynamic Magnification Factor*) được xác định bởi:

$$D = \frac{\rho}{p_0/k} = \frac{1}{\sqrt{(1-\beta^2)^2 + (2\xi\beta)^2}} \quad (2.85)$$

Khi $\bar{\omega} \gg \omega$ thì $D \approx 0$, nghĩa là hệ hầu như không có chuyển động.

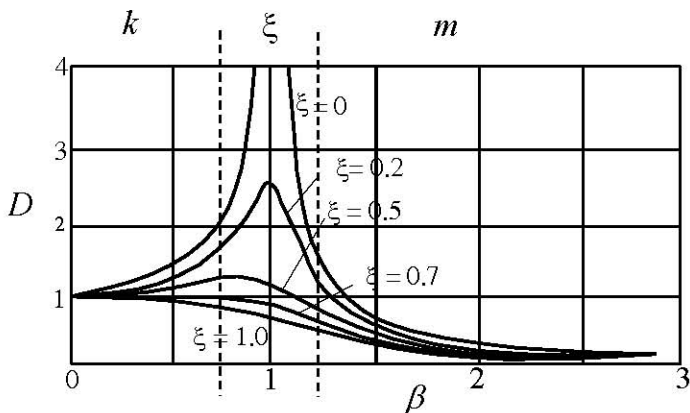


Hình 2.21 Tỷ số động

* Sự cộng hưởng (Resonance)

Khi $\beta = \frac{\bar{\omega}}{\omega} = 1$ thì xảy ra cộng hưởng. Lúc này hệ số động theo (2.85) là:

$$D_{\beta=1} = \frac{1}{2\xi} \quad (2.86)$$



Hình 2.22 Sự cộng hưởng dao động

Đồ thị *Hình 2.22* diễn tả mối quan hệ giữa hệ số động D và tỷ số độ β ứng với các tỷ số cản ξ khác nhau. Dựa vào đồ thị ta thấy khi $\beta = 1$ thì giá trị của D đạt cực đại. Nếu hệ không cản, tức là $\xi = 0$ thì $D_{\beta=1} \rightarrow \infty$. Đối với hệ có cản $\xi \neq 0$, thì $D_{\max}$ xảy ra khi:

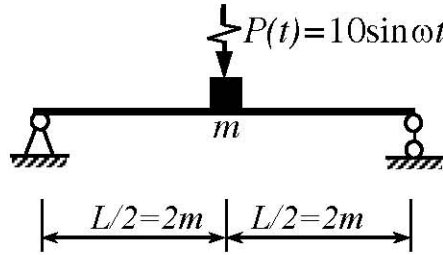
$$\begin{aligned} \frac{dD}{d\beta} = 0 &\Rightarrow \beta_{\text{dinh}} = \sqrt{1 - 2\xi^2} \\ D_{\max} &= \frac{1}{2\xi\sqrt{1 - \xi^2}} \end{aligned} \quad (2.87)$$

Như vậy: $D_{\max}$ khác với $D_{\beta=1}$. Tuy nhiên, với hệ có tỉ số cản ξ bé thì có thể coi:

$$D_{\max} \approx D_{\beta=1} = \frac{1}{2\xi} \quad (2.88)$$

Ví dụ 2.4 Xác định biên độ dao động cưỡng bức lớn nhất cho hệ cho hệ tại vị trí đặt động cơ như *Hình 2.23*. Bỏ qua trọng lượng bản thân dầm. Cho biết trọng lượng động cơ $m = 2$ tấn, động cơ có số vòng quay $n = 500$ vòng/phút. Động cơ khi quay phát sinh ra tải

trọng động theo phương đứng $P(t) = 50\sin\omega t$ (kN). Cho biết dầm chữ I có số hiệu N⁰30 có $E = 2.1 \times 10^7 \text{ N/cm}^2$, $I = 8880 \text{ cm}^4$, $L = 4\text{m}$, bỏ qua ảnh hưởng lực cản trong hệ.



Hình 2.23 Hệ dao động cưỡng bức

Giải:

- Độ cứng k của hệ tại vị trí đặt khối lượng:

$$k = \frac{48EI}{L^3} = \frac{48 \times 2.1 \times 10^7 \times 8880}{400^3} = 139860 (\text{N} / \text{cm}) = 13986 (\text{kN} / \text{m})$$

- Tần số dao động tự do của hệ:

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{13986}{2}} = 83.62 (\text{rad} / \text{s})$$

- Tần số dao động cưỡng bức của hệ:

$$\bar{\omega} = 2\pi n = 52.36 (\text{rad} / \text{s})$$

- Hệ số động của hệ:

$$MF = \frac{1}{1 - \left(\frac{\bar{\omega}}{\omega}\right)^2} = 1.64$$

- Biên độ dao động cưỡng bức lớn nhất:

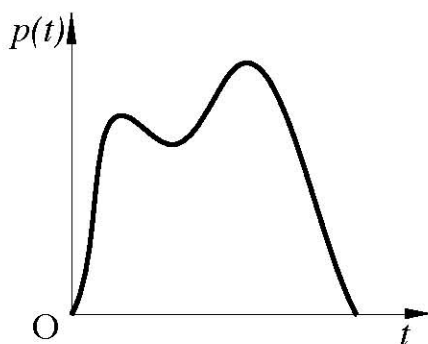
$$u_{\max} = u_{sr} MF = \frac{P_o}{k} MF = \frac{50}{13986} \times 1.64 = 0.0059 (\text{m})$$

2.4 PHẢN ỨNG VỚI TẢI TRỌNG XUNG

2.4.1 Khái niệm về tải trọng xung (Impulsive Loads)

Tải trọng xung là tải trọng tác dụng trong thời gian tương đối ngắn, đột ngột. *Hình 2.24* Mô tả dạng tổng quát của tải trọng xung.

- Phản ứng lớn nhất của hệ (bao gồm chuyển vị, vận tốc, gia tốc,...) lớn nhất của hệ đạt được trong thời gian rất ngắn.
- Lực cản có vai trò nhỏ, hấp thụ ít năng lượng của kết cấu. Vì vậy chỉ xét hệ không có cản để đơn giản hóa.



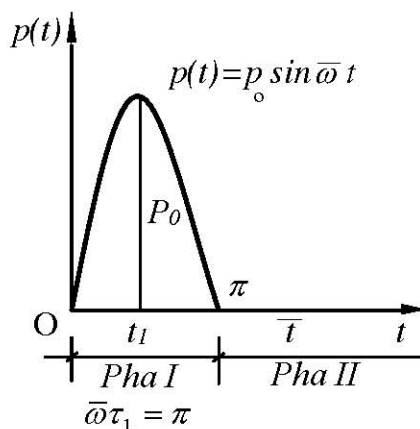
Hình 2.24 Tải trọng dạng xung

2.4.2 Dao động với tải trọng xung hình sin

Xét tải trọng nửa sóng hình sin được mô tả như *Hình 2.25*. Phản ứng của hệ được chia ra hai pha: Pha cưỡng bức có sự duy trì của tải trọng động và pha tự do không có sự tồn tại của lực bên ngoài.

- **Xét Pha I:** $0 \leq t \leq t_1$

Trong pha này kết cấu chịu tác dụng của tải trọng điều hòa. Điều



Hình 2.25 Tải trọng dạng xung hình sin

kiện ban đầu: $u(0)=\dot{u}(0)=0$ (trạng thái nghỉ). Nghiệm phản ứng gồm hai số hạng (quá độ và ổn định) cho bởi (2.82) :

$$u(t) = \frac{p_o}{k} \frac{1}{1-\beta^2} (\sin \bar{\omega} t - \beta \sin \omega t) \quad (2.89)$$

- **Xét Pha II:** $\bar{t} = t - t_1 \geq 0$

Điều kiện ban đầu của hệ : $u(\bar{t} = 0) = u(t_1)$ và $\dot{u}(\bar{t} = 0) = \dot{u}(t_1)$

Theo phương trình (2.34), ta có:

$$u(t) = \frac{\dot{u}(t_1)}{\omega} \sin \omega \bar{t} + u(t_1) \cos \omega \bar{t} \quad (2.90)$$

Tùy thuộc vào tỷ số t_1/T mà phản ứng cực đại thuộc vào Pha I hoặc Pha II.

Nếu u_{max} thuộc Pha I, nghĩa là $t \leq t_1 = \frac{\pi}{\bar{\omega}}$ thì phương trình (2.89):

$$\Rightarrow \frac{du(t)}{dt} = \frac{p_o}{k} \frac{1}{1-\beta^2} (\bar{\omega} \cos \bar{\omega} t - \bar{\omega} \cos \omega t) = 0 \quad (2.91)$$

hay $\cos \bar{\omega} t = \cos \omega t$

$$\text{Do đó: } \bar{\omega} t = 2\pi n \pm \omega t \leq \pi \quad (2.92)$$

trong đó: $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$

Thế (2.92) vào (2.89) tìm được u_{max} . Chú ý rằng khi $\bar{\omega} = \omega$ trong (2.92) ta lấy dấu (-) và $n = 1$ ta có :

$$\bar{\omega} t = \frac{2\pi}{1 + \frac{\bar{\omega}}{\omega}} \quad (2.93)$$

Nếu u_{max} thuộc Pha II: khi $\bar{\omega} > \omega$ ($\bar{\omega}$ càng lớn thì $t_1 = \frac{2\pi}{\bar{\omega}}$ càng nhỏ). Dùng điều kiện ban đầu $u(t_1)$ và $\dot{u}(t_1)$, ta có biên độ dao động tự do được xác định từ phương trình (2.37)

$$\rho = \sqrt{\left[\frac{\dot{u}(t_1)}{\omega}\right]^2 + [u(t_1)]^2} = \frac{p_0/k}{1-\beta^2} \beta \left(2 + 2\cos\frac{\pi}{\beta}\right)^{1/2} \quad (2.94)$$

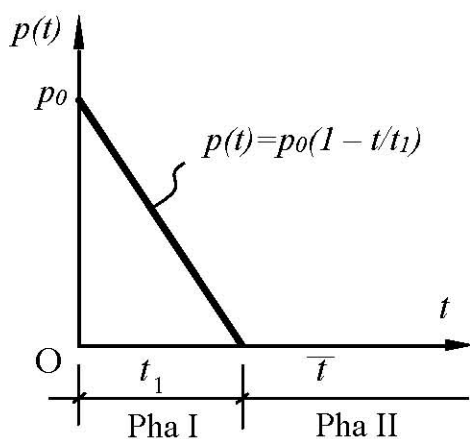
Hệ số động:

$$D = \frac{\rho}{p_0/k} = \frac{\beta}{1-\beta^2} \sqrt{2 + 2\cos\frac{\pi}{\beta}} \quad (2.95)$$

hay
$$D = \frac{2\beta}{1-\beta^2} \cos\frac{\pi}{2\beta} \quad (2.96)$$

2.4.3 Dao động với tải trọng xung tam giác

Hình 2.26 mô tả tải trọng tác dụng lên kết cấu có dạng xung hình tam giác $p(t) = p_0 \left(1 - \frac{t}{t_1}\right)$. Xét các pha dao động:



Hình 2.26 Tải trọng xung dạng hình chữ nhật

- **Xét Pha I:** $0 \leq t \leq t_1$, ta có nghiệm riêng của hệ:

$$u_p(t) = \frac{p_0}{k} \left(1 - \frac{t}{t_1} \right) \quad (2.97)$$

Ứng với điều kiện ban đầu nghỉ, nghiệm tổng quát có dạng:

$$u(t) = \frac{p_0}{k} \left(\frac{\sin \omega t}{\omega t_1} - \cos \omega t - \frac{t}{t_1} + 1 \right) \quad (2.98)$$

Xác định giá trị lớn nhất của chuyển vị, ta lấy đạo hàm (2.98) và cho bằng không. Kết quả như sau:

Thời điểm đạt chuyển vị cực đại:

$$t = \frac{2 \tan^{-1}(\omega t_1)}{\omega} \quad (2.99)$$

Chuyển vị cực đại:

$$u_{\max} = 2 \frac{p_0}{k} \left(1 - \frac{\tan^{-1}(\omega t_1)}{\omega t_1} \right) \quad (2.100)$$

Hệ số động trong trường hợp này:

$$D = \frac{u_{\max}}{p_0/k} = 2 \left(1 - \frac{\tan^{-1}(\omega t_1)}{\omega t_1} \right) \quad (2.101)$$

Điều kiện để xảy ra chuyển vị cực đại trong Pha I là thời gian tính theo (2.99) nhỏ hơn hoặc bằng t_1 . Từ điều kiện này, ta xác định được: $t_1 / T \geq 0.371$

- **Xét Pha II:** $\bar{t} \geq 0$

Phương trình dao động tự do được xác định từ điều kiện ban đầu ứng với thời điểm cuối Pha I, tức là $\bar{t} = 0$, hay $t = t_1$. Nghiệm của phương trình:

$$u(t) = u(t_1) \cos \omega t + \frac{\dot{u}(t_1)}{\omega} \sin \omega t \quad (2.102)$$

trong đó:

$$\begin{cases} u(t_1) = \frac{p_0}{k} \left(\frac{\sin \omega t_1}{\omega t_1} - \cos \omega t_1 \right) \\ \dot{u}(t_1) = \frac{p_0 \omega}{k} \left(\frac{\cos \omega t_1}{\omega t_1} + \sin \omega t_1 - \frac{1}{\omega t_1} \right) \end{cases} \quad (2.103)$$

Biên độ dao động tự do trong Pha II được xác định theo (2.37)

$$\begin{aligned} \rho &= \sqrt{[u(t_1)]^2 + \left[\frac{\dot{u}(t_1)}{\omega} \right]^2} \\ &= \frac{p_0}{k} \frac{\sqrt{(1 - \cos \omega t_1)^2 + (\omega t_1 - \sin \omega t_1)^2}}{\omega t_1} \end{aligned} \quad (2.104)$$

Hệ số động:

$$D = \frac{u_{\max}}{p_0/k} = \frac{\sqrt{(1 - \cos \omega t_1)^2 + (\omega t_1 - \sin \omega t_1)^2}}{\omega t_1} \quad (2.105)$$

Bảng 2.1

$\frac{t_1}{T}$	0	0.1	0.2	0.3	0.371	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8
D	0	0.31	0.60	0.85	1	1.05	1.20	1.31	1.39	1.453
$\frac{t_1}{T}$	0.9	1.0	1.25	1.5	1.75	2	2.5	3	5	∞
D	1.51	1.55	1.63	1.69	1.73	1.76	1.81	1.839	1.91	2

Điều kiện để xảy ra cực đại trong Pha II này là $\frac{t_1}{T} < 0.371$. Từ công thức (2.102) và (2.105) ta lập được bảng xác định hệ số động theo $\frac{t_1}{T}$ dưới dạng tải trọng xung hình tam giác này (Bảng 2.1)

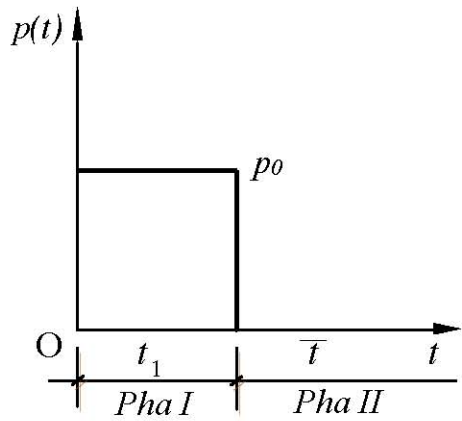
2.4.4 Dao động với tải trọng xung chữ nhật

Xét dao động chịu tác dụng của tải trọng xung hình chữ nhật trong thời gian ngắn t_1 như Hình 2.27

$$p(t) = p_o \text{ khi } t \leq t_1$$

$$p(t) = 0 \text{ khi } t \geq t_1$$

- Xét Pha I: $0 \leq t \leq t_1$



Hình 2.27 Tải trọng xung dạng hình chữ nhật

Tải trọng đặt đột ngột và giữ nguyên không đổi trong Pha I.

Nghiệm riêng cho tải trọng bậc thang (Step loads) là chuyển vị tĩnh:

$$u_p = \frac{p_o}{k} \quad (2.106)$$

Nghiệm tổng quát chứa các hằng số xác định từ điều kiện ban đầu nghỉ (rest) bằng không là:

$$u(t) = \frac{p_o}{k} (1 - \cos \omega t) \quad (2.107)$$

Để xác định giá trị lớn nhất của chuyển vị ta lấy đạo (2.107):

$$\dot{u}(t) = \frac{P_0}{k} \omega \sin \omega t \quad (2.108)$$

Suy ra: $\omega t = n\pi$ và $t = n \frac{T}{2}$ với $n = 1$; $t = \frac{T}{2}$. Vì $t \leq t_1$ nên điều

kiện để xảy ra cực trị trong Pha I là $\frac{t_1}{T} \geq 0.5$

Ứng với $t = \frac{T}{2}$ thì $u_{\max} = u\left(\frac{T}{2}\right) = 2 \frac{P_0}{k}$

Hệ số động:

$$D = \frac{u_{\max}}{P_0/k} = 2 \quad (2.109)$$

- **Xét Pha II:** $\bar{t} = t - t_1 \geq 0$

Phương trình dao động tự do theo (2.90)

$$u(\bar{t}) = \frac{\dot{u}(t_1)}{\omega} \sin \omega \bar{t} + u(t_1) \cos \omega \bar{t} \quad (2.110)$$

Biên độ dao động tự do trong Pha II được xác định theo (2.37)

$$\begin{aligned} \rho &= \sqrt{[u(t_1)]^2 + \left[\frac{\dot{u}(t_1)}{\omega}\right]^2} \\ &= \frac{P_0}{k} \sqrt{\sin^2\left(\frac{2\pi t_1}{T}\right) + \left(1 - \cos\left(\frac{2\pi t_1}{T}\right)\right)^2} \end{aligned} \quad (2.111)$$

Hệ số động:

$$D = \frac{u_{\max}}{P_0/k} = 2 \sin \frac{\pi t_1}{T} \quad \text{với} \quad \frac{t_1}{T} \leq 0.5 \quad (2.112)$$

Như vậy hệ số động thay đổi theo qui luật hình sin phụ thuộc vào quan hệ $\frac{t_1}{T}$ nhỏ hơn 0.5. Từ công thức (2.112) ta tính được hệ số động như *Bảng 2.2*

Bảng 2.2

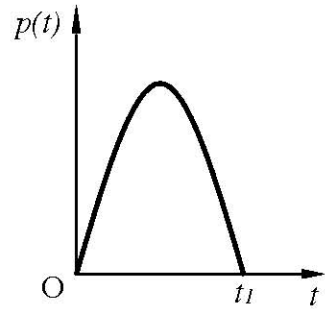
$\frac{t_1}{T}$	0	0.01	0.02	0.05	0.1	0.167	0.2	0.3	0.4	≥ 0.5
D	0	0.05	0.13	0.31	0.62	1.00	1.18	1.62	1.90	2.00

2.4.5 Tính toán gần đúng phản ứng do lực xung

Giả sử $p(t)$ là lực xung trong thời gian t_1 rất bé, hệ có chuyển vị $u(t)$ (*Hình 2.28*). Dùng phương trình cân bằng lực:

$$m\ddot{u} = m \frac{d\dot{u}}{dt} = p(t) - ku$$

$$m\Delta\dot{u} = \int_0^{t_1} [p(t) - ku]dt$$

**Hình 2.28** Lực xung

Vì $u(t_1)$ là lượng bé bậc 2 so với t_1 , nghĩa là $u \sim (t_1)^2$, nên ta có thể bỏ qua. Do đó:

$$\Delta\dot{u} = \frac{1}{m} \int_0^{t_1} p(t)dt = \dot{u}(t_1) - \dot{u}(0) = \dot{u}(t_1) \quad (2.113)$$

Trong đó: $u(t_1) = 0$ và $\dot{u}(t_1)$ đóng vai trò điều kiện ban đầu của Pha II.

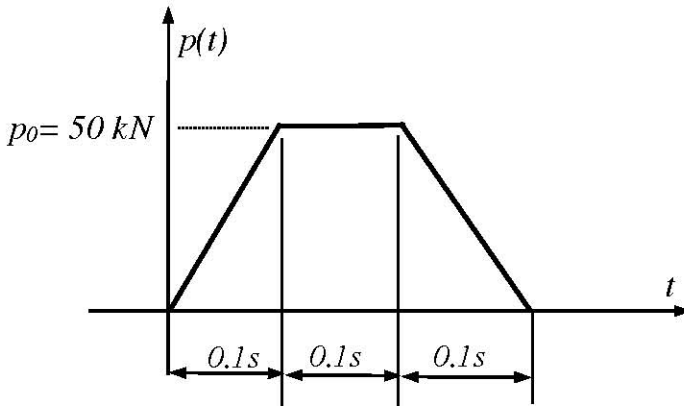
Dao động tự do sau khi lực thôi tác dụng có phương trình:

$$u(\bar{t}) = \frac{\dot{u}(t_1)}{\omega} \sin \omega \bar{t} + u(t_1) \cos \omega \bar{t} \quad (2.114)$$

$$u(\bar{t}) \approx \frac{1}{m\omega} \left(\int_0^{t_1} p(t) dt \right) \sin \omega \bar{t} \quad (2.115)$$

Ví dụ 2.5:

Dùng công thức gần đúng, phân tích phản ứng của hệ kết cấu một bậc tự do chịu tải trọng dạng xung $p(t)$ như *Hình 2.29*. Biết các đặc trưng vật lý của hệ kết cấu như sau: độ cứng $k = 201 \text{ kN/m}$, trọng lượng $W = 200 \text{ kN}$.



Hình 2.29 Tải trọng dạng xung hình thang

Giải:

- Tần số vòng: $\omega = \sqrt{\frac{kg}{W}} = 3.14 \text{ rad/s}$ và $\int_0^{t_1} p(t) dt = 10 \text{ kN.s}$.
- Chu kỳ dao động của hệ: $T = \frac{2\pi}{\omega} = 2 \text{ s}$.

Vì tải trọng tác dụng trong thời gian ngắn ($\frac{t_1}{T} = 0.15$), nên dùng (2.115) phản ứng xấp xỉ được tính:

$$u(\bar{t}) = \frac{9.81}{200 \times 3.14} \times 10 \sin \omega \bar{t} = 0.156 \sin \omega \bar{t}$$

trong đó gia tốc trọng trường cho bởi $g = 9.81 \text{ m/s}^2$

- Phản ứng đạt cực đại khi $\sin \omega \bar{t} = 1$, nghĩa là: $u_{\max} = 0.156 \text{ m}$.
- Lực đàn hồi cực đại:

$$f_{S,\max} = k u_{\max} = 201 \times 0.156 = 31.4 \text{ kN}$$

Giá trị chính xác của chuyển vị cực đại được xác định từ phương pháp tích phân trực tiếp là 0.156 m .

Nhận xét: Nghiệm thu được từ phương pháp xấp xỉ khá thích hợp, sai số nhỏ hơn 2%.

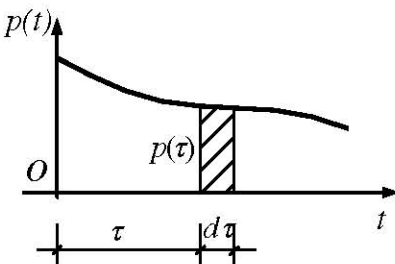
2.5 PHẢN ỨNG VỚI TẢI TRỌNG BẤT KỲ

2.5.1 Tích phân Duhamel cho hệ không cản

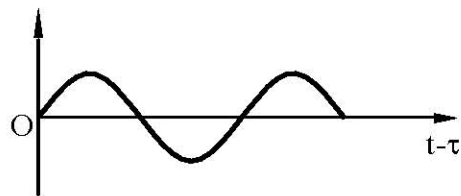
Xét tải trọng bất kỳ $p(t)$ có dạng xung tác dụng lên kết cấu như Hình 2.30a. Xét thời điểm $t = \tau$, theo phương trình (2.115) ta có:

$$du(t) = \frac{p(\tau) d\tau}{m\omega} \sin \omega(t - \tau) \quad (2.116)$$

với $t > \tau$ $\bar{t} = t - \tau$



b) Lực xung



Phản ứng $du(t)$ sau khi chịu xung $p(\tau)d\tau$

a) Phản ứng của hệ sau khi chịu xung

Hình 2.30

Đây là dao động tự do của hệ sau khi chịu xung lực $p(\tau)d\tau$; $du(t)$ không phải là độ thay đổi của chuyển vị u trong thời gian $d\tau$.

Toàn bộ lịch sử tải trọng có thể xem như bao gồm sự nối tiếp của các xung lực ngắn, mỗi xung lực tạo ra một phản ứng vi phân theo (2.116). Phản ứng thu được của hệ sau khi chịu xung lực tác dụng được biểu diễn như Hình 2.30b. Phản ứng toàn bộ là do chồng chất của các xung lực tạo ra, nên:

$$u(t) = \frac{1}{m\omega} \int_0^t p(\tau) \sin \omega(t - \tau) d\tau \quad (2.117)$$

$u(t)$ trong (2.117) được gọi là tích phân *Duhamel* cho hệ không cản. Ký hiệu:

$$h(t - \tau) \equiv \frac{1}{m\omega} \sin \omega(t - \tau) \quad (2.118)$$

thì phương trình (2.114) có dạng:

$$u(t) = \int_0^t p(\tau) h(t - \tau) d\tau \quad (2.119)$$

$u(t)$ trong (2.119) được gọi là tích phân cuộn (*Convolution integral*) và hàm $h(t - \tau)$ được coi như phản ứng với xung lực đơn vị.

Nếu ở thời điểm $t = 0$ (lực bắt đầu tác dụng), kết cấu có điều kiện ban đầu khác không: $u(0) \neq 0$, $\dot{u}(0) \neq 0$ thì (2.117) phải kể thêm dao động tự do:

$$u(t) = \frac{\dot{u}(0)}{\omega} \sin \omega t + u(0) \cos \omega t + \frac{1}{m\omega} \int_0^t p(\tau) \sin \omega(t - \tau) d\tau \quad (2.120)$$

2.5.2 Tích phân bằng phương pháp số cho *Duhamel Integral*

Dùng công thức lượng giác:

$$\sin(\omega t - \omega \tau) = \sin \omega t \cos \omega \tau - \cos \omega t \sin \omega \tau$$

Phương trình (2.117) có thể viết lại:

$$u(t) = \sin \omega t \frac{1}{m\omega} \int_0^t p(\tau) \cos \omega \tau d\tau - \cos \omega t \frac{1}{m\omega} \int_0^t p(\tau) \sin \omega \tau d\tau \quad (2.121)$$

Hay
$$u(t) = \bar{A}(t) \sin \omega t - \bar{B}(t) \cos \omega t \quad (2.122)$$

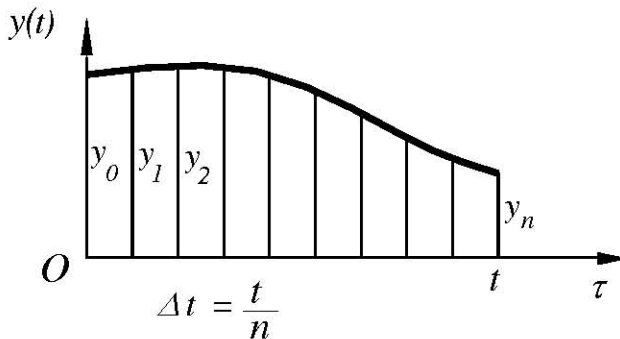
Nói chung các hệ số $\bar{A}(t)$ và $\bar{B}(t)$ được tích phân bằng số. Chẳng hạn, có thể viết lại:

$$\bar{A}(t) = \frac{1}{m\omega} \int_0^t \underbrace{p(\tau) \cos \omega \tau}_{y(\tau)} d\tau = \frac{1}{m\omega} \int_0^t y(\tau) d\tau \quad (2.123)$$

* Phương pháp Simpson

Chia t ra n phần (n chẵn): $\Delta \tau = \frac{t}{n}$ và phương pháp này được biểu diễn như Hình 2.31, khi đó:

$$\int_0^t y(\tau) d\tau = \frac{\Delta \tau}{3} (y_0 + 4y_1 + 2y_2 + 4y_3 + 2y_4 + \dots + 1y_n) \quad (2.124)$$



Hình 2.31 Tích phân bằng phương pháp số

2.5.3 Phản ứng của hệ có cản

Trong (2.116) dùng điều kiện ban đầu do xung lực $p(\tau)d\tau$ tạo ra:

$u(0) = 0$, $\dot{u}(0) = \frac{p(\tau)d\tau}{m}$, ta có:

$$du(\tau) = e^{-\xi\omega(t-\tau)} \left[\frac{p(\tau)d\tau}{m\omega_D} \sin \omega_D(t-\tau) \right], \quad t \geq \tau \quad (2.125)$$

$$u(t) = \frac{1}{m\omega_D} \int_0^t p(\tau) e^{-\xi\omega(t-\tau)} \sin \omega_D(t-\tau) d\tau \quad (2.126)$$

Tương tự hệ không cản, ta có:

$$h(t-\tau) = \frac{1}{m\omega_D} e^{-\xi\omega(t-\tau)} \sin \omega_D(t-\tau) \quad (2.127)$$

$$u(t) = A(t) \sin \omega_D t - B(t) \cos \omega_D t \quad (2.128)$$

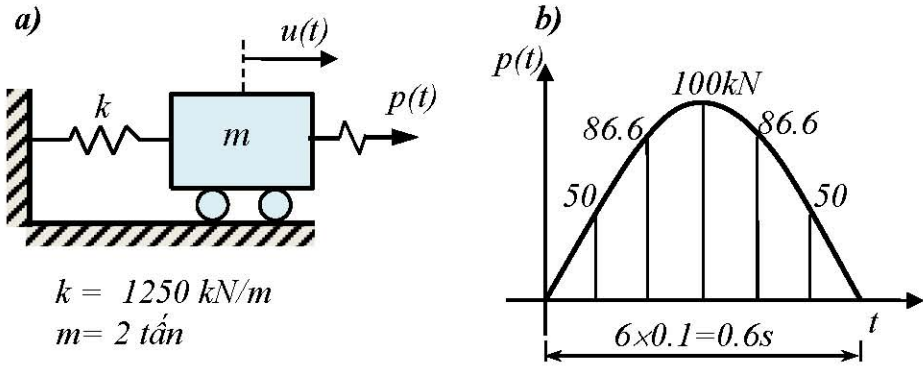
trong đó:

$$\begin{aligned} A(t) &= \frac{1}{m\omega_D} \int_0^t p(\tau) \frac{e^{\xi\omega\tau}}{e^{\xi\omega t}} \cos \omega_D \tau d\tau \\ B(t) &= \frac{1}{m\omega_D} \int_0^t p(\tau) \frac{e^{\xi\omega\tau}}{e^{\xi\omega t}} \sin \omega_D \tau d\tau \end{aligned} \quad (2.129)$$

Các hệ số $A(t)$ và $B(t)$ được tính bằng số, chẳng hạn phương pháp *Simpson*.

Ví dụ 2.6:

Cho hệ một bậc tự do dao động không cản như *Hình 2.32* chịu tải trọng nửa bước sóng hình sin. Tính toán lực đàn hồi $f_s(t)$ trong thời gian $0 < t < 0.6s$ bằng phương pháp số với tích phân Duhamel bằng cách dùng phương pháp Simpson với $\Delta\tau = 0.1s$.



Hình 2.32 Hệ chịu tải trọng bất kỳ

Giải:

Áp dụng phương pháp Simpson với $t = 0.6 \text{ s}$ và $\Delta\tau = \frac{t}{n} = 0.1 \text{ s}$, khi đó:

$$\begin{aligned} \int_0^{0.6} p(\tau) d\tau &= \frac{\Delta\tau}{3} (p_0 + 4p_1 + 2p_2 + 4p_3 + 2p_4 + 4p_5 + p_6) \\ &= \frac{0.1}{3} (0 + 4 \times 50 + 2 \times 86.6 + 4 \times 100 + 2 \times 86.6 + 4 \times 50 + 0) \\ &= 38.213 \text{ kN.s} \end{aligned}$$

Tần số dao động tự nhiên của hệ:

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{1250}{2}} = 25 \text{ (rad / s)}$$

Biên độ dao động lớn nhất của hệ:

$$\bar{A}(t) = \frac{1}{m\omega} \int_0^t p(\tau) d\tau = \frac{1}{2 \times 25} \times 38.213 = 0.764 \text{ m}$$

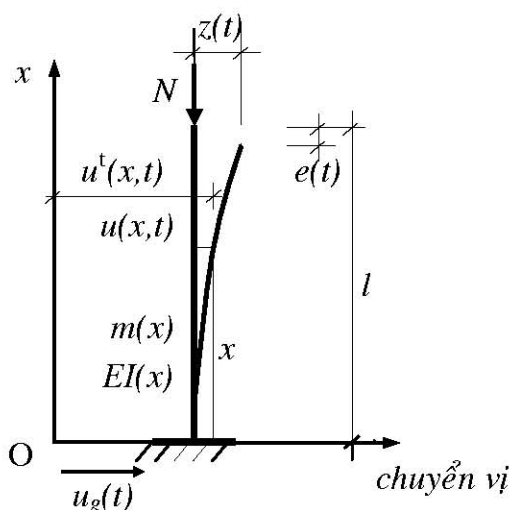
Lực đàn hồi trong thời gian $0 < t < 0.6 \text{ s}$:

$$f_s(t) = k * \bar{A}(t) = 1250 * 0.764 = 955 \text{ kN}$$

2.6 HỆ MỘT BẬC TỰ DO SUY RỘNG (GENERALISED SDOF SYSTEM)

2.6.1 Mô hình hệ một bậc tự do suy rộng

Xét hệ có đặc trưng vật lý phân bố ($m, EI \dots$) như Hình 2.33, thực chất có vô hạn bậc tự do. Nếu coi hệ chỉ dao động với một hàm dạng nào đó thì hệ trở thành 1 bậc tự do. Cần tìm các đặc trưng vật lý tập trung cho hệ 1 bậc tự do đó.



Hình 2.33 Hệ một bậc tự do suy rộng

2.6.2 Thiết lập phương trình chuyển động

Giả sử hệ chịu rung động ngang $u_g(t)$ của gối tựa, rung động có thể do động đất hoặc lực kích thích bên ngoài tác dụng. Dùng nguyên lý *Hamilton* để thiết lập phương trình chuyển động. Đặt:

$$u(x, t) = \psi(x) Z(t) \quad (2.130)$$

trong đó: $\psi(x)$ là hàm dạng (*Shape Function*) và $Z(t)$ là tọa độ suy rộng (*Generalised Coordinate*)

Động năng của hệ được cho bởi:

$$T = \frac{1}{2} \int_0^l m(x) [\dot{u}^t(x, t)]^2 dx$$

$$\delta T = \int_0^l m(x) \dot{u}^t(x, t) \delta \dot{u}^t dx \quad (2.131)$$

Thế năng uốn của hệ:

$$V_f = \frac{1}{2} \int_0^l EI(x) [u''(x, t)]^2 dx$$

$$\delta V_f = \int_0^l EI(x) u''(x, t) \delta u'' dx \quad (2.132)$$

Độ co ngắn của thanh:

$$e(t) = \frac{1}{2} \int_0^l [u'(x, t)]^2 dx \quad (2.133)$$

Chọn vị trí ban đầu của lực dọc N có thế năng bằng 0, ta có thể năng của lực dọc là:

$$V_N = -Ne = -\frac{N}{2} \int_0^l [u'(x, t)]^2 dx$$

hay

$$\delta V_N = -N \int_0^l u'(x, t) \delta u' dx \quad (2.134)$$

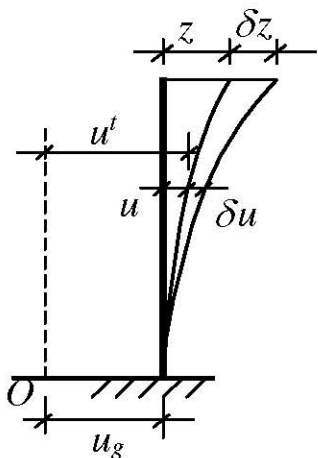
Vì hệ không có lực không bảo toàn (lực cản và lực kích thích) nên ta có:

$$\int_{t_1}^{t_2} \delta(T - V) dt = 0 \quad (2.135)$$

với $V = V_f + V_N$

Thế (2.131), (2.132) và (2.134) vào (2.135):

$$\int_{t_1}^{t_2} \left[\int_0^l m(x) \dot{u}^t(x, t) \delta \dot{u}^t dx - \int_0^l EI(x) u''(x, t) \delta u'' dx - N \int_0^l u'(x, t) \delta u' dx \right] dt = 0 \quad (2.136)$$



Hình 2.34

Dùng các liên hệ:

$$\begin{aligned} \dot{u}^t &= \dot{u} + \dot{u}_g \quad \text{và} \quad \delta \dot{u}^t = \delta \dot{u} \\ u'' &= \psi'' Z \quad \text{và} \quad \delta u'' = \psi'' \delta Z \\ V' &= \psi' Z \quad \text{và} \quad \delta u' = \psi' \delta Z \\ \dot{u} &= \psi \dot{Z} \quad \text{và} \quad \delta \dot{u} = \psi \delta \dot{Z} \end{aligned} \quad (2.137)$$

Thế (2.137) vào (2.136) ta thu được:

$$\begin{aligned} \int_{t_1}^{t_2} \left[\dot{Z} \delta \dot{Z} \int_0^l m(x) \psi^2 dx + \delta \dot{Z} \dot{u}_g(t) \int_0^l m(x) \psi dx - Z \delta Z \int_0^l EI(x) \psi''^2 dx \right. \\ \left. + NZ \delta Z \int_0^l (\psi')^2 dx \right] dt = 0 \end{aligned} \quad (2.138)$$

Chú ý rằng tích phân $\int_0^l f(x) dx$ không phụ thuộc t , nên đóng vai trò là các hằng số khi thực hiện tích phân theo biến t . Để làm xuất hiện các thừa số δZ trong 2 số hạng đầu, ta tiến hành tích phân từng phần:

$$\int_{t_1}^{t_2} \dot{Z} \delta \dot{Z} dt = \int_{t_1}^{t_2} \dot{Z} \delta \frac{dZ}{dt} dt = \int_{t_1}^{t_2} \dot{Z} \frac{d}{dt} (\delta Z) dt = \dot{Z} \delta Z \Big|_{t_1}^{t_2} - \int_{t_1}^{t_2} \ddot{Z} \delta Z dt = - \int_{t_1}^{t_2} \ddot{Z} \delta Z dt \quad (2.139)$$

$$\int_{t_1}^{t_2} \dot{u}_g(t) \delta \dot{Z} dt = \dot{u}_g(t) \delta Z \Big|_{t_1}^{t_2} - \int_{t_1}^{t_2} \ddot{u}_g(t) \delta Z dt \quad (2.140)$$

Thế (2.139) và (2.140), phương trình (2.138) trở thành:

$$\int_{t_1}^{t_2} \left[m^* \ddot{Z} + k^* Z - k_G^* Z - p_t^*(t) \right] \delta Z dt = 0 \quad (2.141)$$

trong đó: $m^* = \int_0^l m(x) \psi^2 dx$: Khối lượng suy rộng

$k^* = \int_0^l EI(x) (\psi'')^2 dx$: Độ cứng suy rộng

$k_G^* = N \int_0^l (\psi')^2 dx$: Độ cứng hình học suy rộng

$p_t^*(t) = -\ddot{u}_g(t) \int_0^l m(x) \psi dx$: Tải trọng tương đương suy rộng

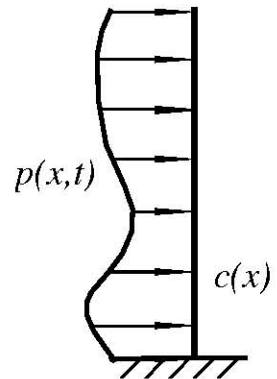
Vì δZ bất kỳ nên lượng trong dấu ngoặc triệt tiêu. Ta thu được phương trình vi phân chuyển động của hệ một bậc tự do suy rộng:

$$m^* \ddot{Z}(t) + \bar{k}^* Z(t) = p_t^*(t) \quad (2.142)$$

với $\bar{k}^* = k^* - k_G^*$: Độ cứng suy rộng kết hợp

Khi lực dọc N đạt trị số tới hạn $N = N_{cr}$ thì $\bar{k}^* = 0$. Từ đó, suy ra công thức tính lực N_{cr} là:

$$N_{cr} = \frac{\int_0^l EI(x) (\psi'')^2 dx}{\int_0^l (\psi')^2 dx} \quad (2.143)$$



Hình 2.35

Phương trình (2.143) là công thức của phương pháp Rayleigh. Độ chính xác của lực

dọc tới hạn N_{cr} phụ thuộc vào sự lựa chọn của hàm dạng. Thông

thường hàm dạng được chọn là gần đúng và lực tối hạn thu được lớn hơn giá trị chính xác.

Chú ý:

Nếu thanh chịu lực kích thích phân bố $p(x, t)$ và lực dọc $N(x)$ như Hình 2.35 thì công thức tính lực kích thích suy rộng (lực tập trung) $p^*(t)$ và độ cứng hình học k_G^* lần lượt là:

$$p^*(t) = \int_0^l p(x, t) \psi(x) dx \quad (2.144)$$

$$k_G^* = \int_0^l N(x) [\psi'(x)]^2 dx \quad (2.145)$$

$$C^* = \int_0^l c(x) [\psi(x)]^2 dx \quad (2.146)$$

2.6.3 Ví dụ áp dụng

Ví dụ 2.7:

Thiết lập phương trình vi phân dao động của hệ một bậc tự do suy rộng với các đặt trưng vật lý (khối lượng, độ cứng) phân bố đều theo chiều cao như trên hình vẽ. Cho biết phương trình đường đàn hồi (hàm dạng) được chọn như sau:

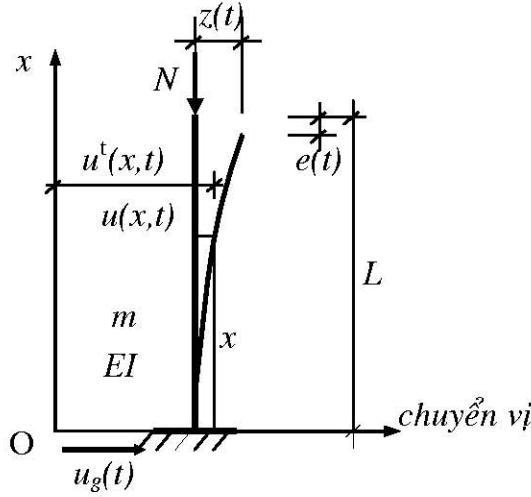
$$\psi(x) = 1 - \cos \frac{\pi x}{2L} \quad (a)$$

Giải:

Áp dụng công thức trên ta có khối lượng và độ cứng suy rộng:

$$m^* = \int_0^L \bar{m}(\psi)^2 dx = \bar{m} \int_0^L \left(1 - \cos \frac{\pi x}{2L}\right)^2 dx = 0.228 \bar{m} L \quad (b)$$

$$k^* = \int_0^L EI(\psi'')^2 dx = EI \int_0^L \left(\frac{\pi^2}{4L^2} \cos \frac{\pi x}{2L}\right)^2 dx = \frac{\pi^4}{32} \frac{EI}{L^3} \quad (c)$$



Hình 2.36 Hệ một bậc tự do suy rộng

Tải trọng tương đương suy rộng (bỏ qua dấu trừ):

$$P^*(t) = \ddot{u}_g(t) \int_0^L \bar{m} \psi dx = \bar{m} \ddot{u}_g(t) \int_0^L \left(1 - \cos \frac{\pi x}{2L}\right) dx = 0.364 \bar{m} L \ddot{u}_g(t) \quad (d)$$

Bỏ qua lực dọc trục, phương trình cân bằng dao động:

$$0.228 \bar{m} L \ddot{Z}(t) + \frac{\pi^4 EI}{32 L^3} Z(t) = 0.364 \bar{m} L \ddot{u}_g(t) \quad (e)$$

Nếu xét lực dọc trục N thì ta có độ cứng hình học suy rộng:

$$k_G^* = N \int_0^L (\psi')^2 dx = N \int_0^L \left(\frac{\pi}{2L} \sin \frac{\pi x}{2L}\right)^2 dx = \frac{N \pi^2}{8L} \quad (f)$$

Độ cứng suy rộng kết hợp:

$$\bar{k}^* = k^* - k_G^* = \frac{\pi^4 EI}{32 L^3} - \frac{N \pi^2}{8L} \quad (g)$$

Vì vậy tải trọng tới hạn mất ổn định thu được khi cho độ cứng kết hợp bằng 0 là:

$$N_{cr} = \frac{\pi^4 EI}{32 L^3} \frac{8L}{\pi^2} = \frac{\pi^2 EI}{4 L^3} \quad (h)$$

Đây là tải trọng mất ổn định thật sự cho cột consol chịu tải trọng phân bố đều, bởi vì hàm dạng được rút ra từ (a) là dạng mất ổn định thật của kết cấu. Thay (h) vào (f) ta có thể biểu diễn độ cứng hình học bởi:

$$k_G^* = \frac{\pi^4 EI}{32 L^3} \frac{N}{N_{cr}} \quad (i)$$

thay vào (e) ta có phương trình cân bằng bao gồm ảnh hưởng của lực dọc trục là:

$$0.228 \bar{m} L \ddot{Z}(t) + \frac{\pi^4 EI}{32 L^3} \left(1 - \frac{N}{N_{cr}} \right) Z(t) = 0.364 \bar{m} L \ddot{u}_g(t) \quad (j)$$

Do đó, bất kỳ hình dạng nào thỏa mãn điều kiện biên hình học của kết cấu đều được rút ra từ hàm dạng $\psi(x)$. Nếu hàm này được

cho bởi dạng *parabolic* $\psi(x) = \frac{x^2}{L^2}$

Khi này độ cứng đàn hồi suy rộng trở thành:

$$k^* = EI \int_0^L \left(\frac{2}{L^2} \right)^2 dx = \frac{4EI}{L^3}$$

và độ cứng hình học suy rộng:

$$k_G^* = N \int_0^L \left(\frac{2x}{L^2} \right)^2 dx = \frac{4}{3} \frac{N}{L}$$

Trong trường hợp này, tải trọng tới hạn được rút ra từ $k^* = k_G^*$ là:

$$N_{cr} = \frac{4EI}{L^3} \frac{3L}{4} = \frac{3EI}{L^2} \quad (l)$$

Giá trị này lớn hơn 21% so với giá trị từ (h).

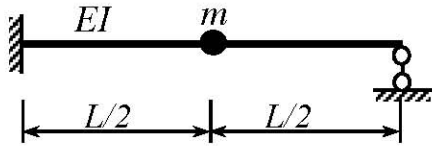
BÀI TẬP CHƯƠNG 2

1. Xác định tần số dao động tự nhiên của hệ ở Hình 2.37.

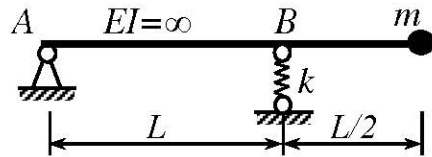
Đáp số: $\omega = \sqrt{\frac{768EI}{7mL^3}}$

2. Xác định tần số dao động tự nhiên của hệ ở Hình 2.38. Cho biết dầm có độ cứng $EI = \infty$, độ cứng đàn hồi của lò xo tại B là $k = 50 \text{ kN/m}$, bỏ qua trọng lượng bản thân của dầm.

Đáp số: $\omega = \frac{2}{3} \sqrt{\frac{k}{m}}$

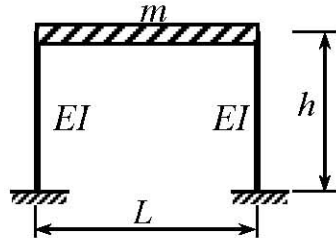


Hình 2.37



Hình 2.38

3. Xác định tần số dao động tự nhiên của hệ ở Hình 2.39. Bỏ qua trọng lượng bản thân các thanh đứng, thanh ngang có độ cứng vô cùng và thanh đứng có độ cứng EI .



Hình 2.39

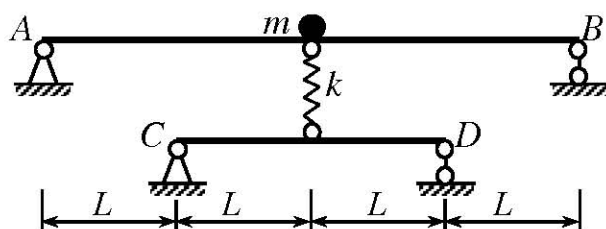
Đáp số: $\omega = \sqrt{\frac{24EI}{mh^3}}$

4. Xác định tần số dao động riêng của hệ có một khối lượng tập trung cho như Hình 2.40, bỏ qua trọng lượng bản thân dầm. Cho biết dầm AB có độ cứng EI và thanh CD có độ cứng $2EI$, lò xo có độ cứng $k = EI/8L^3$

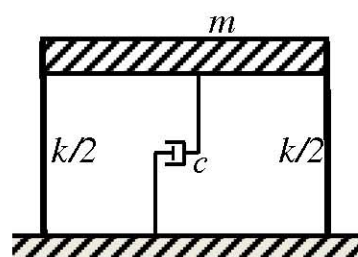
Đáp số: $\omega = \sqrt{\frac{57EI}{388mL^3}}$

5. Cho hệ một bậc tự do dao động tự do như *Hình 2.41* với khối lượng $m = 200\text{kg}$. Cho biết tại thời điểm $t = 0$ chuyển vị đo được là 1.2cm , tại thời điểm $t = 0.64\text{s}$ chuyển vị của hệ đạt giá trị cực đại là 0.86cm . Hãy xác định:

- Độ cứng của hệ k .
- Hệ số cản c .
- Tỷ số cản ξ .



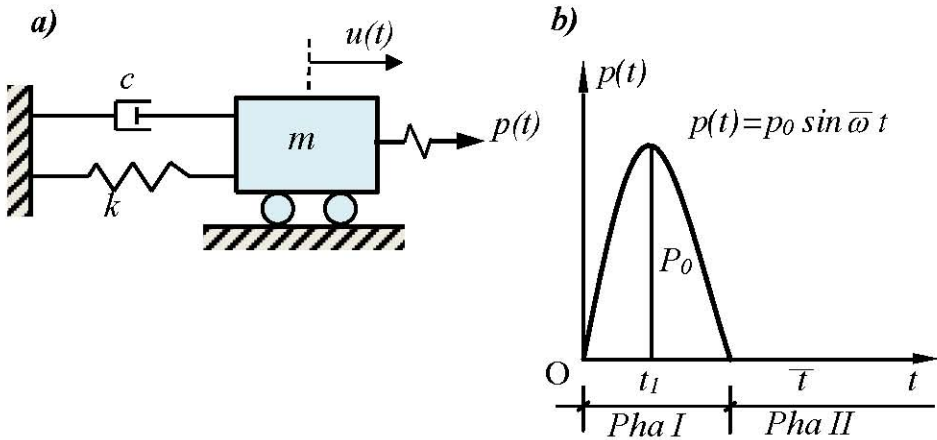
Hình 2.40



Hình 2.41

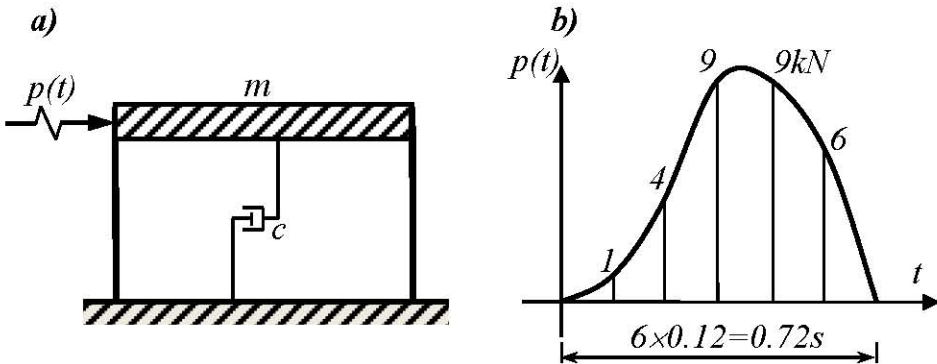
6. Cho hệ một bậc tự do dao động tự do với khối lượng $m = 2\text{ tấn}$, độ cứng $k = 4000\text{kN/m}$. Cho biết tại thời điểm $t = 0$ chuyển vị đo được là 0.7cm và vận tốc là 5.6cm/s . Hãy xác định chuyển vị và vận tốc của hệ tại thời điểm $t = 1.0\text{s}$ khi:

- Hệ không cản $c = 0$.
 - Hệ có cản $c = 280\text{ kN/m}$.
7. Cho hệ một bậc tự do dao động chịu tác dụng tải trọng xung hình sin như *Hình 2.42*. Cho biết khối lượng hệ $m = 2\text{ tấn}$, độ cứng $k = 1000\text{kN/m}$. Cho biết $t_1 = 0.15\text{s}$ và $p_0 = 15\text{ kN}$. Hãy xác định:
- Thời điểm xảy ra chuyển vị lớn nhất trong hệ.
 - Lực đàn hồi lớn nhất trong hệ.



Hình 2.42

8. Cho hệ một bậc tự do dao động có cản chịu tải trọng bất kỳ như Hình 2.43. Tính toán lực đàn hồi $f_s(t)$ trong thời gian $0 < t < 0.72s$ bằng phương pháp số với tích phân Duhamel bằng cách dùng phương pháp Simpson với $\Delta\tau = 0.12s$. Cho biết hệ số cản $c=0.4 \text{ kN.s/m}$, $m = 0.2 \text{ kN.s}^2/\text{m}$; $k = 8 \text{ kN/m}$.



Hình 2.43 Hệ chịu tải trọng bất kỳ

Chương 3

HỆ NHIỀU BẬC TỰ DO

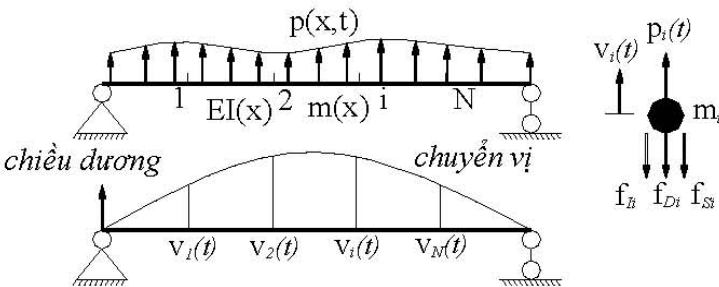
3.1 THIẾT LẬP PHƯƠNG TRÌNH CHUYỂN ĐỘNG

3.1.1 Lựa chọn bậc tự do

Thực tế kết cấu thường là hệ phân bố và có vô hạn bậc tự do. Đưa về sơ đồ một bậc tự do chỉ thích hợp trong một số trường hợp đặc biệt, khi hệ hầu như chỉ dao động với một dạng nhất định. Vì vậy, để thu được kết quả chính xác hơn, ta phải đưa hệ kết cấu về hệ rời rạc nhiều bậc tự do. Số bậc tự do được chọn dựa vào từng bài toán cụ thể. Thông thường có hai cách chọn số bậc tự do cho hệ:

- Chọn biên độ dao động tại một số điểm rời rạc: bao gồm phương pháp *dồn khối lượng* và phương pháp *phần tử hữu hạn* (*Finite element method*) để rời rạc hóa.
- Chọn tọa độ suy rộng là biên độ của một số kiểu biến dạng của hệ.

3.1.2 Phương trình cân bằng động



Hình 3.1. Hệ nhiều bậc tự do và các lực tác dụng

Để đơn giản ta xét hệ liên tục như *Hình 3.1*, với các bậc tự do là chuyển vị tại các điểm $1, 2, 3, \dots, N$.

Tại mỗi điểm nút có các lực tác dụng: tải trọng $p_i(t)$, lực quán tính f_{Ii} , lực cản f_{Di} và lực đàn hồi f_{Si} . Ta có phương trình cân bằng tại nút i :

$$f_{Ii} + f_{Di} + f_{Si} = p_i(t) \quad (3.1)$$

trong đó $i = 1, 2, 3, \dots, n$.

Phương trình (3.1) có thể viết lại dưới dạng ma trận:

$$\mathbf{f}_I + \mathbf{f}_D + \mathbf{f}_S = \mathbf{p}(t) \quad (3.2)$$

$$\text{trong đó } \mathbf{f}_I = \begin{Bmatrix} f_{I1} \\ f_{I2} \\ \vdots \\ f_{In} \end{Bmatrix}, \mathbf{f}_D = \begin{Bmatrix} f_{D1} \\ f_{D2} \\ \vdots \\ f_{Dn} \end{Bmatrix}, \mathbf{f}_S = \begin{Bmatrix} f_{S1} \\ f_{S2} \\ \vdots \\ f_{Sn} \end{Bmatrix} \text{ và } \mathbf{p}(t) = \begin{Bmatrix} p_1(t) \\ p_2(t) \\ \vdots \\ p_n(t) \end{Bmatrix}.$$

a) Lực đàn hồi

Dùng nguyên lí cộng tác dụng, ta có:

$$f_{Si} = k_{i1}v_1 + k_{i2}v_2 + \dots + k_{in}v_n \quad (3.3)$$

trong đó $i = 1 \dots n$ và k_{ij} là lực tại nút i do chuyển vị $v_j = 1$ gây ra.

Chú ý: lực đàn hồi trong trường hợp này cân bằng với lực nút nhằm duy trì đường đàn hồi, nghĩa là ngược chiều với lực nút.

Dạng ma trận của phương trình (3.3):

$$\begin{Bmatrix} f_{S1} \\ f_{S2} \\ \vdots \\ f_{Sn} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & \dots & k_{1n} \\ k_{21} & k_{22} & \dots & k_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ k_{n1} & k_{n2} & \dots & k_{nn} \end{bmatrix} \times \begin{Bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{Bmatrix} \quad (3.4)$$

hay
$$\mathbf{f}_s = \mathbf{K}\mathbf{v} \quad (3.5)$$

trong đó: $\mathbf{K}$ được gọi là ma trận độ cứng của kết cấu (*Stiffness matrix*).

b) Lực cân - cũng tương tự như lực đàn hồi, ta có phương trình:

$$\begin{Bmatrix} f_{D1} \\ f_{D2} \\ \vdots \\ f_{Dn} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ c_{n1} & c_{n2} & \cdots & c_{nn} \end{bmatrix} \times \begin{Bmatrix} \dot{v}_1 \\ \dot{v}_2 \\ \vdots \\ \dot{v}_n \end{Bmatrix} \quad (3.6)$$

trong đó c_{ij} là lực tại nút i do $\dot{v}_j = 1$ gây ra và được gọi là hệ số ảnh hưởng cản.

Phương trình (3.6) có thể viết thành:

$$\mathbf{f}_D = \mathbf{C}\dot{\mathbf{v}} \quad (3.7)$$

trong đó $\mathbf{C}$ là ma trận cản (*Damping matrix*).

c) Lực quán tính

$$\begin{Bmatrix} f_{I1} \\ f_{I2} \\ \vdots \\ f_{In} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} & \cdots & m_{1n} \\ m_{21} & m_{22} & \cdots & m_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ m_{n1} & m_{n2} & \cdots & m_{nn} \end{bmatrix} \times \begin{Bmatrix} \ddot{v}_1 \\ \ddot{v}_2 \\ \vdots \\ \ddot{v}_n \end{Bmatrix} \quad (3.8)$$

trong đó m_{ij} là lực tại nút i do $\ddot{v}_j = 1$ gây ra và được gọi là hệ số ảnh hưởng khối lượng.

Phương trình (3.8) có thể viết thành:

$$\mathbf{f}_I = \mathbf{M}\ddot{\mathbf{v}} \quad (3.9)$$

trong đó $\mathbf{M}$ là ma trận khối lượng (*Mass matrix*).

Thế phương trình (3.5), (3.7), (3.9) vào phương trình (3.2) ta thu được hệ n phương trình vi phân chuyển động viết dưới dạng ma trận:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{v}} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{v}} + \mathbf{K}\mathbf{v} = \mathbf{p}(t) \quad (3.10)$$

Phương trình trên là phương trình mang tính chất tổng quát của bài toán động lực học, trong đó $\mathbf{p}(t)$ là vectơ tải trọng ngoài, tùy thuộc vào $\mathbf{p}(t)$ mà ta có các trường hợp phân tích động lực học của hệ: phân tích dao động tự do, phân tích phản ứng của hệ với tải trọng động như tải trọng gió, động đất, sóng biển...

3.1.3 Ảnh hưởng của lực dọc nén

Lực dọc làm tăng thêm chuyển vị nút, nên sẽ có vai trò như lực nút tác dụng theo chiều của chuyển vị nút, ký hiệu bởi ma trận $\mathbf{f}_G$.

Khi này phương trình cân bằng nút (3.2) trở thành:

$$\mathbf{f}_I + \mathbf{f}_D + \mathbf{f}_S - \mathbf{f}_G = \mathbf{p}(t) \quad (3.11)$$

Lực nút $\mathbf{f}_G$ tương đương với vai trò của lực dọc, được biểu diễn bởi các hệ số cứng hình học (*Geometric stiffness coefficients*) như sau:

$$\begin{Bmatrix} f_{G1} \\ f_{G2} \\ \vdots \\ f_{Gn} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{G11} & k_{G12} & \cdots & k_{G1n} \\ k_{G21} & k_{G22} & \cdots & k_{G2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ k_{Gn1} & k_{Gn2} & \cdots & k_{Gnn} \end{bmatrix} \times \begin{Bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{Bmatrix} \quad (3.12)$$

trong đó k_{Gij} là lực tại nút i do $v_j=1$ gây ra và có xét đến ảnh hưởng của lực dọc.

Phương trình (3.12) có thể viết thành:

$$\mathbf{f}_G = \mathbf{K}_G \mathbf{v} \quad (3.13)$$

trong đó $\mathbf{K}_G$ là ma trận độ cứng hình học (*Geometric stiffness matrix*).

Phương trình (3.10) trở thành:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{v}} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{v}} + \mathbf{K}\mathbf{v} - \mathbf{K}_G\mathbf{v} = \mathbf{p}(t) \quad (3.14)$$

hay
$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{v}} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{v}} + \bar{\mathbf{K}}\mathbf{v} = \mathbf{p}(t) \quad (3.15)$$

trong đó $\bar{\mathbf{K}} = \mathbf{K} - \mathbf{K}_G$ là ma trận độ cứng tổng hợp (*Combined stiffness matrix*).

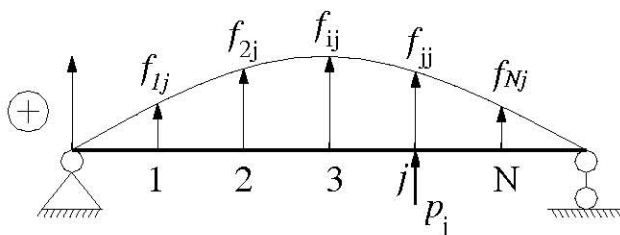
Như vậy, lực dọc làm giảm độ cứng của kết cấu, nghĩa là làm cho kết cấu mềm đi.

3.2 XÁC ĐỊNH CÁC MA TRẬN TÍNH CHẤT CỦA HỆ KẾT CẤU

3.2.1 Tính chất đàn hồi

3.2.1.1 Độ mềm của kết cấu

Gọi f_{ij} là chuyển vị tại i do $p_j = 1$ gây ra. Tập hợp các f_{ij} ($i = 1 \dots n$) tạo nên đường đàn hồi do $p_j = 1$ gây ra và được minh họa trên hình 3.2. Chiều dương của chuyển vị và lực theo chiều dương của trục tọa độ, nghĩa là hướng lên.



Hình 3.2. Đường đàn hồi và các lực tại nút

Chuyển vị tại điểm i do các lực p_j ($j=1...n$) được xác định theo nguyên lý cộng tác dụng:

$$v_i = f_{i1}p_1 + f_{i2}p_2 + \dots + f_{in}p_n \quad (3.16)$$

với $i=1...n$.

Phương trình (3.16) có thể viết dưới dạng ma trận:

$$\begin{Bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} f_{11} & f_{12} & \dots & f_{1n} \\ f_{21} & f_{22} & \dots & f_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ f_{n1} & f_{n2} & \dots & f_{nn} \end{bmatrix} \times \begin{Bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ \vdots \\ p_n \end{Bmatrix} \quad (3.17)$$

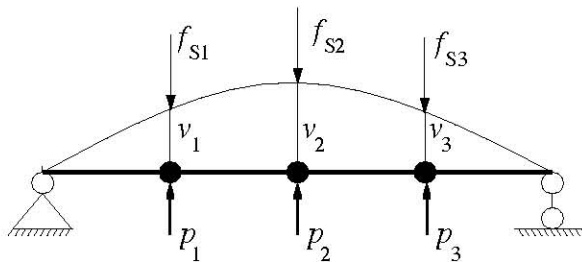
hay $\mathbf{v} = \mathbf{f}\mathbf{p}$ (3.18)

trong đó: $\mathbf{f}$ là ma trận độ mềm của kết cấu (*Flexibility matrix*).

$\mathbf{p}$ là ma trận tải trọng nút, có cùng chiều dương với chuyển vị nút.

Lực đàn hồi cân bằng với lực nút $\mathbf{p} = \mathbf{f}_s$ và được minh họa trên hình 3.3, khi đó phương trình (3.18) trở thành:

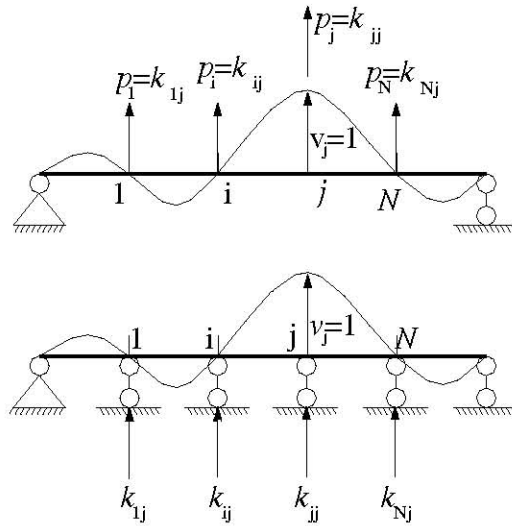
$$\mathbf{v} = \mathbf{f}\mathbf{f}_s \quad (3.19)$$



Hình 3.3. Lực đàn hồi và các lực tại nút

3.2.1.2 Độ cứng của kết cấu

Hệ số độ cứng k_{ij} được minh họa trên Hình 3.4 là các lực nút do chuyển vị $v_j=1$ gây ra (các chuyển vị khác $v_i=1$ với $i \neq j$). Ngoài ra, k_{ij} chính là phản lực tại nút nếu đặt thêm các liên kết.



Hình 3.4. Hệ số độ cứng và các lực tại nút

Thông thường ma trận độ cứng $\mathbf{K}$ được suy ra từ ma trận độ mềm $\mathbf{f}$ hoặc dùng phương pháp phần tử hữu hạn.

3.2.1.3 Các khái niệm cơ sở

Thế năng biến dạng:

$$U = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n p_i v_i = \frac{1}{2} \mathbf{p}^T \mathbf{v} = \frac{1}{2} \mathbf{v}^T \mathbf{p} \quad (3.20)$$

Thế phương trình (3.18) vào (3.20) ta thu được phương trình:

$$U = \frac{1}{2} \mathbf{p}^T \mathbf{f} \mathbf{p} \quad (3.21)$$

hoặc thế phương trình (3.5) vào (3.20), với chú ý rằng $\mathbf{p} = \mathbf{f}_s$, ta có:

$$U = \frac{1}{2} \mathbf{v}^T \mathbf{K} \mathbf{v} \quad (3.22)$$

Vì thế năng biến dạng $U > 0$ nên suy ra:

$$\mathbf{v}^T \mathbf{K} \mathbf{v} > 0 \text{ và } \mathbf{p}^T \mathbf{f} \mathbf{p} > 0 \quad (3.23)$$

Ma trận $\mathbf{K}$ và $\mathbf{f}$ thỏa phương trình (3.23) với mọi $\mathbf{v}$, $\mathbf{p} \neq 0$ nên là các ma trận xác định dương (*Positive definite*), không suy biến và nghịch đảo được.

Thiết lập mối quan hệ giữa $\mathbf{K}$ và $\mathbf{f}$, từ phương trình (3.5), ta có $\mathbf{f}_s = \mathbf{K} \mathbf{v}$ hay $\mathbf{K}^{-1} \mathbf{f}_s = \mathbf{v}$. Mặt khác, từ phương trình (3.19), ta có $\mathbf{v} = \mathbf{f} \mathbf{f}_s$. Suy ra:

$$\mathbf{f} = \mathbf{K}^{-1} \text{ hay } \mathbf{K} = \mathbf{f}^{-1} \quad (3.24)$$

Thông thường ta xác định ma trận độ cứng thông qua ma trận mềm theo phương trình (3.24).

Định lý Betti:

“Công khả dĩ của lực ở trạng thái (a) trên chuyển vị ở trạng thái (b) bằng công khả dĩ của lực ở trạng thái (b) trên chuyển vị ở trạng thái (a)”.

$$[\mathbf{p}_a]^T \mathbf{v}_b = [\mathbf{p}_b]^T \mathbf{v}_a \quad (3.25)$$

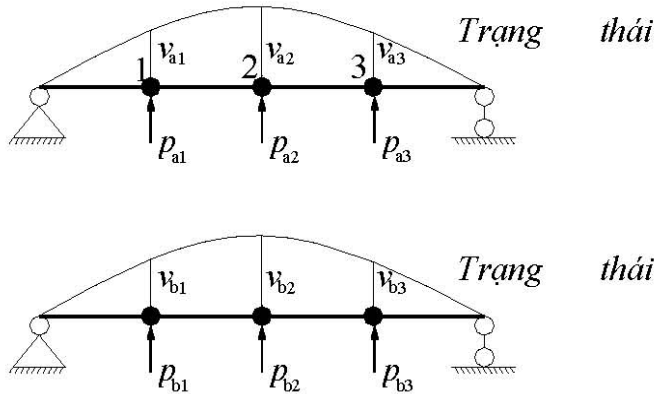
$$\text{hay} \quad [\mathbf{p}_a]^T \mathbf{f} \mathbf{p}_b = \left[[\mathbf{p}_b]^T \mathbf{f} \mathbf{p}_a \right]^T = [\mathbf{p}_a]^T \mathbf{f}^T \mathbf{p}_b \quad (3.26)$$

$$\text{Suy ra:} \quad \mathbf{f} = \mathbf{f}^T, \text{ nghĩa là ma trận đối xứng.} \quad (3.27)$$

Một cách tương tự ta cũng có ma trận độ cứng đối xứng:

$$\mathbf{K} = \mathbf{K}^T \quad (3.28)$$

Hình 3.5 minh họa cho công khả dĩ của lực ở trạng thái (a) và (b).



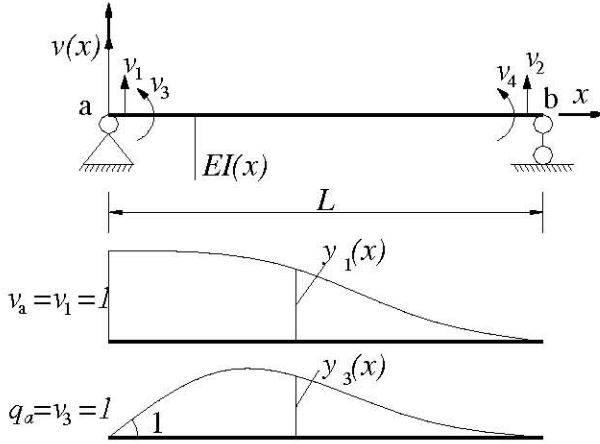
Hình 3.5. Công khả dĩ của lực ở trạng thái (a) và (b)

3.2.1.4 Thiết lập ma trận độ cứng bằng phương pháp phần tử hữu hạn

Hệ được quan niệm gồm nhiều phần tử nối với nhau tại một số hữu hạn nút. Tính chất của hệ được tìm bằng cách chồng chất các phần tử một cách thích hợp. Xét phần tử dầm thẳng có hai nút như hình 3.6. Mỗi nút có hai bậc tự do bao gồm chuyển vị thẳng và góc xoay.

Hàm dạng $\psi_i(x)$ chỉ gây ra chuyển vị $v_i = 1$, còn các chuyển vị nút khác đều bằng 0. Hàm $\psi_i(x)$ phải thỏa mãn điều kiện biên nhưng thường chọn hàm chuyển vị trong dầm có độ cứng EI là hằng số do chuyển vị nút $v_i = 1$ gây ra. Đó là các hàm đa thức *Hermit* bậc ba như sau:

$$\psi_1(x) = 1 - 3\left(\frac{x}{L}\right)^2 + 2\left(\frac{x}{L}\right)^3 \quad (3.29)$$



Hình 3.6. Phần tử dầm và các chuyển vị nút

$$\psi_2(x) = 3\left(\frac{x}{L}\right)^2 - 2\left(\frac{x}{L}\right)^3 \quad (3.30)$$

$$\psi_3(x) = x\left(1 - \frac{x}{L}\right)^2 \quad (3.31)$$

$$\psi_4(x) = \frac{x^2}{L}\left(\frac{x}{L} - 1\right) \quad (3.32)$$

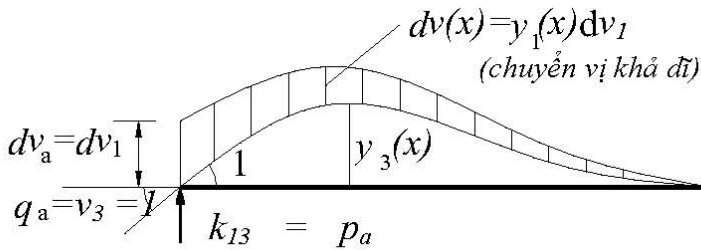
Dùng bốn hàm nội suy này, chuyển vị của dầm được xác định theo các chuyển vị nút:

$$v(x) = \psi_1(x)v_1 + \psi_2(x)v_2 + \psi_3(x)v_3 + \psi_4(x)v_4 \quad (3.33)$$

trong đó:

$$\begin{Bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} v_a \\ v_b \\ \theta_a \\ \theta_b \end{Bmatrix} \quad (3.34)$$

Hệ số cứng của phần tử là các phản lực nút do chuyển vị nút gây ra. Để đơn giản ta xét phần tử dầm như Hình 3.7. Hệ số k_{13} , tức là phản lực p_a trên Hình 3.7 được xác định như sau:



Hình 3.7. Hệ số độ cứng của phần tử dầm

Dùng nguyên lí công khả dĩ, ta có:

$$W_E = p_a \delta v_a = k_{13} \delta v_1 \quad (3.35)$$

Mômen nội lực do $\theta_a = 1$ gây ra là:

$$M(x) = EI(x) \psi_3''(x) \quad (3.36)$$

Công khả dĩ của nội lực:

$$W_I = \delta v_1 \int_0^L EI(x) \psi_1''(x) \psi_3''(x) dx \quad (3.37)$$

Cho $W_I = W_E$ ta suy ra:

$$k_{13} = \int_0^L EI(x) \psi_1''(x) \psi_3''(x) dx \quad (3.38)$$

Tổng quát hóa: $k_{ij} = \int_0^L EI(x) \psi_i''(x) \psi_j''(x) dx$ là độ cứng suy

rộng, vì $k_{ij} = k_{ji}$ nên ta có ma trận độ cứng đối xứng.

Với dầm có độ cứng EI là hằng số, ta có:

$$\begin{Bmatrix} f_{s1} \\ f_{s2} \\ f_{s3} \\ f_{s4} \end{Bmatrix} = \frac{2EI}{L^3} \begin{bmatrix} 6 & -6 & 3L & 3L \\ -6 & 6 & -3L & -3L \\ 3L & -3L & 2L^2 & L^2 \\ 3L & -3L & L^2 & 2L^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{Bmatrix} \quad (3.39)$$

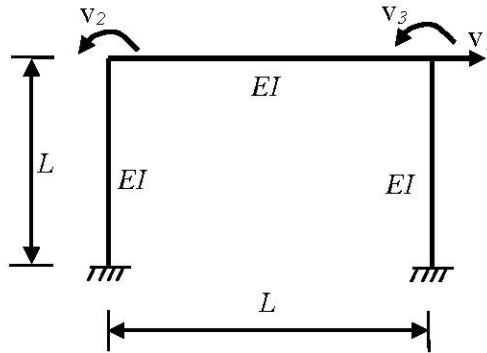
Nếu dầm có độ cứng $EI(x)$ thay đổi thì phương trình (3.39) là gần đúng. Độ chính xác sẽ cao hơn nếu ta chia dầm ra thành các phần tử nhỏ hơn.

Hệ số độ cứng k_{ij} của kết cấu bằng tổng các hệ số độ cứng tương ứng của các phần tử nối vào nút. Chẳng hạn, nếu các phần tử m, n, p cùng nối vào nút i thì hệ số cứng của kết cấu tại nút i là:

$$k_{ii} = k_{ii}^{(m)} + k_{ii}^{(n)} + k_{ii}^{(p)} \quad (3.40)$$

trong đó $k_{ii}^{(m)}, k_{ii}^{(n)}, k_{ii}^{(p)}$ là các hệ số độ cứng của phần tử đã biến đổi sang hệ tọa độ chung từ tọa địa phương.

Ví dụ 3.1: Xét hệ khung phẳng như *Hình 3.8*, gồm ba phần tử nối tại hai nút. Bỏ qua biến dạng dọc trục, hệ có ba bậc tự do: v_1, v_2 và v_3 . Xác định các hệ số độ cứng.



Hình 3.8. Hệ khung phẳng

Giải:

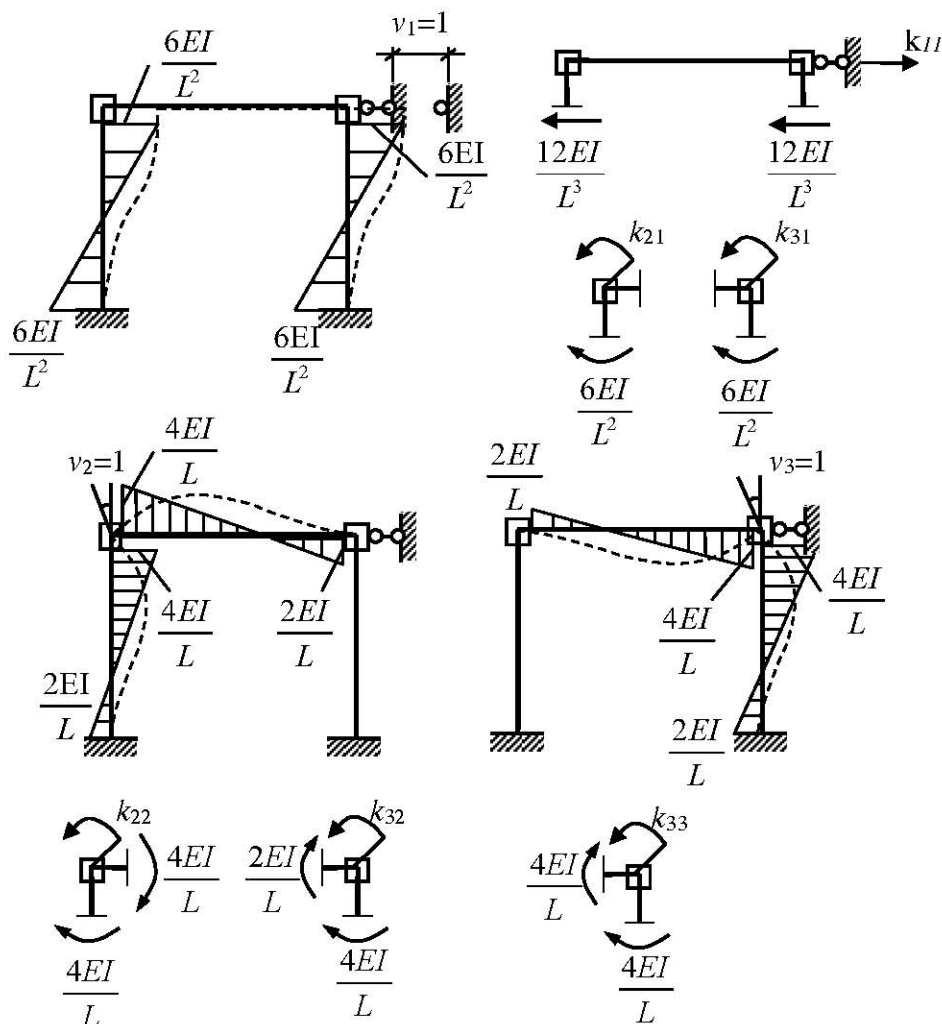
Các hệ số độ cứng của hệ được xác định bằng cách lần lượt cho các chuyển vị cưỡng bức đơn vị $v_i = 1$ được biểu diễn như *Hình 3.9* và lực nút ứng với các phần tử.

Ma trận độ cứng kết cấu:

$$k_{11} = \frac{24EI}{L^3}, \quad k_{21} = \frac{6EI}{L^2} \quad \text{và} \quad k_{31} = \frac{6EI}{L^2} \quad (3.41)$$

$$k_{33} = k_{22} = \frac{8EI}{L} \quad (3.42)$$

$$k_{32} = \frac{6EI}{L} \quad (3.43)$$



Hình 3.9. Hệ số độ cứng khung

Viết lại các hệ số trên dưới dạng ma trận, ta có:

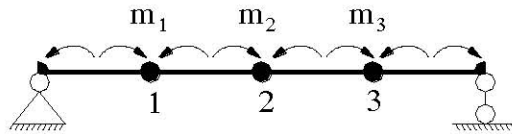
$$\begin{Bmatrix} f_{s1} \\ f_{s2} \\ f_{s3} \end{Bmatrix} = \frac{2EI}{L^3} \begin{bmatrix} 12 & 3L & 3L \\ 3L & 4L^2 & 3L^2 \\ 3L & 3L^2 & 4L^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{Bmatrix} \quad (3.44)$$

Chú ý: Bài toán động lực học của hệ phân bố thường đòi hỏi nhiều bậc tự do hơn so với bài toán tĩnh, do ảnh hưởng của lực quán tính. Tuy nhiên, khi đã chọn các bậc tự do cho bài toán động rồi thì việc xây dựng ma trận cũng giống như trường hợp bài toán tĩnh.

3.2.2 Tính chất khối lượng

3.2.2.1 Ma trận khối lượng thu gọn

Ta xem khối lượng phân bố của các phần tử được thu gọn về các nút theo nguyên tắc tĩnh học, ta có hệ gồm các khối lượng tập trung được biểu diễn như trên *Hình 3.10*.



Hình 3.10. Ma trận khối lượng thu gọn

Ma trận khối lượng thu gọn là ma trận đường chéo:

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} m_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & m_2 & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & m_N \end{bmatrix} \quad (3.45)$$

trong đó $m_{ij} = 0$ với $i \neq j$, vì gia tốc tại khối lượng nào chỉ gây ra lực quán tính tại khối lượng đó.

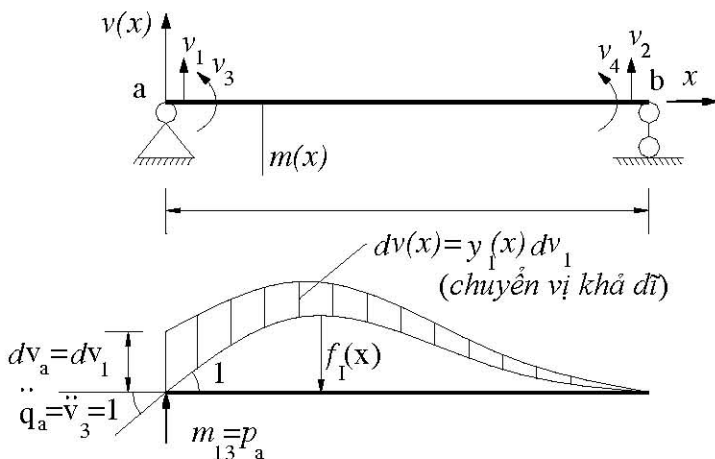
3.2.2.2 Ma trận khối lượng tương thích (Consistent mass matrix)

Xét phần tử dầm có hai bậc tự do mỗi nút như Hình 3.11. Dùng các hàm nội suy $\psi_i(x)$ như trong ma trận độ cứng. Giả sử dầm chịu tác dụng của gia tốc góc bằng đơn vị tại nút a , $\ddot{v}_3 = \ddot{\theta}_a = 1$, gia tốc chuyển động ngang của dầm sẽ là:

$$\ddot{v}(x) = \ddot{v}_3 \psi_3(x) \quad (3.46)$$

Lực quán tính có trị số:

$$f_I(x) = m(x)\ddot{v}(x) = m(x)\ddot{v}_3 \psi_3(x) \quad (3.47)$$



Hình 3.11. Phần tử dầm với hai bậc tự do mỗi nút

Cho dầm chịu chuyển vị khả dĩ $\delta v(x) = \psi_1(x) \delta v_1$. Cân bằng công khả dĩ của lực nút và lực quán tính, ta có:

$$p_a \delta v_a = \int_0^L f_I(x) \delta v(x) dx \quad (3.48)$$

hay

$$m_{13} = \int_0^L m(x) \psi_1(x) \psi_3(x) dx \quad (3.49)$$

Tổng quát: $m_{ij} = \int_0^L m(x)\psi_i(x)\psi_j(x)dx$ là khối lượng suy rộng. Vì

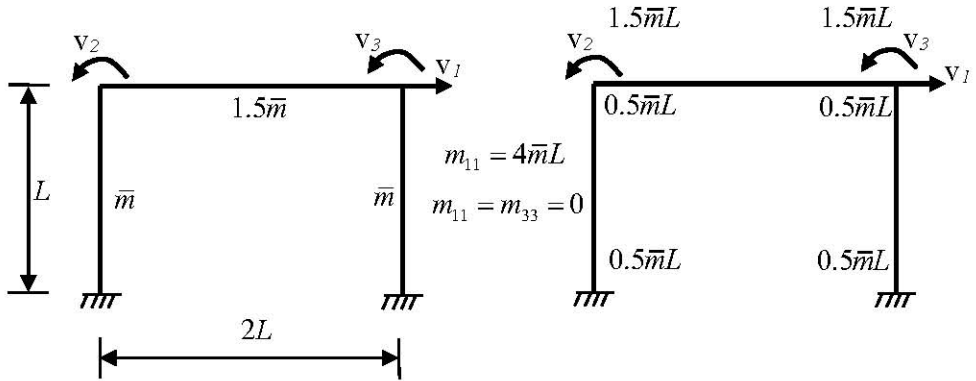
$m_{ij} = m_{ji}$ nên ma trận khối lượng tương thích đối xứng.

Nếu dầm có khối lượng phân bố đều thì ta có:

$$\begin{Bmatrix} f_{I1} \\ f_{I2} \\ f_{I3} \\ f_{I4} \end{Bmatrix} = \frac{ML}{420} \begin{bmatrix} 156 & 54 & 22L & -13L \\ 54 & 156 & 13L & -22L \\ 22L & 13L & 4L^2 & -3L^2 \\ -13L & -22L & -3L^2 & 4L^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{v}_1 \\ \ddot{v}_2 \\ \ddot{v}_3 \\ \ddot{v}_4 \end{Bmatrix} \quad (3.50)$$

Ma trận khối lượng của kết cấu cũng được “chồng chất” từ ma trận của phần tử, tương tự như ma trận cứng.

Ví dụ 3.2: Thành lập ma trận khối lượng cho kết cấu như Hình 3.12 theo hai phương pháp. Quá trình tính các hệ số khối lượng được chỉ rõ trên các Hình 3.12 và 3.13.



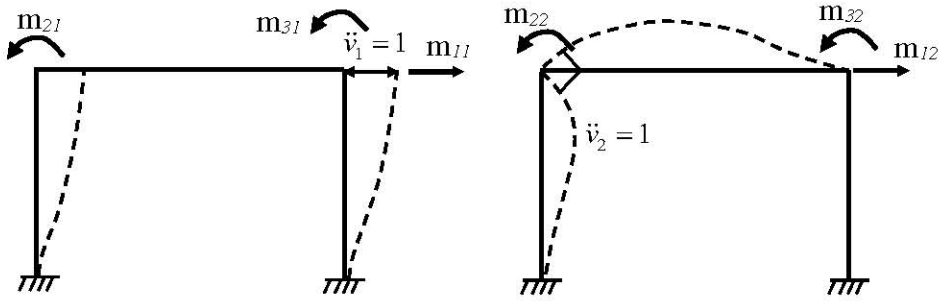
Hình 3.12. Hệ khung phẳng

Giải:

Ma trận khối lượng thu gọn:

$$\mathbf{M} = \frac{\bar{m}L}{210} \begin{bmatrix} 840 & & \\ & 0 & \\ & & 0 \end{bmatrix} \quad (3.51)$$

trong đó $m_{22} = m_{33} = 0$ vì giả thiết rằng khối lượng thu gọn không có quán tính xoay, tức là các gia tốc góc tại nút không gây ra mômen quán tính.



Hình 3.13. Hệ số ma trận khối lượng của khung

Các hệ số của ma trận khối lượng:

$$m_{11} = \frac{\bar{m}L}{420}(156 \times 2) + 1.5\bar{m} \times 2L = \frac{\bar{m}L}{210} 768 \quad (3.52)$$

$$m_{21} = m_{31} = \frac{\bar{m}L}{420}(22L) = \frac{\bar{m}L}{210} 11L \quad (3.53)$$

$$m_{22} = m_{33} = \frac{\bar{m}L}{420} 4L^2 + \frac{1.5\bar{m} \times 2L}{420} 4(2L)^2 = \frac{\bar{m}L}{210} 26L^2 \quad (3.54)$$

$$m_{32} = \frac{1.5\bar{m} \times 2L}{420} (-3) \times (2L)^2 = \frac{\bar{m}L}{210} (-18L)^2 \quad (3.55)$$

Do đó, ta thu được ma trận khối lượng tương thích:

$$\mathbf{M} = \frac{\bar{m}L}{210} \begin{bmatrix} 786 & 11L & 11L \\ 11L & 26L^2 & -18L^2 \\ 11L & -18L^2 & 26L^2 \end{bmatrix} \quad (3.56)$$

Nhận xét:

Bài toán động lực học ứng với ma trận khối lượng thu gọn đơn giản hơn vì:

- Ma trận $\mathbf{M}$ thu gọn dạng đường chéo, trong khi ma trận $\mathbf{M}$ tương thích có nhiều hệ số khác 0 ở ngoài đường chéo. Các hệ số của ma trận $\mathbf{M}$ thu gọn ứng với các chuyển vị xoay cũng bằng 0, càng làm cho bài toán đơn giản hơn.

- Dùng ma trận $\mathbf{M}$ thu gọn có thể loại bỏ các chuyển vị xoay, nhưng dùng ma trận $\mathbf{M}$ tương thích thì không thể loại bỏ được.

3.2.3 Tính chất cản

Hệ số cản của phần tử được xác định bởi phương pháp phần tử hữu hạn và được cho bởi công thức:

$$c_{ij} = \int_0^L c(x) \psi_i(x) \psi_j(x) dx \quad (3.57)$$

là hệ số cản suy rộng, trong đó $c(x)$ là tính chất cản phân bố của phần tử.

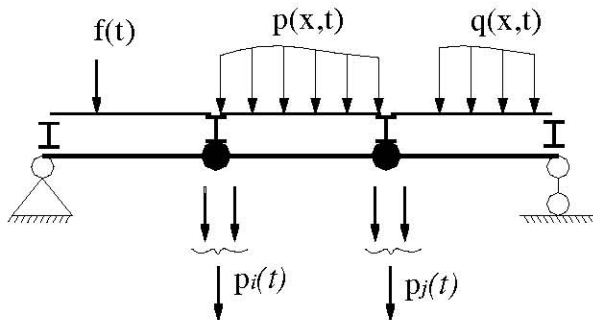
Ma trận cản kết cấu cũng được chồng chất từ ma trận cản của phần tử, tương tự ma trận độ cứng hoặc ma trận khối lượng. Tuy nhiên, để xác định hàm $c(x)$ trong thực tế thì không làm được. Thường tính cản của kết cấu xác định bởi thực nghiệm bằng tỉ số cản ξ .

3.2.4 Tải trọng

Nếu tải trọng tác dụng trên phần tử thì phải thay thế bằng tải trọng nút tương đương, dùng khái niệm lực suy rộng. Có hai phương pháp:

3.2.4.1 Tải trọng nút tương đương tĩnh học

Hình 3.14 mô tả hệ dầm có mắt truyền lực chịu các loại tải trọng tổng quát. Ta có thể xem như tải trọng đặt trên dầm phụ có mắt truyền lực đặt tại nút. Lực truyền vào nút sẽ thay thế cho tải trọng đặt trên phần tử. Như vậy hệ không truyền mômen tập trung vào nút.



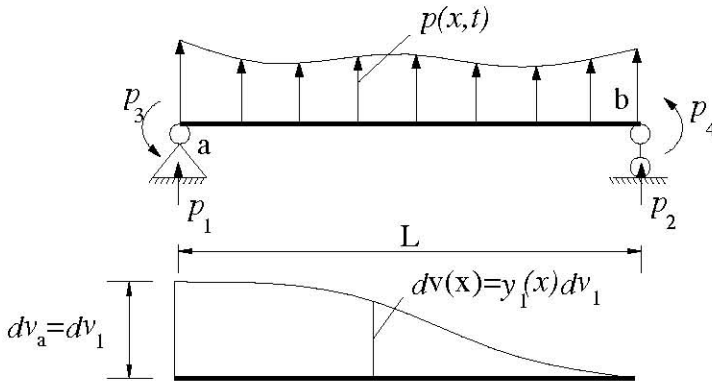
Hình 3.14. Tải trọng nút tương đương

3.2.4.2 Tải trọng nút tương thích

Tải trọng nút tương thích mô tả trên Hình 3.15 được tính theo nguyên lý chuyển vị khả dĩ, dùng các hàm nội suy $\psi_i(x)$ đã nói ở trên.

Ví dụ:

$$p_1(t) = \int_0^L p(x,t) \psi_1(x) dx \quad (3.58)$$



Tải trọng suy rộng

Hình 3.15. Tải trọng nút tương thích

Tổng quát:

$$p_i(t) = \int_0^L p(x, t) \psi_i(x) dx \quad \text{là tải trọng suy rộng} \quad (3.59)$$

Nếu tải trọng có dạng phân ly (trường hợp này thường gặp trong thực tế) như sau:

$$p(x, t) = \chi(x) \zeta(t) \quad (3.60)$$

thì lực nút suy rộng trở thành:

$$p_i(t) = \zeta(t) \int_0^L \chi(x) \psi_i(x) dx \quad (3.61)$$

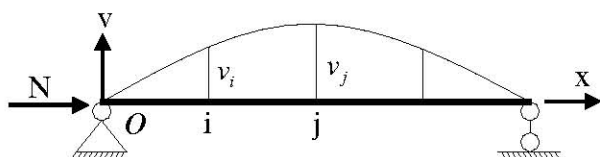
Chú ý: với các hàm nội suy $\psi_i(x)$ ($i = 1 \div 4$) ta có hai lực nút và hai mômen nút tại hai đầu dầm.

3.2.5 Độ cứng hình học

Độ cứng hình học thể hiện khuynh hướng làm tăng chuyển vị uốn của lực nén N . Hệ số độ cứng hình học chính là lực nút do N

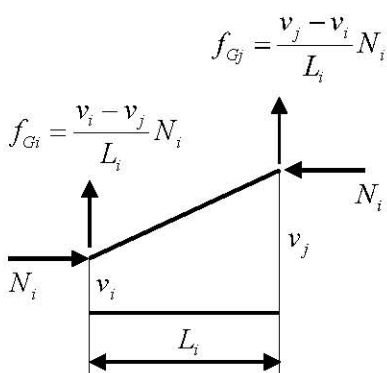
tạo ra. Giả thiết rằng lực nén N do tải trọng tĩnh gây ra là chủ yếu và phần do lực động gây ra có thể bỏ qua được. Vì vậy, coi N không đổi trong quá trình dao động. Nếu N thay đổi theo thời gian thì $\mathbf{K}_G$ cũng thay đổi theo thời gian và bài toán trở nên phi tuyến.

Xét hệ dầm chịu lực nén N được biểu diễn trên hình 3.16 và dùng xấp xỉ tuyến tính với một bậc tự do trên một nút.



Hình 3.16. Dầm chịu lực nén

Tách một phần tử trên dầm và xét các thành phần lực tác dụng được biểu diễn trên Hình 3.17. Giả sử lực dọc trong phần tử i là N_i . Ta có thể xem phần tử i thẳng thì lực nút f_{Gi} và f_{Gj} được xác định theo lực nén N_i .



Hình 3.17. Phần tử dầm

Viết lại các lực nút dưới dạng ma trận ta có:

$$\begin{Bmatrix} f_{Gi} \\ f_{Gj} \end{Bmatrix} = \frac{N_i}{l_i} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_i \\ v_j \end{Bmatrix} \quad (3.62)$$

Ma trận độ cứng hình học của kết cấu dầm:

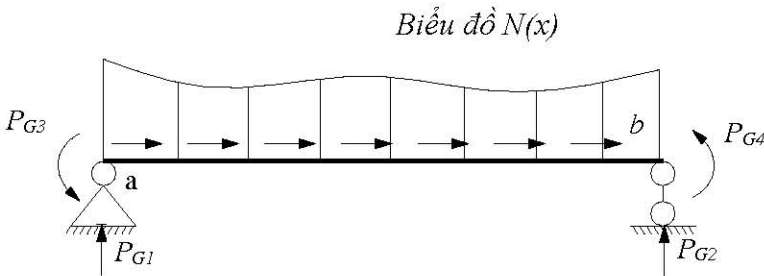
$$\begin{Bmatrix} f_{G1} \\ f_{G2} \\ f_{Gi} \\ f_{Gn} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{N_0}{l_0} + \frac{N_1}{l_1} & -\frac{N_1}{l_1} & 0 & 0 \\ -\frac{N_1}{l_1} & \frac{N_1}{l_1} + \frac{N_2}{l_2} & -\frac{N_2}{l_2} & 0 \\ 0 & -\frac{N_{i-1}}{l_{i-1}} & \frac{N_{i-1}}{l_{i-1}} + \frac{N_i}{l_i} & -\frac{N_i}{l_i} \\ 0 & 0 & -\frac{N_{n-1}}{L_{n-1}} & \frac{N_{n-1}}{L_{n-1}} + \frac{N_n}{L_n} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_i \\ v_n \end{Bmatrix} \quad (3.63)$$

có dạng ba vệt chéo. Viết phương trình trên dưới dạng ma trận:

$$\mathbf{f}_G = \mathbf{K}_G \mathbf{v} \quad (3.64)$$

Độ cứng hình học tương thích:

Xét dầm đơn giản chịu lực dọc $N(x)$ biến thiên theo trục thanh như Hình 3.18.



Hình 3.18. Dầm đơn giản

Dùng khái niệm phần tử hữu hạn, ta thu được công thức:

$$k_{Gij} = \int_0^L N(x) \psi'_i(x) \psi'_j(x) dx \quad (3.65)$$

Nếu phần tử có lực dọc $N(x) = N$ là hằng số, dùng các hàm nội suy trước đây, ta thu được ma trận độ cứng hình học phần tử:

$$\begin{Bmatrix} f_{G1} \\ f_{G2} \\ f_{G3} \\ f_{G4} \end{Bmatrix} = \frac{N}{30L} \begin{bmatrix} 36 & -36 & 3L & 3L \\ -36 & 36 & -3L & -3L \\ 3L & -3L & 4L^2 & -L^2 \\ 3L & -3L & -L^2 & 4L^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{Bmatrix} \quad (3.66)$$

$$\mathbf{K}_G^e = \frac{N}{30L} \begin{bmatrix} 36 & -36 & 3L & 3L \\ -36 & 36 & -3L & -3L \\ 3L & -3L & 4L^2 & -L^2 \\ 3L & -3L & -L^2 & 4L^2 \end{bmatrix} \quad (3.67)$$

với $\mathbf{K}_G^e$ là ma trận độ cứng của phần tử và là ma trận đối xứng.

Ma trận $\mathbf{K}_G$ của kết cấu suy ra từ $\mathbf{K}_G^e$ tương tự như ma trận $\mathbf{K}$ và $\mathbf{M}$.

3.2.6 Lựa chọn cách thiết lập ma trận tính chất kết cấu

Có hai cách tính gần đúng các ma trận khối lượng, ma trận độ cứng hình học và ma trận tải trọng:

- Phương pháp sơ cấp chỉ xét đến chuyển vị thẳng.
- Phương pháp tương thích có xét cả chuyển vị thẳng và chuyển vị xoay.

Về nguyên tắc, phương pháp tương thích cho độ chính xác cao hơn, vì xét đầy đủ và hệ thống hơn các phần năng lượng liên quan đến sự làm việc động của kết cấu. Tuy nhiên, trong thực tế thì độ chính xác của phương pháp tương thích không trội hơn nhiều so với phương pháp sơ cấp, nhưng khối lượng tính toán thì lớn hơn

nhiều, vì bậc tự do xoay đóng vai trò kém quan trọng so với chuyển vị thẳng. Ngoài ra, phương pháp sơ cấp dễ dàng hơn, vì các ma trận xuất phát dễ tính hơn và số bậc tự do phải xét cũng ít hơn.

Nếu phương pháp thu gọn khối lượng được dùng với ma trận độ cứng thiết lập bằng phương pháp phần tử hữu hạn (tức là kể đến bậc tự do chuyển vị xoay) thì có thể loại trừ các chuyển vị xoay này trong phương trình chuyển động. Khi đó ma trận độ cứng cũng được rút gọn lại, hay còn gọi là *Static condensation* (kích thước ma trận độ cứng thu nhỏ lại). Để minh họa, ta viết lại phương trình (3.4) trong đó đã sắp xếp lại các chuyển vị thành hai nhóm: v_t là thành phần chuyển vị thẳng và v_θ là thành phần chuyển vị xoay.

Phương trình chuyển động được viết lại dạng ma trận chia khối hay còn gọi là ma trận con:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K}_{tt} & \mathbf{K}_{t\theta} \\ \mathbf{K}_{\theta t} & \mathbf{K}_{\theta\theta} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{v}_t \\ \mathbf{v}_\theta \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{f}_{St} \\ \mathbf{f}_{S\theta} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{f}_{St} \\ \mathbf{0} \end{Bmatrix} \quad (3.68)$$

trong đó ma trận $\mathbf{f}_{S\theta} = \mathbf{0}$, tức là các mômen nút đàn hồi bằng 0, nếu tác động trên hệ chỉ là lực chứ không có mômen tập trung đặt ngay tại nút.

Trong phương trình (3.68), ta có thể biểu diễn các chuyển vị xoay v_θ theo chuyển vị thẳng v_t :

$$\mathbf{v}_\theta = -[\mathbf{K}_{\theta\theta}]^{-1} \mathbf{K}_{\theta t} \mathbf{v}_t \quad (3.69)$$

Phương trình thứ nhất của ma trận con suy ra từ phương trình (3.68):

$$\mathbf{K}_{tt} \mathbf{v}_t + \mathbf{K}_{t\theta} \mathbf{v}_\theta = \mathbf{f}_{St} \quad (3.70)$$

$$\left[\mathbf{K}_{tt} - \mathbf{K}_{t\theta} [\mathbf{K}_{\theta\theta}]^{-1} \mathbf{K}_{\theta t} \right] \mathbf{v}_t = \mathbf{f}_{St} \quad (3.71)$$

hay

$$\mathbf{K}_t \mathbf{v}_t = \mathbf{f}_{St} \quad (3.72)$$

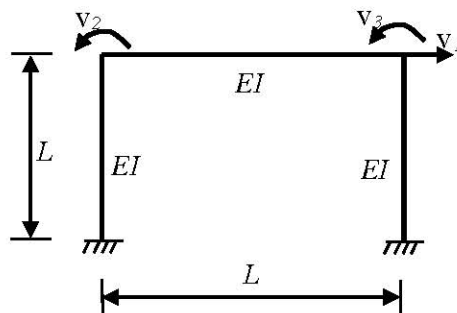
trong đó

$$\mathbf{K}_t = \mathbf{K}_{tt} - \mathbf{K}_{t\theta} [\mathbf{K}_{\theta\theta}]^{-1} \mathbf{K}_{\theta t} \quad (3.73)$$

là ma trận độ cứng tương ứng với chuyển vị thẳng hay còn gọi là ma trận độ cứng rút gọn.

Như vậy, các chuyển vị xoay trong phương pháp phần tử hữu hạn có thể loại trừ và số bậc tự do thực sự phải giải quyết giảm xuống. Đó là ưu điểm lớn của phương pháp khối lượng thu gọn.

Xét lại ví dụ 3.1 tính toán với hệ khung phẳng như Hình 3.19 được vẽ lại, ta có:



Hình 3.19. Hệ khung phẳng

$$\begin{Bmatrix} f_{s1} \\ f_{s2} \\ f_{s3} \end{Bmatrix} = \frac{2EI}{L^3} \begin{bmatrix} 12 & 3L & 3L \\ 3L & 4L^2 & 3L^2 \\ 3L & 3L^2 & 4L^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{Bmatrix} \quad (3.74)$$

Ngoài ra:

$$\mathbf{K}_{\theta\theta} = \frac{2EI}{L^3} \begin{bmatrix} 4L^2 & 3L^2 \\ 3L^2 & 4L^2 \end{bmatrix} = \frac{2EI}{L} \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \quad (3.75)$$

$$[\mathbf{K}_{\theta\theta}]^{-1} = \frac{L}{14EI} \begin{bmatrix} 4 & -3 \\ -3 & 4 \end{bmatrix} \quad (3.76)$$

Biểu diễn chuyển vị xoay theo chuyển vị thẳng từ phương trình (3.69):

$$\mathbf{v}_{\theta} = \begin{Bmatrix} v_2 \\ v_3 \end{Bmatrix} = -\frac{L}{14EI} \begin{bmatrix} 4 & -3 \\ -3 & 4 \end{bmatrix} \frac{2EI}{L^3} \begin{bmatrix} 3L \\ 3L \end{bmatrix} v_1 = -\frac{3}{7L} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} v_1 \quad (3.77)$$

Ma trận cứng rút gọn theo phương trình (3.73):

$$\mathbf{K}_t = \frac{2EI}{L^3} \left(12 - \begin{bmatrix} 3L & 3L \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{3}{7L} \\ \frac{3}{7L} \end{bmatrix} \right) = \frac{132EI}{7L^3} \quad (3.78)$$

3.3 DAO ĐỘNG TỰ DO KHÔNG CẢN

3.3.1 Phân tích tần số dao động

Từ phương trình (3.10), phân tích dao động tự do nên vector tải trọng ngoài $\mathbf{p}(t) = 0$, ta có:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{v}}(t) + \mathbf{C}\dot{\mathbf{v}}(t) + \mathbf{K}\mathbf{v}(t) = \mathbf{0} \quad (3.79)$$

Bỏ qua thành phần lực cản $\mathbf{C} = 0$, ta có:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{v}}(t) + \mathbf{K}\mathbf{v}(t) = \mathbf{0} \quad (3.80)$$

Do tính chất tuần hoàn nên chọn nghiệm có dạng:

$$\mathbf{v}(t) = \hat{\mathbf{v}} \sin(\omega t + \theta) \quad (3.81)$$

trong đó $\mathbf{v}(t)$ thể hiện dạng dao động và $|\hat{\mathbf{v}}|$ là biên độ dao động.

$$\ddot{\mathbf{v}}(t) = -\omega^2 \hat{\mathbf{v}} \sin(\omega t + \theta) \quad (3.82)$$

Thế vào phương trình (3.80) trên ta có:

$$-\omega^2 \mathbf{M} \hat{\mathbf{v}} \sin(\omega t + \theta) + \mathbf{K} \hat{\mathbf{v}} \sin(\omega t + \theta) = \mathbf{0} \quad (3.83)$$

hay

$$[\mathbf{K} - \omega^2 \mathbf{M}] \hat{\mathbf{v}} = \mathbf{0} \quad (3.84)$$

Vì $\hat{\mathbf{v}} \neq \mathbf{0}$ nên định thức của ma trận vuông $N \times N$ phải triệt tiêu:

$$\det[\mathbf{K} - \omega^2 \mathbf{M}] = 0 \quad (3.85)$$

Đây là phương trình đại số bậc N , do đó có N nghiệm $\omega_1^2, \omega_2^2, \omega_3^2, \dots, \omega_n^2$. Lý thuyết ma trận chứng minh: ma trận vuông thực, đối xứng và xác định dương thì có các trị riêng thực và dương.

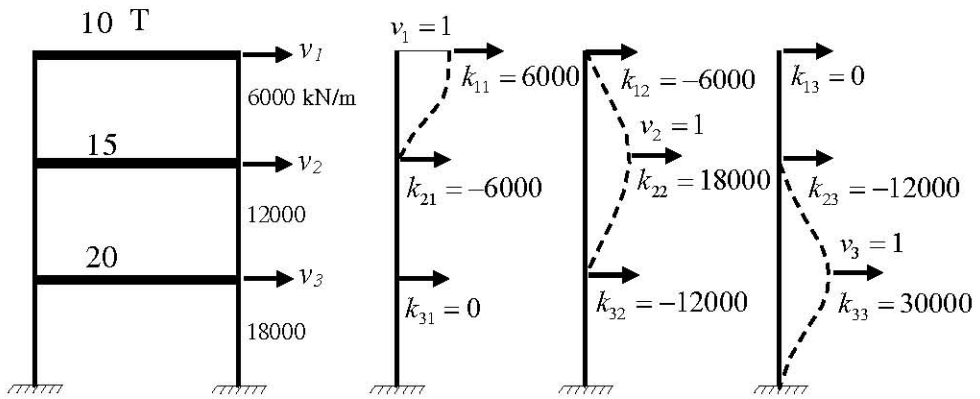
Vectơ tần số riêng như sau:

$$\boldsymbol{\omega} = \begin{Bmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \vdots \\ \omega_N \end{Bmatrix} \quad (3.86)$$

Từ ω_i ta sẽ tìm được chu kì hay tần số dao động tự nhiên của kết cấu:

$$T = \frac{2\pi}{\omega} \text{ và } f = \frac{1}{T} \quad (3.87)$$

Ví dụ 3.3: Tính tần số dao động riêng của khung ba tầng sàn cứng có các khối lượng và độ cứng cho trên Hình 3.20. Các hệ số độ cứng cũng được diễn tả trên hình.



Hình 3.20. Hệ khung phẳng ba tầng

Giải:

Các ma trận của khung:

$$\mathbf{M} = 10^4 \begin{bmatrix} 1.0 & 0 & 0 \\ 0 & 1.5 & 0 \\ 0 & 0 & 2.0 \end{bmatrix} (kg) \quad (3.88)$$

$$\mathbf{K} = 6 \times 10^6 \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 3 & -2 \\ 0 & -2 & 5 \end{bmatrix} (N/m) \quad (3.89)$$

Phương trình đặc trưng (3.85):

$$\begin{aligned} \mathbf{K} - \omega^2 \mathbf{M} &= 600 \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 3 & -2 \\ 0 & -2 & 5 \end{bmatrix} - \omega^2 \begin{bmatrix} 1.0 & & 0 \\ & 1.5 & \\ 0 & & 2.0 \end{bmatrix} \\ &= 600 \begin{bmatrix} 1-B & -1 & 0 \\ -1 & 3-1.5B & -2 \\ 0 & -2 & 5-2B \end{bmatrix} = 0 \end{aligned} \quad (3.90)$$

với $B = \frac{\omega^2}{600}$.

Rút gọn phương trình (3.90), ta thu được:

$$B^3 - 5.5B^2 + 7.5B - 2 = 0 \quad (3.91)$$

Nghiệm của phương trình (3.91) là:

$$\begin{cases} B_1 = 0.351 \\ B_2 = 1.610 \\ B_3 = 3.540 \end{cases} \quad (3.92)$$

Do đó, tần số dao động của hệ:

$$\begin{cases} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{cases} = \begin{cases} 14,5 \\ 31,1 \\ 46,1 \end{cases} (rad / s) \quad (3.93)$$

3.3.2 Phân tích hình dạng mode của dao động

Từ phương trình (3.84), ứng với mỗi tần số ω_n ta có một vector riêng $\hat{\mathbf{v}}_n$. Nhưng vì định thức (3.85) triệt tiêu, nên hạng của ma trận chỉ còn $N-1$, do đó chỉ có $N-1$ thành phần của $\hat{\mathbf{v}}$ độc lập. Thường chọn thành phần đầu tiên $\hat{\mathbf{v}}_{1n} = 1$, khi đó vector chuyển vị trở thành:

$$\hat{\mathbf{v}}_n = \begin{Bmatrix} \hat{v}_{1n} \\ \hat{v}_{2n} \\ \vdots \\ \hat{v}_{Nn} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1 \\ \hat{v}_{2n} \\ \vdots \\ \hat{v}_{Nn} \end{Bmatrix} \quad (3.94)$$

Đặt ma trận:

$$\mathbf{E}^{(n)} = \mathbf{K} - \omega_n^2 \mathbf{M} \quad (3.95)$$

Phương trình (3.84) được viết lại:

$$\begin{bmatrix} e_{11}^{(n)} & e_{21}^{(n)} & \cdots & e_{N1}^{(n)} \\ e_{21}^{(n)} & e_{22}^{(n)} & \cdots & e_{2N}^{(n)} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ e_{N1}^{(n)} & e_{N2}^{(n)} & \cdots & e_{NN}^{(n)} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 1 \\ \hat{v}_{2n} \\ \vdots \\ \hat{v}_{Nn} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (3.96)$$

Viết lại phương trình (3.96) dạng kí hiệu dùng ma trận con:

$$\begin{bmatrix} e_{11}^{(n)} & \mathbf{E}_{10}^{(n)} \\ \mathbf{E}_{01}^{(n)} & \mathbf{E}_{00}^{(n)} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 1 \\ \hat{\mathbf{v}}_{0n} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ \mathbf{0} \end{Bmatrix} \quad (3.97)$$

Tương đương với hai phương trình:

$$\mathbf{E}_{01}^{(n)} + \mathbf{E}_{00}^{(n)} \hat{\mathbf{v}}_{0n} = \mathbf{0} \quad (3.98)$$

$$e_{11}^{(n)} + \mathbf{E}_{10}^{(n)} \hat{\mathbf{v}}_{0n} = 0 \quad (3.99)$$

Giải hệ phương trình (3.98) và (3.99) trên ta thu được:

$$\hat{\mathbf{v}}_{0n} = -[\mathbf{E}_{00}^{(n)}]^{-1} \mathbf{E}_{01}^{(n)} \quad (3.100)$$

Dạng dao động thứ n được định nghĩa bởi vectơ không thứ nguyên như sau:

$$\boldsymbol{\varphi}_n = \begin{Bmatrix} \varphi_{1n} \\ \varphi_{2n} \\ \vdots \\ \varphi_{Nn} \end{Bmatrix} = \frac{1}{\hat{v}_{kn}} \begin{Bmatrix} 1 \\ \hat{v}_{2n} \\ \vdots \\ \hat{v}_{Nn} \end{Bmatrix} \quad (3.101)$$

với $\hat{v}_{kn}$ là thành phần chuyển vị mốc để so sánh.

Ma trận dạng dao động (*Mode shape matrix*) là tập hợp của N vectơ dạng dao động:

$$\boldsymbol{\Phi} = \boldsymbol{\varphi}_1 \times \boldsymbol{\varphi}_2 \times \dots \times \boldsymbol{\varphi}_n = \begin{bmatrix} \varphi_{11} & \varphi_{12} & \cdots & \varphi_{1N} \\ \varphi_{21} & \varphi_{22} & \cdots & \varphi_{2N} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \varphi_{N1} & \varphi_{N2} & \cdots & \varphi_{NN} \end{bmatrix} \quad (3.102)$$

Như vậy khi xác định được $\boldsymbol{\varphi}_i$ thì ta sẽ biết được hình dạng dao động của mode thứ i .

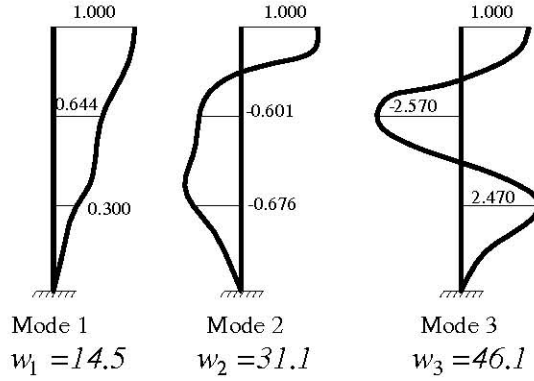
Ví dụ 3.4: Tìm các dạng dao động chính của khung ba tầng trong ví dụ 3.3 đã xét, lấy chuyển vị trên cùng bằng 1.

Hai chuyển vị tầng dưới của mode n được tìm theo phương trình (3.100):

$$\begin{Bmatrix} \varphi_{2n} \\ \varphi_{3n} \end{Bmatrix} = - \begin{bmatrix} 3-1.5B_n & -2 \\ -2 & 5-2B_n \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} -1 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (3.103)$$

với $B_n = \frac{\omega_n^2}{600}$.

Kết quả các dạng dao động chính của khung được trình bày như Hình 3.21.



Hình 3.21. Dạng dao động chính của hệ khung phẳng ba tầng

3.3.3 Phân tích tần số theo ma trận mềm

Nhiều bài toán dùng ma trận mềm $\mathbf{f}$ tiện hơn ma trận cứng $\mathbf{K}$. Khi đó chúng ta cần xác định tần số riêng theo $\mathbf{f}$.

Phương trình (3.84) được viết lại và biến đổi như sau:

$$[\mathbf{K} - \omega^2 \mathbf{M}] \hat{\mathbf{v}} = \mathbf{0} \quad (3.104)$$

Nhân hai vế với $\mathbf{f}$ ta thu được:

$$\left[\frac{1}{\omega^2} \mathbf{fK} - \mathbf{fM} \right] \hat{\mathbf{v}} = \mathbf{0} \quad (3.105)$$

vì $\mathbf{f} = [\mathbf{K}]^{-1}$ nên $\mathbf{fK} = \mathbf{I}$, ta có:

$$\left[\frac{1}{\omega^2} \mathbf{I} - \mathbf{fM} \right] \hat{\mathbf{v}} = \mathbf{0} \quad (3.106)$$

do $\hat{\mathbf{v}} \neq 0$ nên ta có phương trình tần số:

$$\det \left[\frac{1}{\omega^2} \mathbf{I} - \mathbf{fM} \right] = 0 \quad (3.107)$$

3.3.4 Ảnh hưởng của lực dọc

3.3.4.1 Dao động tự do

Phương trình dao động (3.80) kể đến độ cứng hình học có dạng:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{v}}(t) + \mathbf{K}\mathbf{v}(t) - \mathbf{K}_G\mathbf{v}(t) = \mathbf{0} \quad (3.108)$$

hay

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{v}}(t) + \bar{\mathbf{K}}\mathbf{v}(t) = \mathbf{0} \quad (3.109)$$

Phương trình tần số:

$$\det[\bar{\mathbf{K}} - \omega^2\mathbf{M}] = 0 \quad (3.110)$$

Lực dọc làm cho kết cấu bị “mềm” hơn, nên các tần số riêng cũng thấp hơn. Kết cấu thường làm việc bất lợi hơn dưới tác dụng của tải trọng động. Tương ứng, các dạng dao động chính cũng bị thay đổi do lực dọc.

3.3.4.2 Tải trọng tới hạn gây mất ổn định

Khi lực dọc đạt giá trị tới hạn N_0 thì kết cấu không dao động ($\omega = 0$), lúc này lực quán tính cũng triệt tiêu. Phương trình (3.108) trở thành:

$$\mathbf{K}\mathbf{v}(t) - \mathbf{K}_{G_0}\mathbf{v}(t) = \mathbf{0} \quad (3.111)$$

trong đó $\mathbf{K}_{G_0}$ là ma trận độ cứng hình học, ứng với lực dọc $N_0(x)$, với các hệ số được xác định bởi:

$$k_{G_0}^{ij} = \int_0^L N_0(x) \psi_i'(x) \psi_j'(x) dx \quad (3.112)$$

Gọi tham số tải trọng (*Load factor*) là:

$$\lambda_G = \frac{N_0(x)}{N(x)} \quad (3.113)$$

với $N(x)$ là lực dọc do tải trọng đang xét gây ra thì ta có:

$$k_{G0}^{ij} = \lambda_G k_G^{ij} \quad (3.114)$$

Do đó ta có:

$$\mathbf{K}_{G0} = \lambda_G \mathbf{K}_G \quad (3.115)$$

Thế phương trình (3.115) vào (3.111), ta thu được:

$$[\mathbf{K} - \lambda_G \mathbf{K}_{G0}] \mathbf{v}(t) = \mathbf{0} \quad (3.116)$$

vì $\mathbf{v}(t) \neq \mathbf{0}$ nên ta có phương trình xác định tham số tải trọng λ_G là:

$$\det |\mathbf{K} - \lambda_G \mathbf{K}_{G0}| = 0 \quad (3.117)$$

Tải trọng tới hạn thấp nhất ứng với $\lambda_G^1 = \min$. Dạng mất ổn định tương ứng với vectơ chuyển vị v_1 được tìm bằng cách thế λ_G^1 vào phương trình (3.116).

3.3.4.3 Mất ổn định với tải trọng điều hòa

Xét tải trọng tác dụng có dạng:

$$p(t) = p_o \sin \bar{\omega} t \quad (3.118)$$

trong đó $\bar{\omega}$ là tần số của tải trọng tác dụng.

Phương trình cân bằng dao động không cản:

$$m\ddot{v} + kv - k_G v = p_o \sin \bar{\omega} t \quad (3.119)$$

Phương trình (3.119) có nghiệm:

$$v(t) = \hat{v} \sin \bar{\omega} t \quad (3.120)$$

$$\ddot{v}(t) = -\bar{\omega}^2 \hat{v} \sin \bar{\omega} t \quad (3.121)$$

Thế các nghiệm này vào phương trình (3.119) ta có:

$$-\bar{\omega}^2 m \hat{v} + k \hat{v} - k_G \hat{v} = p_o \quad (3.122)$$

Độ cứng động của hệ được định nghĩa bởi:

$$\bar{k} \equiv k - \bar{\omega}^2 m \quad (3.123)$$

Thế vào biểu thức trên và biểu diễn độ cứng hình học là một hàm của hệ số tải trọng λ_G , ta có:

$$\left| \bar{k} - \lambda_G k_{GO} \right| \hat{v} = p_o \quad (3.124)$$

Nếu biên độ tác dụng của tải trọng tiến dần đến 0 thì phản ứng của hệ bao gồm chuyển vị vẫn có thể khác 0 nếu định thức của ma trận vuông bằng 0. Vì vậy điều kiện mất ổn định đối với kết cấu chịu tải trọng điều hòa là:

$$\left\| \bar{k} - \lambda_G k_{GO} \right\| = 0 \quad (3.125)$$

Khi tải trọng ngừng tác dụng, phương trình tác dụng có thể viết thành:

$$\left| k - \omega^2 m - \lambda_G k_{GO} \right| \hat{v} = 0 \quad (3.126)$$

Ta thấy sự tổ hợp của tải trọng mất ổn định λ_G và tần số dao động ω^2 sẽ thỏa mãn phương trình trị riêng. Như vậy khi chịu tải

trọng điều hòa ứng với một tần số nào đó thì hệ có thể mất ổn định ngay cả khi biên độ lực bằng 0.

3.3.5 Điều kiện trực giao (Orthogonality)

3.3.5.1 Các điều kiện cơ bản

Phương trình dao động (3.84) viết lại cho tần số ω_n và ω_m (giả thiết $\omega_n \neq \omega_m$) là:

$$\mathbf{K} \hat{\mathbf{v}}_n = \omega_n^2 \mathbf{M} \hat{\mathbf{v}}_n \quad (3.127)$$

$$\mathbf{K} \hat{\mathbf{v}}_m = \omega_m^2 \mathbf{M} \hat{\mathbf{v}}_m \quad (3.128)$$

Nhân hai vế của phương trình (3.127) với $\{\hat{\mathbf{v}}_m\}^T$ ta được:

$$\{\hat{\mathbf{v}}_m\}^T \mathbf{K} \hat{\mathbf{v}}_n = \omega_n^2 \{\hat{\mathbf{v}}_m\}^T \mathbf{M} \hat{\mathbf{v}}_n \quad (3.129)$$

Chuyển trí phương trình (3.129) cả hai vế, chú ý $[\mathbf{K}]^T = \mathbf{K}$ và $[\mathbf{M}]^T = \mathbf{M}$ vì các ma trận này đối xứng, ta thu được:

$$\{\hat{\mathbf{v}}_n\}^T \mathbf{K} \hat{\mathbf{v}}_m = \omega_n^2 \{\hat{\mathbf{v}}_n\}^T \mathbf{M} \hat{\mathbf{v}}_m \quad (3.130)$$

Nhân trước $\{\hat{\mathbf{v}}_n\}^T$ cho phương trình (3.128), ta có:

$$\{\hat{\mathbf{v}}_n\}^T \mathbf{K} \hat{\mathbf{v}}_m = \omega_m^2 \{\hat{\mathbf{v}}_n\}^T \mathbf{M} \hat{\mathbf{v}}_m \quad (3.131)$$

Từ phương trình (3.130) và (3.131) suy ra:

$$(\omega_m^2 - \omega_n^2) \{\hat{\mathbf{v}}_n\}^T \mathbf{M} \hat{\mathbf{v}}_m = 0 \quad (3.132)$$

vì $\omega_n \neq \omega_m$ nên ta có điều kiện trực giao đầu tiên:

$$\{\hat{\mathbf{v}}_n\}^T \mathbf{M} \hat{\mathbf{v}}_m = 0 \quad (3.133)$$

Thế phương trình (3.133) vào (3.131) suy ra điều kiện thứ hai là:

$$\{\hat{\mathbf{v}}_n\}^T \mathbf{K} \hat{\mathbf{v}}_m = 0 \quad (3.134)$$

Biểu diễn điều kiện trực giao theo mode, ta có:

$$\{\boldsymbol{\phi}_n\}^T \mathbf{M} \boldsymbol{\phi}_m = 0 \text{ với } m \neq n \quad (3.135)$$

$$\{\boldsymbol{\phi}_n\}^T \mathbf{K} \boldsymbol{\phi}_m = 0 \text{ với } m \neq n \quad (3.136)$$

Chú ý rằng điều kiện trực giao chỉ dùng cho hai mode có tần số khác nhau, nghĩa là $\omega_n \neq \omega_m$.

3.3.5.2 Chuẩn hóa theo ma trận khối lượng

Vectơ biên độ $\hat{\mathbf{v}}_n$ được chuẩn hóa theo ma trận khối lượng thành $\hat{\boldsymbol{\phi}}_n$ thỏa mãn điều kiện:

$$\{\hat{\boldsymbol{\phi}}_n\}^T \mathbf{M} \hat{\boldsymbol{\phi}}_m = 1 \quad (3.137)$$

Gọi $\{\hat{\mathbf{v}}_n\}^T \mathbf{M} \hat{\mathbf{v}}_m = M_n$ là *scalar* thì vectơ chuẩn hóa sẽ là:

$$\hat{\boldsymbol{\phi}}_n = \frac{\hat{\mathbf{v}}_n}{\sqrt{M_n}} \quad (3.138)$$

Khi đó ma trận vuông $\hat{\boldsymbol{\Phi}}$ gồm N vectơ $\hat{\boldsymbol{\phi}}_n$ sẽ thỏa mãn:

$$\{\hat{\boldsymbol{\Phi}}\}^T \mathbf{M} \hat{\boldsymbol{\Phi}} = \mathbf{I} \quad (3.139)$$

Các vectơ $\hat{\boldsymbol{\phi}}_n$ được gọi là các vectơ trực chuẩn (*Orthonormal*).

3.4 PHÂN TÍCH PHẢN ỨNG ĐỘNG

Phương pháp dùng để phân tích phản ứng động của kết cấu được dùng là phương pháp chồng chất mode. Nội dung chính của phương pháp này là biến hệ dao động có hệ n phương trình vi phân thành dạng hệ động có n phương trình vi phân tách rời. Để dùng phương pháp trên ta phải tìm hiểu tọa độ chuẩn, sau đó sẽ thiết lập phương trình chuyển động tách rời của hệ không xét đến yếu tố cản và có xét đến cản.

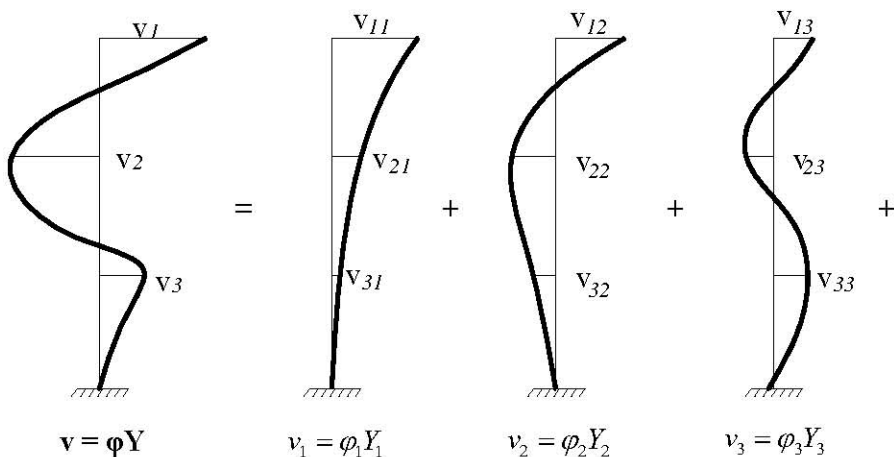
3.4.1 Tọa độ chuẩn (*Normal Coordinates*)

Vectơ chuyển vị $\mathbf{v}$ của hệ N bậc tự do có thể tạo ra bằng cách tổ hợp tuyến tính của N vectơ cơ sở đã biết nào đó. Tuy nhiên, nếu chọn các vectơ cơ sở này là các dạng chính của dao động tự do thì sẽ có nhiều ưu điểm do tính trực giao của chúng. Các dạng chính đóng vai trò tương tự như các hàm lượng giác của chuỗi *Fourier*, và chuyển vị của hệ có thể xấp xỉ khá tốt với một số số hạng của chuỗi.

Xét dầm console như *Hình 3.22* để minh họa. Vectơ chuyển vị ứng với hàm dạng ϕ_n là $\hat{\mathbf{v}}_n$ được xác định bởi công thức:

$$\hat{\mathbf{v}}_n = \phi_n \mathbf{Y}_n(t) \quad (3.140)$$

trong đó $\mathbf{Y}_n(t)$ là biên độ (tọa độ suy rộng) ứng với hàm dạng ϕ_n .



Hình 3.22. Dầm consol và các dạng dao động

Chuyển vị toàn phần $\mathbf{v}$ được phân tích thành tổng các dạng chính như sau:

$$\mathbf{v} = \varphi_1 Y_1 + \varphi_2 Y_2 + \cdots + \varphi_n Y_n = \sum_{n=1}^N \varphi_n Y_n \quad (3.141)$$

Viết lại phương trình trên dưới dạng ma trận:

$$\mathbf{v} = \boldsymbol{\varphi} \mathbf{Y}(t) \quad (3.142)$$

trong đó $\boldsymbol{\varphi}$ là ma trận vuông của các dạng chính và $\mathbf{Y}$ là vector các tọa độ suy rộng, cũng được gọi là các tọa độ chuẩn. Các thành phần Y_n của vector $\mathbf{Y}$ có thể tìm dễ dàng nhờ tính trực giao của các hàm dạng như sau:

Nhân hai vế của phương trình (3.142) với $[\boldsymbol{\varphi}_n]^T \mathbf{M}$, ta thu được:

$$[\boldsymbol{\varphi}_n]^T \mathbf{M} \mathbf{v} = [\boldsymbol{\varphi}_n]^T \mathbf{M} \boldsymbol{\varphi} \mathbf{Y} \quad (3.143)$$

Áp dụng tính trực giao $[\boldsymbol{\varphi}_i]^T \mathbf{M} \boldsymbol{\varphi}_j = \mathbf{0}$ với $i \neq j$, vế phải phương trình (3.143) được triển khai:

$$\begin{aligned} [\boldsymbol{\varphi}_n]^T \mathbf{M} \boldsymbol{\varphi} \mathbf{Y} &= [\boldsymbol{\varphi}_n]^T \mathbf{M} \boldsymbol{\varphi}_1 \mathbf{Y}_1 + [\boldsymbol{\varphi}_n]^T \mathbf{M} \boldsymbol{\varphi}_2 \mathbf{Y}_2 + \dots + [\boldsymbol{\varphi}_n]^T \mathbf{M} \boldsymbol{\varphi}_n \mathbf{Y}_n \\ &= [\boldsymbol{\varphi}_n]^T \mathbf{M} \boldsymbol{\varphi}_n \mathbf{Y}_n \end{aligned} \quad (3.144)$$

Thế phương trình (3.144) vào (3.143), ta thu được:

$$[\boldsymbol{\varphi}_n]^T \mathbf{M} \mathbf{v} = [\boldsymbol{\varphi}_n]^T \mathbf{M} \boldsymbol{\varphi}_n \mathbf{Y}_n \quad (3.145)$$

hay

$$\mathbf{Y}_n = \frac{[\boldsymbol{\varphi}_n]^T \mathbf{M} \mathbf{v}}{[\boldsymbol{\varphi}_n]^T \mathbf{M} \boldsymbol{\varphi}_n} \quad (3.146)$$

Như vậy, mỗi tọa độ chuẩn $\mathbf{Y}_n$ ($n=1\dots N$) đều được xác định theo phương trình (3.146).

3.4.2 Phương trình chuyển động tách rời (*Uncoupled*) của hệ không cản

Phương trình chuyển động không cản của hệ nhiều bậc tự do:

$$\mathbf{M} \ddot{\mathbf{v}} + \mathbf{K} \mathbf{v} = \mathbf{p}(t) \quad (3.147)$$

Thế $\ddot{\mathbf{v}} = \boldsymbol{\varphi} \ddot{\mathbf{Y}}$ từ phương trình (3.142) vào phương trình (3.147):

$$\mathbf{M} \boldsymbol{\varphi} \ddot{\mathbf{Y}} + \mathbf{K} \boldsymbol{\varphi} \mathbf{Y} = \mathbf{p}(t) \quad (3.148)$$

Nhân trước hai vế cho $[\boldsymbol{\varphi}_n]^T$:

$$[\boldsymbol{\varphi}_n]^T \mathbf{M} \boldsymbol{\varphi} \ddot{\mathbf{Y}} + [\boldsymbol{\varphi}_n]^T \mathbf{K} \boldsymbol{\varphi} \mathbf{Y} = [\boldsymbol{\varphi}_n]^T \mathbf{p}(t) \quad (3.149)$$

Do tính trực giao nên ta có:

$$[\boldsymbol{\varphi}_n]^T \mathbf{M} \boldsymbol{\varphi}_n \ddot{\mathbf{Y}}_n + [\boldsymbol{\varphi}_n]^T \mathbf{K} \boldsymbol{\varphi}_n \mathbf{Y}_n = [\boldsymbol{\varphi}_n]^T \mathbf{p}(t) \quad (3.150)$$

Đặt các kí hiệu mới:

$$\mathbf{M}_n = [\boldsymbol{\varphi}_n]^T \mathbf{M} \boldsymbol{\varphi}_n \quad (3.151)$$

$$\mathbf{K}_n = [\boldsymbol{\varphi}_n]^T \mathbf{K} \boldsymbol{\varphi}_n \quad (3.152)$$

$$\mathbf{P}_n(t) = [\boldsymbol{\varphi}_n]^T \mathbf{p}(t) \quad (3.153)$$

Gọi $\mathbf{M}_n$, $\mathbf{K}_n$ và $\mathbf{P}_n(t)$ lần lượt là ma trận khối lượng, ma trận độ cứng và ma trận tải trọng suy rộng cho dạng dao động chính thứ n . Phương trình (3.150) được viết lại:

$$\mathbf{M}_n \ddot{\mathbf{Y}}_n(t) + \mathbf{K}_n \mathbf{Y}_n(t) = \mathbf{P}_n(t) \quad (3.154)$$

Đây là phương trình dao động cho hệ một bậc tự do cho dạng chính n .

Từ phương trình điều kiện trực giao (3.127), ta có:

$$\mathbf{K} \hat{\mathbf{v}}_n = \omega_n^2 \mathbf{M} \hat{\mathbf{v}}_n \quad (3.155)$$

Thế $\mathbf{v}_n = \boldsymbol{\varphi}_n \mathbf{Y}_n$ vào và đơn giản đi $\mathbf{Y}_n$ cho hai vế ta có:

$$\mathbf{K} \boldsymbol{\varphi}_n = \omega_n^2 \mathbf{M} \boldsymbol{\varphi}_n \quad (3.156)$$

Nhân trước $[\boldsymbol{\varphi}_n]^T$ cho hai vế của phương trình (3.156), ta thu được:

$$[\boldsymbol{\varphi}_n]^T \mathbf{K} \boldsymbol{\varphi}_n = \omega_n^2 [\boldsymbol{\varphi}_n]^T \mathbf{M} \boldsymbol{\varphi}_n \quad (3.157)$$

hay

$$\mathbf{K}_n = \omega_n^2 \mathbf{M}_n \quad (3.158)$$

Như vậy, việc dùng tọa độ chuẩn đã biến hệ N phương trình vi phân dao động của hệ có N bậc tự do về dạng gồm N phương trình vi phân tách rời nhau. Ứng với mỗi dạng dao động chính thì

phản ứng động của hệ được xác định bằng cách chồng chất các phản ứng của các dạng chính. Phương pháp này được gọi là phương pháp chồng chất mode (*Mode superposition method*).

3.4.3 Phương trình chuyển động tách rời của hệ có cản

Phương trình chuyển động của hệ có cản:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{v}} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{v}} + \mathbf{K}\mathbf{v} = \mathbf{p}(t) \quad (3.159)$$

Biến đổi tương tự như trường hợp hệ không cản, ta được:

$$[\boldsymbol{\varphi}_n]^T \mathbf{M} \boldsymbol{\varphi} \ddot{\mathbf{Y}} + [\boldsymbol{\varphi}_n]^T \mathbf{C} \boldsymbol{\varphi} \dot{\mathbf{Y}} + [\boldsymbol{\varphi}_n]^T \mathbf{K} \boldsymbol{\varphi} \mathbf{Y} = [\boldsymbol{\varphi}_n]^T \mathbf{p}(t) \quad (3.160)$$

Giả thuyết ma trận cản $\mathbf{C}$ cũng có tính chất làm trực giao các dạng chính tương tự như ma trận $\mathbf{M}$ và $\mathbf{K}$, tức là:

$$[\boldsymbol{\varphi}_n]^T \mathbf{C} \boldsymbol{\varphi}_m = \mathbf{0} \text{ với } m \neq n \quad (3.161)$$

Phương trình (3.160) trở thành:

$$\mathbf{M}_n \ddot{\mathbf{Y}}_n + \mathbf{C}_n \dot{\mathbf{Y}}_n + \mathbf{K}_n \mathbf{Y}_n = \mathbf{P}_n(t) \quad (3.162)$$

hay

$$\ddot{\mathbf{Y}}_n + 2\xi_n \omega_n \dot{\mathbf{Y}}_n + \omega_n^2 \mathbf{Y}_n = \frac{1}{\mathbf{M}_n} \mathbf{P}_n(t) \quad (3.163)$$

Với các ma trận:

$$\mathbf{M}_n = [\boldsymbol{\varphi}_n]^T \mathbf{M} \boldsymbol{\varphi}_n \quad (3.164)$$

$$\mathbf{K}_n = [\boldsymbol{\varphi}_n]^T \mathbf{K} \boldsymbol{\varphi}_n \quad (3.165)$$

$$\mathbf{C}_n = [\boldsymbol{\varphi}_n]^T \mathbf{C} \boldsymbol{\varphi}_n = 2\xi_n \omega_n \mathbf{M}_n \quad (3.166)$$

$$\mathbf{P}_n(t) = [\boldsymbol{\varphi}_n]^T \mathbf{P}(t) \quad (3.167)$$

trong đó ξ_n là tỉ số cản của mode thứ n .

Để thu được phương trình chuyển động dạng tách rời (3.162) và (3.163) cho các dao động chính, ma trận cản $\mathbf{C}$ phải thỏa mãn điều kiện trục giao. *Rayleigh* chứng minh rằng, nếu ma trận cản $\mathbf{C}$ có dạng:

$$\mathbf{C} = a_0 \mathbf{M} + a_1 \mathbf{K} \quad (3.168)$$

với a_0 và a_1 là các hằng số, sẽ thỏa điều kiện trục giao của phương trình (3.161).

Việc xác định các hệ số của ma trận cản $\mathbf{C}$ rất khó khăn. Trong thực tế, thường người ta xác định giá trị của tỉ số cản ξ_2 (được suy ra từ điều kiện cộng hưởng); tỉ số cản ξ_1 tùy vào loại vật liệu và dạng kết cấu (Ví dụ: kết cấu thép thường lấy $\xi_1 = 2\%$). Sau đó tính $\mathbf{C}_n$ theo các công thức từ phương trình (3.166).

3.4.4 Tóm tắt phương pháp chồng chất dạng

Phép biến đổi sang tọa độ chuẩn đã biến hệ N phương trình vi phân liên quan với nhau thành N phương trình tách biệt. Đó chính là ưu điểm cơ bản của phương pháp chồng chất mode. Ngoài ra, do tính hội tụ cao nên thường dùng chỉ cần chồng chất một số mode có tần số thấp. Trình tự phương pháp như sau:

Bước 1: Phương trình vi phân chuyển động của hệ với các tọa độ hình học:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{v}} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{v}} + \mathbf{K}\mathbf{v} = \mathbf{p}(t) \quad (3.169)$$

Bước 2: Phân tích dạng chính và tần số, bỏ qua ảnh hưởng của lực cản đối với dạng chính và tần số, ta có phương trình trị riêng:

$$[\mathbf{K} - \omega^2 \mathbf{M}] \mathbf{v} = \mathbf{0} \quad (3.170)$$

Từ đó xác định được ma trận dạng chính $\boldsymbol{\Phi}$ và vectơ tần số $\boldsymbol{\omega}$.

Bước 3: Khối lượng và tải trọng suy rộng

$$\mathbf{M}_n = [\boldsymbol{\Phi}_n]^T \mathbf{M} \boldsymbol{\Phi}_n \quad (3.171)$$

$$\mathbf{P}_n(t) = [\boldsymbol{\Phi}_n]^T \mathbf{p}(t) \quad (3.172)$$

Bước 4: Phương trình chuyển động tách rời

$$\ddot{\mathbf{Y}}_n + 2\xi_n \omega_n \dot{\mathbf{Y}}_n + \omega_n^2 \mathbf{Y}_n = \frac{1}{\mathbf{M}_n} \mathbf{P}_n(t) \quad (3.173)$$

Bước 5: Phản ứng của dạng chính với tải trọng

Phương trình chuyển động tách rời là phương trình chuyển động của hệ một bậc tự do có cản. Có thể tìm nghiệm bằng tích phân *Duhamel*:

$$\mathbf{Y}_n(t) = \frac{1}{\mathbf{M}_n \omega_{Dn}} \int_0^t P_n(\tau) e^{-\xi_n \omega_n (t-\tau)} \sin \omega_{Dn} (t-\tau) d\tau \quad (3.174)$$

trong đó $\omega_{Dn} = \omega_n \sqrt{1 - \xi_n^2}$ là tần số dao động có cản.

Phương trình trên áp dụng cho trường hợp điều kiện ban đầu $t=0$ thì $\mathbf{Y}_n(0) = \dot{\mathbf{Y}}_n(0) = 0$. Có thể giải phương trình trên bằng phương pháp số.

Bước 6: Dao động tự do của dạng chính

Nếu điều kiện ban đầu $\mathbf{Y}_n(0) \neq 0$ và $\dot{\mathbf{Y}}_n(0) \neq 0$ thì phản ứng của dạng chính phải cộng thêm phần dao động tự do có cản sau:

$$Y_n(t) = e^{-\xi_n \omega_n t} \left[\frac{\dot{Y}_n(0) + Y_n(0) \xi_n \omega_n}{\omega_{Dn}} \sin \omega_{Dn} t + Y_n(0) \cos \omega_{Dn} t \right] \quad (3.175)$$

Các trị số $\mathbf{Y}_n(0)$ và $\dot{\mathbf{Y}}_n(0)$ xác định theo vectơ chuyển vị và vận tốc ban đầu $\mathbf{v}(0)$ và $\dot{\mathbf{v}}(0)$ như sau:

$$\mathbf{Y}_n(0) = \frac{[\boldsymbol{\varphi}_n]^T \mathbf{M} \mathbf{v}(0)}{\mathbf{M}_n} \quad (3.176)$$

$$\dot{\mathbf{Y}}_n(0) = \frac{[\boldsymbol{\varphi}_n]^T \mathbf{M} \dot{\mathbf{v}}(0)}{\mathbf{M}_n} \quad (3.177)$$

Bước 7: Chuyển vị trong tọa độ hình học

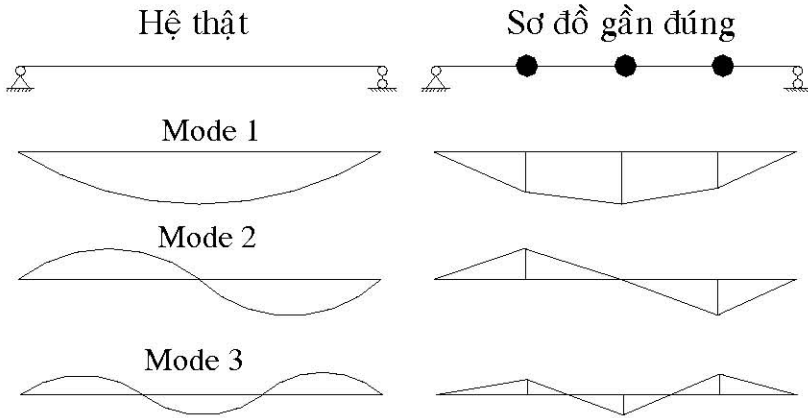
Dùng nguyên lý chồng chất, ta có:

$$\mathbf{v}(t) = \varphi_1 Y_1(t) + \varphi_2 Y_2(t) + \dots + \varphi_n Y_n(t) = \sum_{n=1}^N \varphi_n Y_n(t) = \boldsymbol{\Phi} \mathbf{Y}(t) \quad (3.178)$$

Thường dùng một số mode có tần số thấp nhất, với hai lí do:

- Chuỗi trên thường hội tụ nhanh, nên chỉ cần ít số hạng là đủ chính xác (dàn khoan: 1, dàn cầu: 3 ÷ 5, cầu dây văng: số hạng < 20).

- Mode tần số cao kém tin cậy, do sự gần đúng sơ đồ tính của kết cấu. Thí dụ dầm đơn giản trên hình 3.23 được thay bằng các khối lượng tập trung. Mode càng cao thì càng sai lệch nhiều và kém tin cậy hơn.



Hình 3.23. Dầm đơn giản

Bước 8: Lực đàn hồi

Lực đàn hồi để duy trì sự biến dạng của kết cấu, được xác định theo công thức:

$$\begin{aligned} \mathbf{f}_s(t) &= \mathbf{K}\mathbf{v}(t) = \mathbf{K}\boldsymbol{\Phi}\mathbf{Y}(t) \\ &= \mathbf{K}\boldsymbol{\Phi}_1\mathbf{Y}_1(t) + \mathbf{K}\boldsymbol{\Phi}_2\mathbf{Y}_2(t) + \mathbf{K}\boldsymbol{\Phi}_3\mathbf{Y}_3(t) + \dots + \mathbf{K}\boldsymbol{\Phi}_n\mathbf{Y}_n(t) \quad (3.179) \\ &= \omega_1^2\mathbf{M}\boldsymbol{\Phi}_1\mathbf{Y}_1(t) + \omega_2^2\mathbf{M}\boldsymbol{\Phi}_2\mathbf{Y}_2(t) + \dots + \omega_n^2\mathbf{M}\boldsymbol{\Phi}_n\mathbf{Y}_n(t) \end{aligned}$$

Viết lại phương trình (3.179) dưới dạng ma trận:

$$\mathbf{f}_s(t) = \mathbf{M}\boldsymbol{\Phi}\omega_n^2\mathbf{Y}_n(t) \quad (3.180)$$

trong đó:

$$\omega_n^2\mathbf{Y}_n(t) = \begin{Bmatrix} \omega_1^2\mathbf{Y}_1(t) \\ \omega_2^2\mathbf{Y}_2(t) \\ \vdots \\ \omega_n^2\mathbf{Y}_n(t) \end{Bmatrix} \quad (3.181)$$

Bước 9: Nội lực và ứng suất

Trong mỗi dao động chính, nội lực và ứng suất trong một phần tử tỉ lệ với tọa độ chuẩn $\mathbf{Y}_n(t)$. Chẳng hạn, ứng suất của phần tử khi dao động với mode n có dạng:

$$\sigma_n = \alpha_n \mathbf{Y}_n(t) \quad (3.182)$$

với α_n là hệ số tỉ lệ.

Dùng nguyên lý chồng chất cho các mode, ta có:

$$\sigma = \alpha_1 Y_1(t) + \alpha_2 Y_2(t) + \dots + \alpha_n Y_n(t) \quad (3.183)$$

Các tọa độ chuẩn $Y_n(t)$ đóng vai trò như chuyển vị cưỡng bức, tương ứng với các sơ đồ biến dạng φ_n .

Công thức cho nội lực cũng có dạng tương tự như công thức (3.183) nhưng α_n là hệ số tỉ lệ tương ứng cho nội lực đang xét.

Ví dụ 3.5: Xét lại kết cấu khung ba tầng trong thí dụ 3.3, xác định phản ứng của kết cấu do tải trọng xung hình sin như sau:

$$\begin{Bmatrix} p_1(t) \\ p_2(t) \\ p_3(t) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{Bmatrix} (500kN) \cos\left(\frac{\pi}{2t_1} t\right) \quad (3.184)$$

với $t_1 = 0.025$ và $-t_1/2 < t < t_1/2$.

Giải:

Ma trận khối lượng và độ cứng được cho bởi:

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} 10 & & 0 \\ & 15 & \\ 0 & & 20 \end{bmatrix} (T) \quad (3.185)$$

$$\mathbf{K} = 6000 \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 3 & -2 \\ 0 & -2 & 5 \end{bmatrix} \quad (kN / m) \quad (3.186)$$

Kết quả của tần số vòng và các dạng chuẩn được cho bởi:

$$\underline{\omega} = \left\{ \begin{matrix} 14.5 \\ 31.1 \\ 46.1 \end{matrix} \right\} \quad (3.187)$$

$$\varphi_1 = \left\{ \begin{matrix} 1 \\ 0.644 \\ 0.3 \end{matrix} \right\}, \quad \varphi_2 = \left\{ \begin{matrix} 1 \\ -0.601 \\ -0.676 \end{matrix} \right\} \quad \text{và} \quad \varphi_3 = \left\{ \begin{matrix} 1 \\ -2.57 \\ 2.47 \end{matrix} \right\} \quad (3.188)$$

Vì tải trọng xung rất ngắn nên coi phản ứng của mỗi dạng chính là dao động tự do có hệ số dao động D_n xác định dựa vào đồ thị:

$$Y_n(t) = D_n \frac{P_{0n}}{K_n} \sin \omega_1 t \quad (3.189)$$

$$\mathbf{M}_n = [\varphi_n]^T \mathbf{M} \varphi_n \quad (3.190)$$

$$\mathbf{K}_n = \mathbf{M}_n \omega_n^2 \quad (3.191)$$

$$\mathbf{P}_{0n} = [\varphi_n]^T \left\{ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{matrix} \right\} (500) \quad (3.192)$$

Từ phương trình (3.190) ta thu được khối lượng suy rộng như sau:

$$\left\{ \begin{matrix} M_1 \\ M_2 \\ M_3 \end{matrix} \right\} = \left\{ \begin{matrix} 18 \\ 24.55 \\ 231 \end{matrix} \right\} \quad (3.193)$$

Từ phương trình (3.191) ta thu được vectơ độ cứng suy rộng:

$$\begin{Bmatrix} K_1 \\ K_2 \\ K_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} M_1 \omega_1^2 \\ M_2 \omega_2^2 \\ M_3 \omega_3^2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1.80 \times 14.5^2 \\ 2.455 \times 31.1^2 \\ 23.10 \times 46.1^2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 3790 \\ 23720 \\ 491000 \end{Bmatrix} \quad (3.194)$$

Vectơ tải trọng suy rộng:

$$\begin{Bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \end{Bmatrix} = [\Phi]^T \begin{Bmatrix} 500 \\ 1000 \\ 1000 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1444 \\ -777 \\ 400 \end{Bmatrix} \quad (3.195)$$

Tỉ số giữa chu kỳ và chiều dài xung:

$$\begin{Bmatrix} t_1/T_1 \\ t_2/T_2 \\ t_3/T_3 \end{Bmatrix} = \frac{0.02}{2\pi} \begin{Bmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0.046 \\ 0.099 \\ 0.147 \end{Bmatrix} \quad (3.196)$$

Từ đồ thị ta có hệ số động:

$$\begin{Bmatrix} D_1 \\ D_2 \\ D_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0.18 \\ 0.39 \\ 0.57 \end{Bmatrix} \quad (3.197)$$

Thế các đại lượng thu được vào phương trình (3.189), ta có:

$$\begin{Bmatrix} Y_1(t) \\ Y_2(t) \\ Y_3(t) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0.0686 \sin(14.5t) \\ -0.0128 \sin(31.1t) \\ 0.0005 \sin(46.1t) \end{Bmatrix} \quad (3.198)$$

Chuyển vị tại một điểm nào đó được xác định theo nguyên lý cộng tác dụng. Giả sử tính chuyển vị tại tầng hai, ta có:

$$\begin{aligned}
 v_2(t) &= \sum_{n=1}^3 \varphi_{2n} Y_n(t) = 0.644 \times 0.0686 \sin(14.5) \\
 &\quad + (-0.601) \times (-0.0128) \sin(31.1t) \\
 &\quad + (-2.57)(0.0005) \sin(46.1t) \\
 &= 0.0442 \sin(14.5) + 0.0077 \sin(31.1t) - 0.0013 \sin(46.1t)
 \end{aligned} \tag{3.199}$$

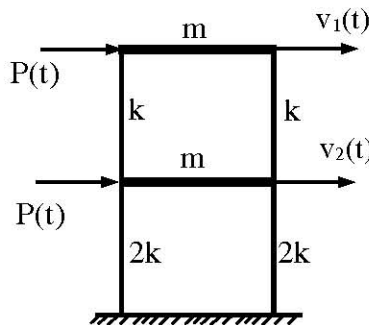
và lực đàn hồi tác dụng tại tầng hai:

$$\begin{aligned}
 f_{s2}(t) &= \sum_{n=1}^3 m_2 \omega_n^2 Y_n(t) \varphi_{2n} \\
 &= 13.9 \sin(14.5t) + 11.2 \sin(31.1t) - 4.1 \sin(46.1t)
 \end{aligned} \tag{3.200}$$

BÀI TẬP CHƯƠNG 3

1. Cho khung hai tầng có dầm cứng tuyệt đối được mô hình như hệ hai bậc tự do và được biểu diễn như trên *Hình 3.24*. Bỏ qua lực cản và khối lượng của các cột. Yêu cầu:

- Xác định ma trận khối lượng và ma trận độ cứng.
- Viết phương trình vi phân chuyển động của hệ.
- Tính các tần số vòng tự nhiên và modes dao động của hệ.
- Trực giao hóa các modes theo ma trận khối lượng.
- Viết phương trình vi phân dạng tách rời.



Hình 3.24. Khung phẳng hai tầng

Đáp số: $M = \begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{bmatrix}; \quad K = \begin{bmatrix} 2k & -2k \\ -2k & 6k \end{bmatrix};$

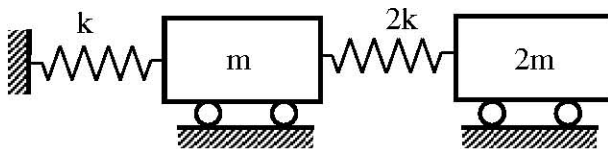
$$\omega = \left\{ 1,082\sqrt{\frac{k}{m}}, 2,613\sqrt{\frac{k}{m}} \right\} \quad \Phi = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0,414 & -2,416 \end{bmatrix}$$

$$\{\hat{\Phi}_1\} = \frac{1}{1,082\sqrt{m}} \begin{Bmatrix} 1 \\ 0,414 \end{Bmatrix}; \quad \{\hat{\Phi}_2\} = \frac{1}{2,615\sqrt{m}} \begin{Bmatrix} 1 \\ 2,416 \end{Bmatrix}$$

2. Cho hệ như *Hình 3.25*, Hãy:

- Xác định các ma trận khối lượng và ma trận độ cứng.
- Tính tần số và modes dao động.
- Viết phương trình dao động tự do của hệ với điều kiện ban đầu:

$$\begin{cases} V_1(0) = 0; & V_2(0) = V_0 \\ \dot{V}_1(0) = 0; & \dot{V}_2(0) = 0 \end{cases}$$



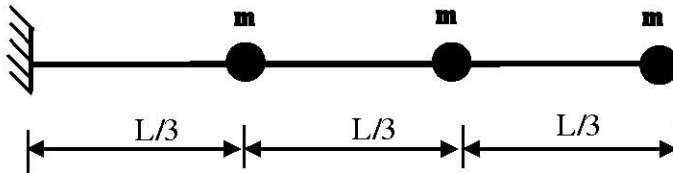
Hình 3.25

Đáp số: $M = \begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & 2m \end{bmatrix}; \quad K = \begin{bmatrix} 3k & -2k \\ -2k & 2k \end{bmatrix};$

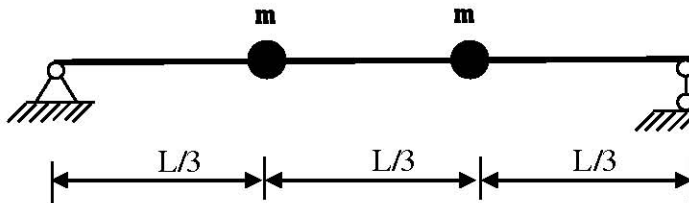
$$\omega = \left\{ 0,1637\sqrt{k}, 0,6109\sqrt{k} \right\}; \quad \Phi = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1,366 & -0,366 \end{bmatrix}$$

3. Cho hệ ba bậc tự do có các khối lượng tập trung $m_1 = m_2 = m_3 = M$ như trên Hình 3.26 và Hình 3.27. Bỏ qua lực cản và khối lượng bản thân của dầm, xem độ cứng của dầm EI là hằng số. Yêu cầu:

- Viết phương trình vi phân chuyển động khi hệ dao động tự do không lực cản.
- Tính các tần số dao động tự nhiên và dạng dao động của hệ.



Hình 3.26. Dầm consol



Hình 3.27. Dầm tựa đơn

Đáp số:

$$\text{Hình 3.26: } \omega = \begin{Bmatrix} 1,52 \\ 26,77 \\ 9,95 \end{Bmatrix} \sqrt{\frac{EI}{mL^3}}; \quad \Phi = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3,4 & -38,372 & 1,187 \\ 6,4 & 0,215 & -0,788 \end{bmatrix};$$

$$\text{Hình 3.27: } \omega = \begin{Bmatrix} 5,69 \\ 22 \end{Bmatrix} \sqrt{\frac{EI}{mL^3}}; \quad \Phi = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix};$$

Chương 4

PHÂN TÍCH KẾT CẤU CHỊU ĐỘNG ĐẤT

Chương 4 thảo luận việc áp dụng các kiến thức động lực học công trình đã trình bày ở các chương trước vào thiết kế công trình chịu động đất theo tiêu chuẩn Việt Nam hiện hành. Phần 4.1 sẽ cung cấp các kiến thức căn bản về hiện tượng động đất và nguy cơ xảy ra động đất ở Việt Nam. Phần 4.2 sẽ trình bày về cách xác định ứng xử của hệ đàn hồi một bậc tự do và nhiều bậc tự do. Bài toán phân tích hệ đàn hồi một bậc tự do là bài toán dễ nhất, song cũng là bài toán mang tính căn bản, nền tảng vì trong thiết kế thực hành, các bài toán phức tạp hơn (nhiều bậc tự do, không đàn hồi) có thể được chuyển về bài toán căn bản này để giải quyết. Phần 4.2 đồng thời sẽ trình bày về phổ phản ứng – phương pháp phổ biến dùng để biểu diễn tác động của động đất đối với công trình. Phần tiếp theo, 4.3, thảo luận cách chuyển bài toán phi tuyến về bài toán tuyến tính tương đương. Kỹ thuật này được dùng phổ biến trong thiết kế thực hành và được nhiều tiêu chuẩn cho phép sử dụng. Phần 4.4 sẽ tổng hợp lại các nội dung của chương và trình bày quy trình thiết kế một công trình chịu động đất theo tiêu chuẩn Việt Nam hiện hành.

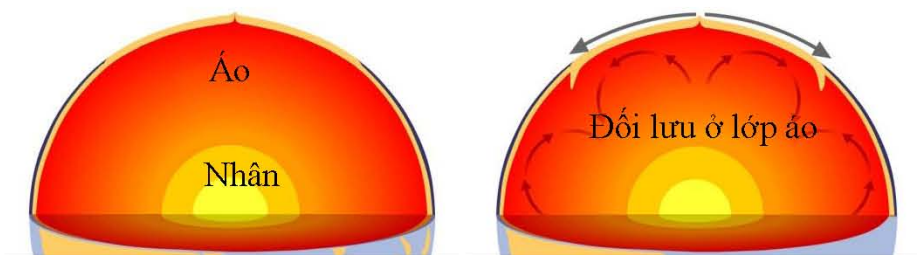
4.1 HIỆN TƯỢNG ĐỘNG ĐẤT

4.1.1 Hiện tượng động đất

Động đất là hiện tượng nền đất dao động mạnh gây ra khi một nguồn năng lượng lớn được giải phóng trong lòng đất. Phần lớn các trận động đất sinh ra từ việc giải phóng năng lượng biến dạng tích lũy trong *lớp vỏ* hoặc *lớp áo trên* của Trái Đất.

4.1.2 Nguyên nhân động đất

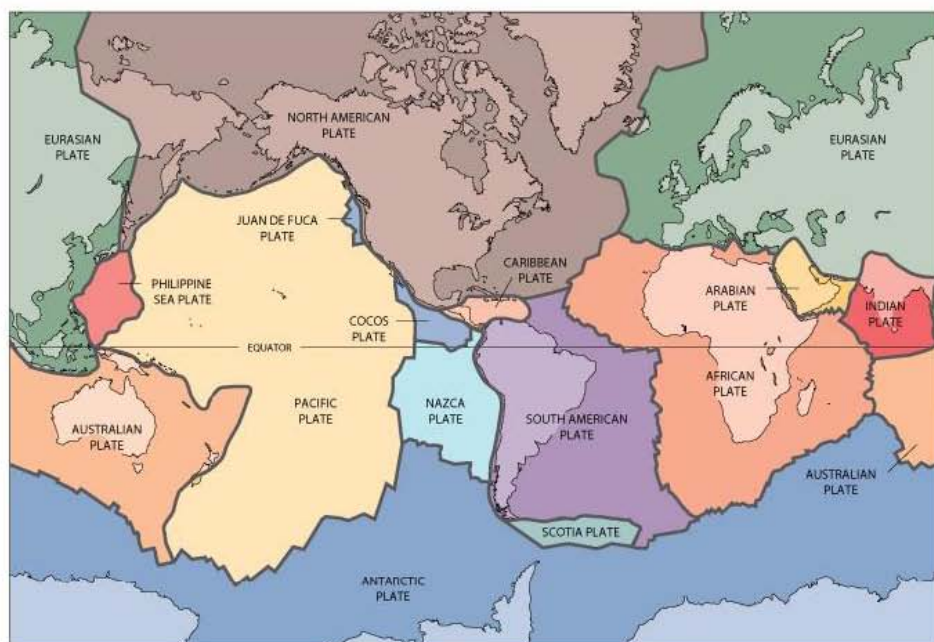
Cấu tạo bên trong Trái Đất có thể được mô tả như trên *Hình 4.1*. Phần trong cùng của quả đất là *nhân* (core). Kế ngoài phần nhân là lớp *áo* (mantle) có nhiệt độ trung bình 2200°C và tăng dần theo độ sâu. Vật liệu cấu thành lớp áo ở trạng thái bán dẻo (semimolten). Vì sự chênh lệch nhiệt độ nên các lớp vật liệu bán dẻo trong phần áo liên tục chuyển động theo các dòng đối lưu. Nằm kế ngoài lớp áo là phần *vỏ* Trái Đất. Vỏ Trái Đất được tạo thành bởi các vật liệu rắn như đá basalt, đá granite, có chiều dày rất bé so với diện tích xung quanh của vỏ ($25 \div 40\text{km}$ dưới các châu lục và $60 \div 70\text{ km}$ dưới các đại dương).



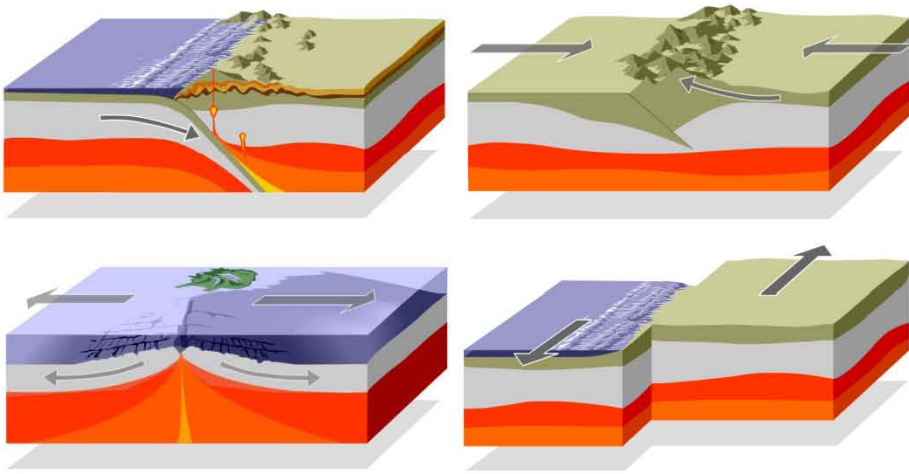
Hình 4.1. Cấu tạo bên trong Trái Đất

Lớp vỏ, nơi con người trực tiếp sinh sống bên trên, không phải là một vỏ cầu liên tục mà bị phân chia thành nhiều *mảng (tectonic plates)* nổi bên trên phần vật liệu bán dẻo liên tục dịch chuyển của lớp áo (*Hình 4.2*). Sự dịch chuyển của lớp áo làm phần vỏ dịch chuyển theo *Hình 4.3*.

Tại vùng tiếp xúc giữa các mảng thạch quyển, năng lượng cơ học hình thành và tăng dần theo thời gian. Sau hàng trăm năm, mức năng lượng tích lũy trở nên khổng lồ. Đến khi biến dạng ở mặt tiếp xúc vượt quá sức chịu của thạch quyển thì dịch trượt xảy ra, một phần lớn năng lượng tích lũy được giải phóng dưới dạng sóng địa chấn. Sóng địa chấn lan truyền lên đến mặt đất gây ra rung lắc, gọi là động đất.



Hình 4.2. Các mảng thạch quyển



Hình 4.3. Các dạng dịch trượt giữa các mảng thạch quyển

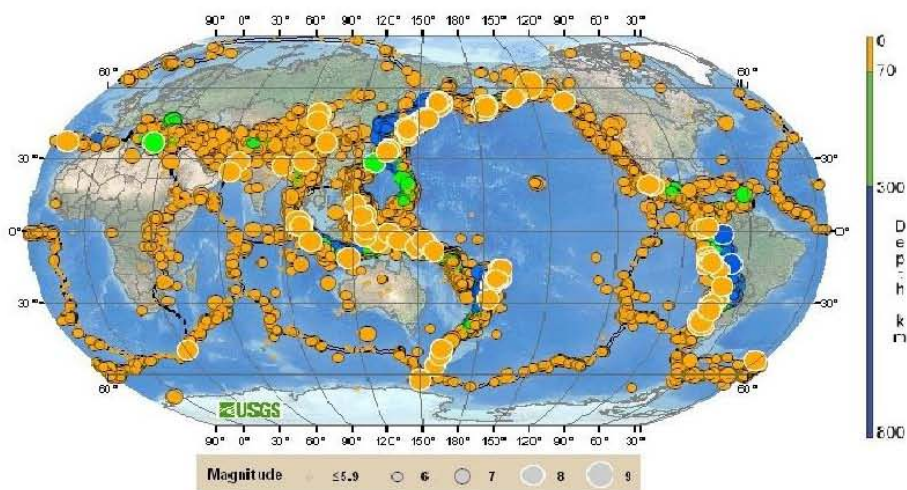
- (a) Hai mảng thạch quyển dịch chuyển hướng vào nhau, một trong hai mảng chìm xuống bên dưới mảng còn lại
- (b) Hai mảng thạch quyển dịch chuyển hướng vào nhau, các lớp đá vụn lên và tạo thêm núi
- (c) Hai mảng thạch quyển dịch chuyển ra xa nhau, mắc-ma từ lớp áo trào lên trên, nguội đi và tạo thêm vật liệu cho phần vỏ
- (d) Hai mảng thạch quyển trượt ngang ngược chiều nhau

Cách giải thích nguyên nhân động đất như trên được gọi là thuyết lục địa trôi dạt (*continental drift*). Lý thuyết này phù hợp để giải thích các động đất xuất hiện ở vùng biên các mảng thạch quyển, gọi là động đất rìa mảng (*intraplate earthquakes*). Đây là cách giải thích được công nhận rộng rãi nhất hiện nay. Lý thuyết này được khởi xướng trong khoảng hai thập kỷ đầu của thế kỷ XX và đến khoảng năm 1960 thì trở nên phổ biến.

Hơn 90% số trận động đất trên thế giới là động đất rìa mảng. Phần ít hơn 10% còn lại xảy ra trong lòng các mảng thạch quyển gọi là động đất nội mảng (*intraplate earthquake*). Lịch sử chứng kiến một số trận động đất nội mảng gây thiệt hại đáng kể như động

đất Gujarat năm 2001 ở Ấn Độ (19.727 người chết và 166.001 người bị thương), chuỗi động đất New Madrid ở Missouri, Hoa Kỳ năm 1811 – 1812 (M 7,0 – 8,1). Không giống như động đất rìa mảng, nguyên nhân của động đất nội mảng chưa thực sự được hiểu rõ. Tuy nhiên, một cách tổng quát nhất thì động đất nội mảng thường phát sinh khi có đủ hai yếu tố: trường ứng suất đủ lớn trong vỏ Trái Đất và tồn tại đứt gãy địa chất.

Động đất, ngoài nguyên nhân từ hoạt động kiến tạo địa chất như giải thích bên trên, còn có thể sinh ra do sập các hang động ngầm, nổ bom trong lòng đất, núi lửa hay tích nước ở các hồ chứa. Ngành kỹ thuật công trình quan tâm chủ yếu đến động đất kiến tạo bởi loại động đất này có sức phá hủy lớn, gây ảnh hưởng trên diện rộng và lặp lại thường xuyên.



Hình 4.4. Hầu hết động đất tập trung ở các khu vực rìa mảng

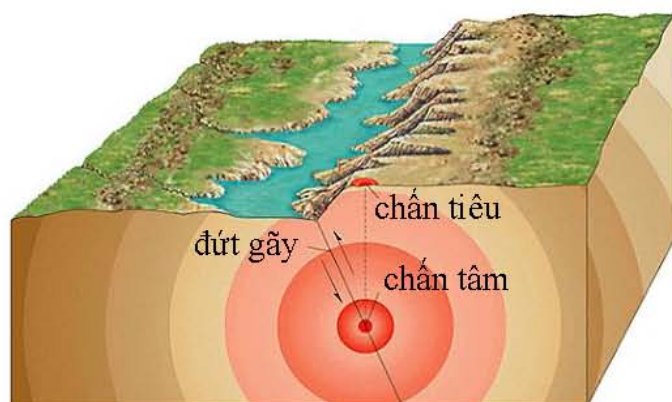
4.1.3 Các đặc trưng cơ bản của động đất

Mỗi trận động đất được đặc trưng bởi các thông số cơ bản gồm:

- Thời điểm phát sinh động đất;
- Tọa độ chấn tâm và độ sâu chấn tiêu;
- Độ mạnh (*độ lớn, magnitude*);
- Cường độ chấn động (*intensity*) ở chấn tâm;
- Cơ cấu chấn tiêu.

4.1.3.1 Chấn tiêu và chấn tâm động đất

Chấn tiêu (focus, hypocenter) là vị trí khởi đầu của một trận động đất. Năng lượng được giải phóng đầu tiên ở vị trí này. Hình chiếu theo phương thẳng đứng của chấn tiêu lên bề mặt Trái Đất được gọi là *chấn tâm (epicenter)*. Khoảng cách từ chấn tiêu tới chấn tâm gọi là *độ sâu chấn tiêu*.



Hình 4.5. Chấn tiêu và chấn tâm

4.1.3.2 Độ mạnh động đất

Khái niệm *độ mạnh* (còn gọi là *độ lớn* hay *magnitude*) được dùng để định lượng năng lượng giải phóng trong một trận động đất. Một trận động đất giải phóng nhiều năng lượng, tức magnitude lớn, không nhất thiết gây ra thiệt hại lớn. Ví dụ trường hợp động đất lớn nhưng nằm ở vùng không có người sinh sống hay động đất nằm quá

sâu trong lòng đất thì mức thiệt hại sẽ hạn chế. Mức độ gây thiệt hại của động đất được biểu thị bởi đại lượng *cường độ (intensity)*, sẽ trình bày trong phần kế tiếp.

Độ mạnh động đất thường được ước lượng gián tiếp thông qua việc phân tích *băng ghi chuyển động nền* hay *giản đồ địa chấn (accelerogram)*. Có nhiều cách đo năng lượng động đất, mỗi cách có ưu nhược điểm riêng và cho một loại magnitude khác nhau.

Một số thang đo độ mạnh động đất được sử dụng phổ biến gồm: thang Richter, thang đo sóng mặt, thang đo sóng khối và thang đo mô men. Phần tiếp theo khái quát định nghĩa và đặc trưng cơ bản của một số thang đo magnitude phổ biến:

M_L : Độ mạnh động đất theo *thang đo Richter*, M_L , được xác định bằng cách lấy lô-ga-rít cơ số 10 của biên độ băng ghi chuyển động kim đo từ máy đo Wood-Anderson đặt cách chấn tâm 100 km với biên độ kim tính bằng micro-mét. Độ mạnh Richter còn gọi là *độ mạnh địa phương*, phù hợp để biểu thị độ lớn các trận động đất nông ở khoảng cách 600 km từ vị trí đo đạc. M_L là thang đo phổ biến nhất nhưng không phù hợp để biểu thị độ lớn động đất có độ mạnh từ 6 trở lên.

M_S : Độ mạnh động đất theo *thang đo sóng mặt* được xác định bởi $M_S = \log A + 1,66 \log \Delta + 2,0$. Với A là biên độ chuyển dịch cực đại của nền đất tính theo micro-mét, Δ là khoảng cách chấn tâm tính theo độ. Vì A là biên độ dịch chuyển dịch của nền chứ không phải chuyển dịch của kim máy đo như trường hợp thang đo Richter nên M_S không phụ thuộc loại thiết bị đo. M_S phù hợp để

biểu thị độ lớn động đất nông và xa (độ sâu chấn tiêu không quá 70 km, xa hơn 1000 km) với độ lớn từ trung bình đến lớn.

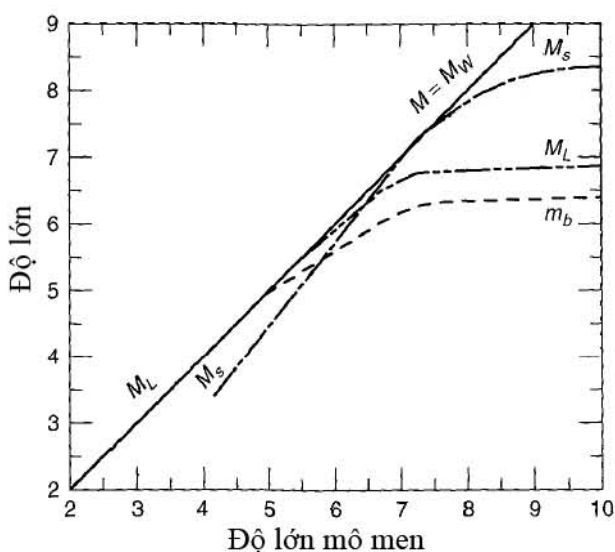
m_b : Độ mạnh động đất theo thang đo sóng khối được xác định bởi $m_b = \log A - \log T + 0,01\Delta + 5,9$. Với A là biên độ sóng P theo đơn vị micro-mét và T là chu kỳ sóng P . m_b phù hợp để biểu thị độ lớn động đất nông.

Các cách xác định độ lớn động đất vừa nêu đều dựa vào việc phân tích băng ghi chuyển động nền. Hạn chế của phương pháp này là khi độ lớn động đất tăng đến một mức độ nhất định thì thiết bị không còn đủ nhạy để thể hiện sự khác biệt trên giản đồ gia tốc. Hiện tượng này được gọi là hiện tượng bão hòa của thang đo động đất. M_L và m_b bão hòa ở độ lớn từ 6 đến 7. M_S bão hòa ở độ lớn 8. Để tránh hiện tượng bão hòa, người ta sử dụng thang đo mô-men, M_W .

M_W : Độ mạnh mô-men, được xác định bởi $M_W = \frac{\log M_0}{1,5} - 10,7$.

Với $M_0 = \mu A \bar{D}$, μ đặc trưng cho cường độ vật liệu tại vị trí đứt gãy, A là diện tích mặt đứt gãy và $\bar{D}$ là độ dịch trượt trung bình. $\bar{D}$ có thể được xác định từ các máy đo chu kỳ lớn đặt rất xa chấn tâm. Việc xác định các giá trị μ và A là khó khăn chủ yếu trong khi dùng M_W . Để hạn chế sự phức tạp này, Bolt (1989) khuyến cáo có thể dùng M_L hoặc m_b để biểu thị độ lớn của động đất nông có magnitude từ 3 đến 7, M_S phù hợp biểu thị magnitude 5 đến 7,5, còn M_W chỉ dùng để biểu thị động đất có magnitude lớn hơn 7,5.

Trước khi bị bão hòa, magnitude có được từ các thang đo khác nhau là gần giống nhau.



Hình 4.6. So sánh các thang đo độ lớn động đất

4.1.3.3 Cường độ động đất

Cường độ (intensity) là thang đo sức phá hủy của động đất tại một khu vực địa lý cụ thể. Cường độ động đất được xác định định tính thông qua việc quan sát hậu quả động đất đối với công trình, môi trường cũng như khảo sát cảm nhận động đất của người dân trong khu vực quan tâm. Có nhiều thang đo cường độ động đất như thang Mercalli cải biên (Modified Mercalli, MM) được dùng phổ biến ở Bắc Mỹ, thang Medvedev-Spoonheuer-Karnik (MSK) được dùng phổ biến ở Liên Xô cũ và châu Âu hay thang Japanese Meteorological Agency (JMA) của cơ quan khí tượng Nhật Bản. Intensity luôn là số nguyên vì đây là con số định tính.

Bảng 4.1. Thang cường độ động đất MSK-64

Cấp động đất	Cường độ động đất	Hậu quả tác động của động đất		
		Lên con người	Lên công trình	Lên môi trường
I	Không đáng kể	Không cảm nhận được		
II	Rất nhẹ	Cảm nhận rất nhẹ		
III	Nhẹ	Chủ yếu những người đang nghỉ ngơi mới cảm nhận được		
IV	Hơi mạnh	Những người ở trong nhà cảm nhận được	Kính cửa sổ bị rung	
V	Tương đối mạnh	Những người ở trong và ngoài nhà cảm nhận được, người đang ngủ thức dậy	Các đồ vật treo đựng đĩa, các bức tranh treo trên tường bị dịch chuyển	
VI	Mạnh	Nhiều người hoảng sợ	Kết cấu bị hư hỏng nhẹ, các vết nứt nhỏ ở lớp trát	Một vài vết nứt nhỏ trên nền đất ướt
VII	Rất mạnh	Nhiều người chạy ra khỏi nhà	Hư hỏng lớn ở kết cấu, xuất hiện vết nứt ở tường và ống khói	Đất ở các sườn dốc bị trượt
VIII	Thiệt hại	Tất cả mọi người hoảng sợ	Nhà bị hư hại, xuất hiện vết nứt lớn trong khối xây, tường chắn mái và đầu hồi bị đổ	Mực nước giếng thay đổi, đường đắp bị trượt

Cấp động đất	Cường độ động đất	Hậu quả tác động của động đất		
		Lên con người	Lên công trình	Lên môi trường
IX	Thiệt hại lớn	Sợ hãi	Nhà bị hư hỏng ở diện rộng, tường và mái bị đổ	Nền đất bị nứt, bị trượt
X	Cực kỳ thiệt hại	Sợ hãi bao trùm	Nhà bị hư hỏng toàn bộ, nhiều nhà bị đổ	Bề mặt đất bị thay đổi, xuất hiện nhiều giếng nước mới
XI	Hủy diệt	Sợ hãi bao trùm	Các công trình xây dựng chắc chắn bị hư hỏng nghiêm trọng	Bề mặt đất bị thay đổi, xuất hiện nhiều giếng nước mới
XII	Hủy diệt toàn bộ	Sợ hãi bao trùm	Nhà và các công trình xây dựng khác bị đổ hoàn toàn	Bề mặt đất bị thay đổi, xuất hiện nhiều giếng nước mới

4.1.4 Hoạt động địa chấn trên lãnh thổ Việt Nam

Việt Nam không nằm trên rìa các mảng thạch quyển mà nằm trọn vẹn trên mảng Á-Âu (Eurasian plate) (Hình 4.2). Tuy nhiên, lãnh thổ nước ta có mạng lưới đứt gãy địa chất phức tạp với nhiều đứt gãy có khả năng sinh chấn. Động đất ở Việt Nam hầu hết là động đất nông với độ sâu chấn tiêu nhỏ hơn 60 km, tức nằm gần mặt đất nên mặc dù có magnitude không lớn, động đất có thể có mức phá hoại đáng kể.

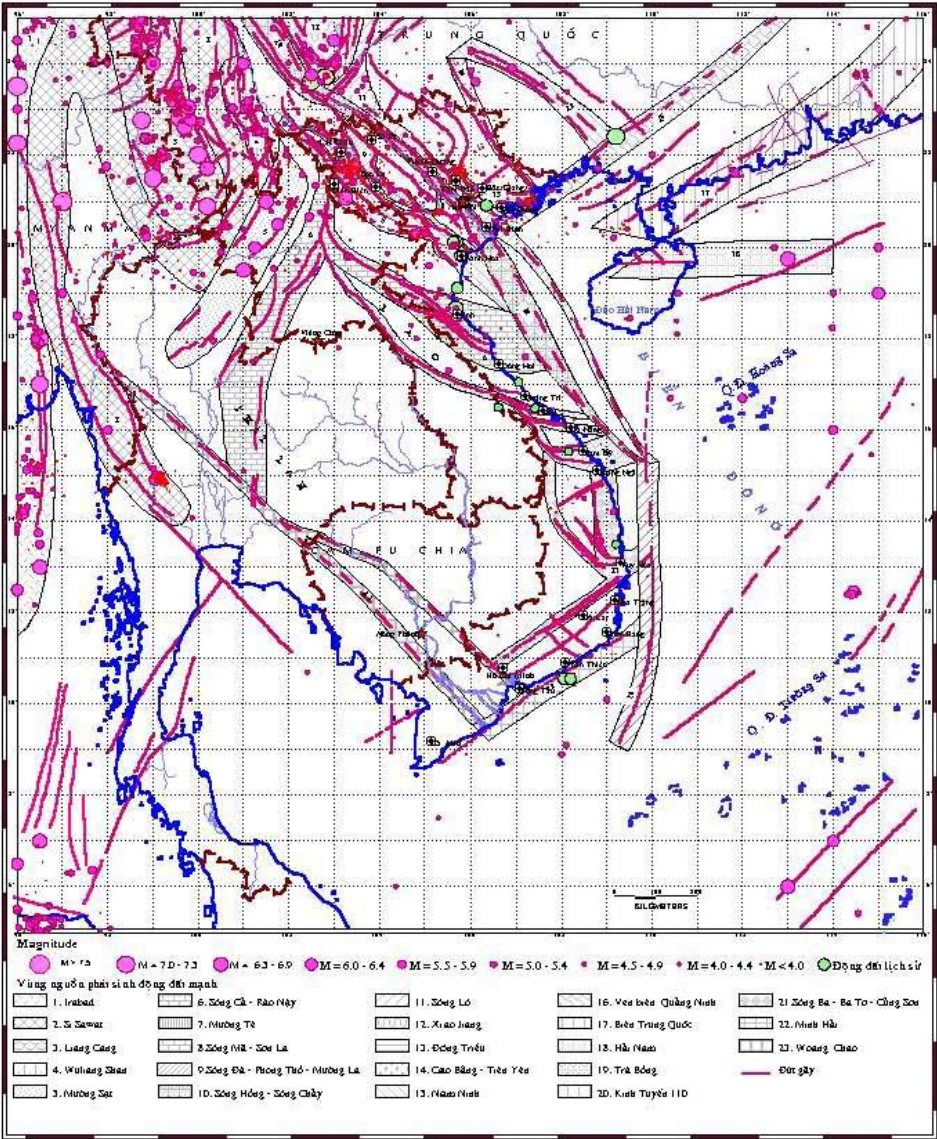
Đến hết năm 2010, danh mục động đất trên lãnh thổ Việt Nam và vùng kế cận của Viện Vật lý Địa cầu đã ghi nhận 977 trận động đất

có magnitude trên 4,0. Danh mục này được xây dựng từ các tài liệu lịch sử, điều tra trong nhân dân và ghi được qua hệ thống đài trạm trong nước sau đó đối chiếu với các cơ sở dữ liệu của các tổ chức quốc tế và nước ngoài (ISC, NOAA và NEIC). Đa số các trận động lớn xảy ra ở phía Bắc. Hai trận động đất mạnh nhất ghi nhận được từ trước đến nay là động đất Điện Biên năm 1935 (*magnitude 6,8*) và động đất Tuần Giáo năm 1983 (*magnitude 6,7*). Động đất tiêu biểu ở khu vực miền Trung là hai trận động đất Sông Cầu năm 1970 và 1972 (*cùng magnitude 5,3 và intensity VII ở khu vực chấn tâm*). Khu vực phía Nam có các đứt gãy sinh chấn đáng chú ý ngoài khơi vùng biển từ Phan Thiết đến Vũng Tàu. Từ năm 2005 đến nay khu vực này đã xảy ra nhiều trận động đất có magnitude từ 5,0 đến 5,5.

Hiện nay, tiêu chuẩn thiết kế công trình chịu động đất hiện hành tại Việt Nam là TCXDVN 9386:2012. Tiêu chuẩn này được biên soạn trên cơ sở chấp nhận tiêu chuẩn châu Âu, Eurocode 8, có bổ sung và thay thế các phần mang tính đặc thù Việt Nam. Một nội dung bổ sung quan trọng là bản đồ phân vùng gia tốc nền trên toàn lãnh thổ Việt Nam. Bản đồ cung cấp giá trị gia tốc nền tham chiếu a_{gR} dưới dạng các bản đồ tỷ lệ 1:1.000.000 ứng với các chu kỳ lặp 500, 1000 và 2500 năm. Cùng với quy định giá trị a_{gR} , TCXDVN 9386:2012 còn quyết định sử dụng hình dạng phổ phản ứng Loại 1 (Type 1) trong Eurocode 8, loại phổ được khuyến khích sử dụng cho các vùng có khả năng chịu động đất với $M_s \geq 5,5$. Gia tốc nền tham chiếu và hình dạng phổ là hai giá trị đầu vào quan trọng cho

CHƯƠNG 4: PHÂN TÍCH KẾT CẤU CHỊU ĐỘNG ĐẤT

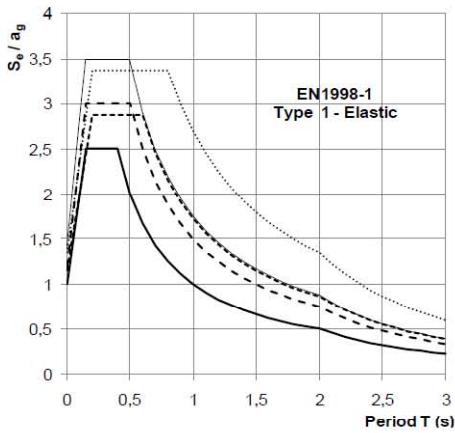
bài toán thiết kế công trình chịu động đất. Phần 4.2 trình bày ở phần tiếp theo trình bày cách sử dụng các giá trị này vào việc dự đoán ứng xử và thiết kế công trình chịu động đất.



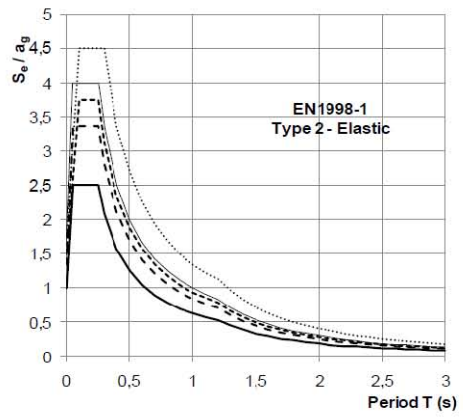
Hình 4.7. Bản đồ địa chấn lãnh thổ Việt Nam và khu vực lân cận



Hình 4.8. Thiệt hại do động đất Thín Tóc tại Điện Biên (2001)



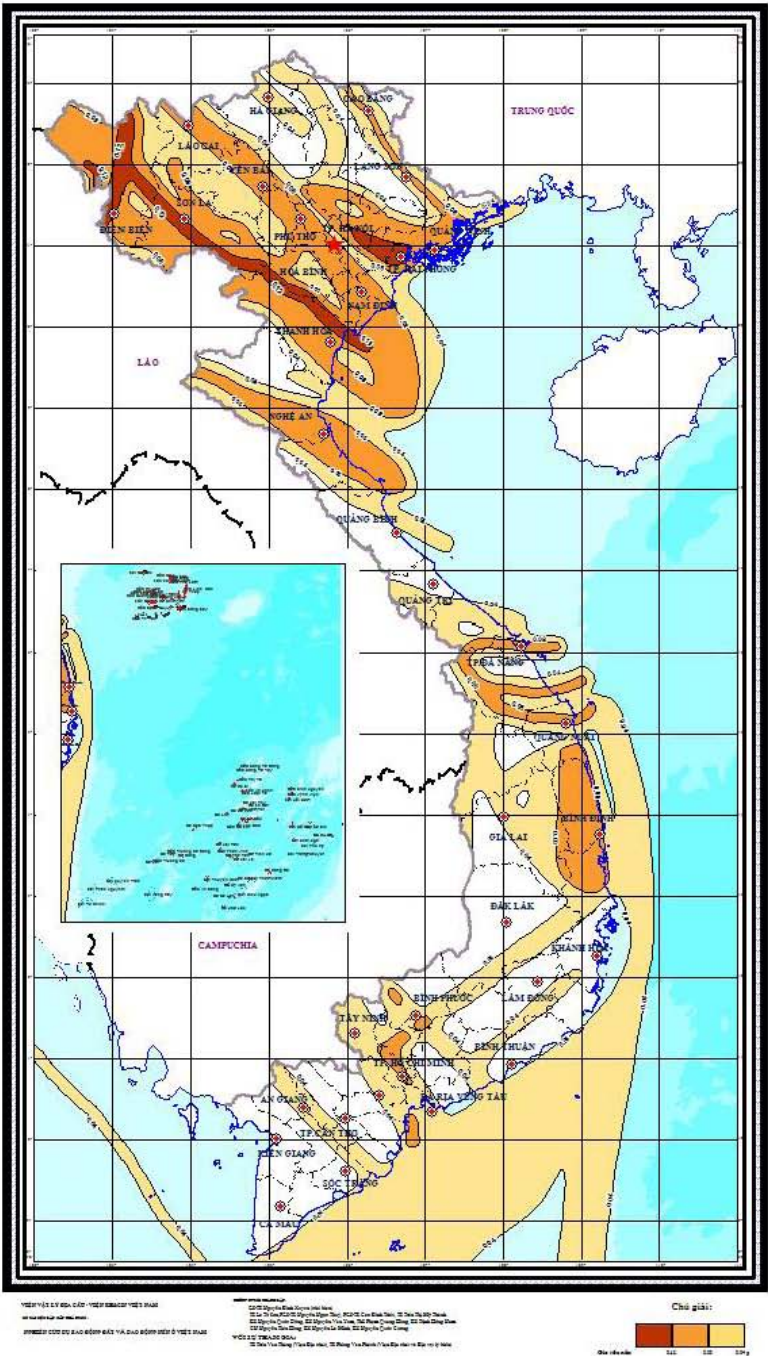
(a) Loại 1 – $M_s \geq 5,5$



(b) Loại 2 – $M_s < 5,5$

Hình 4.9. Hình dạng phổ được đề xuất trong tiêu chuẩn châu Âu

BẢN ĐỒ PHÂN VÙNG GIA TỐC NỀN LÃNH THỔ VIỆT NAM
Chu kỳ lặp lại 500 năm, nền A



Hình 4.10. Bản đồ phân vùng gia tốc nền

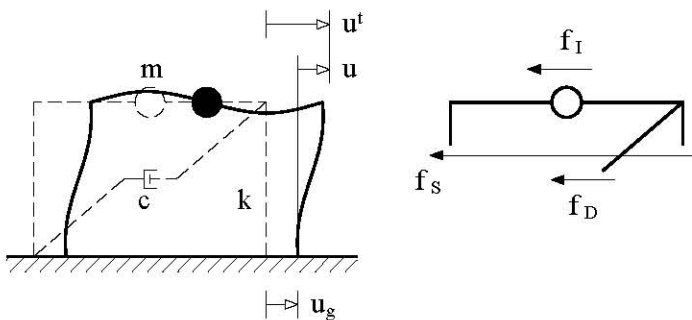
4.2 PHÂN TÍCH KẾT CẤU ĐÀN HỒI CHỊU TÁC ĐỘNG CỦA DAO ĐỘNG NỀN

Phần 4.2 trình bày cơ sở của phương pháp phổ phản ứng, phương pháp đơn giản hóa được dùng phổ biến trong phân tích ứng xử công trình chịu dao động nền. Phần này bắt đầu từ bài toán xác định ứng xử theo thời gian của hệ đàn hồi một bậc tự do chịu dao động nền (4.2.1) dựa theo kiến thức đã trình bày trong chương 2. Cùng bài toán này sẽ được giải quyết bằng phương pháp phổ phản ứng trong phần 4.2.2. Phần 4.2.3 giới thiệu phổ phản ứng theo tiêu chuẩn Việt Nam hiện hành. 4.3.4 mở rộng phương pháp phổ phản ứng cho bài toán hệ đàn hồi nhiều bậc tự do.

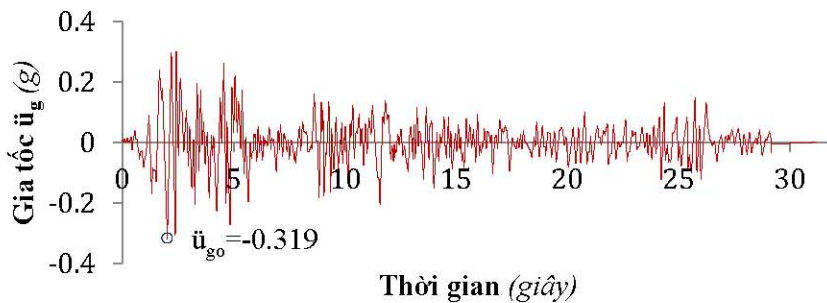
4.2.1 Phản ứng của hệ đàn hồi một bậc tự do chịu dao động nền

Xét nhà một tầng một nhịp được đơn giản hóa thành hệ một bậc tự do như *Hình 4.11* chịu tác động của chuyển vị nền, u_g . Chuyển vị tuyệt đối (so với vị trí ban đầu) của khối lượng m được ký hiệu là u^t . Chuyển vị tương đối giữa khối lượng m và nền đất được ký hiệu là u . Tại thời điểm t , quan hệ giữa các giá trị chuyển vị là:

$$u^t(t) = u(t) + u_g(t) \quad (4.1)$$



Hình 4.11. Hệ một bậc tự do chịu dao động nền



Hình 4.12. Ví dụ về băng ghi dao động nền $\ddot{u}$ - Băng ghi hướng Bắc - Nam động đất El Centro, California, Hoa Kỳ năm 1940

Áp dụng nguyên lý D'Alembert đã trình bày trong chương 2 để xây dựng phương trình chuyển động:

$$f_I + f_D + f_S = 0 \quad (4.2)$$

với f_I là lực quán tính, phụ thuộc vào chuyển vị tuyệt đối

$$f_I = m\ddot{u}^i \quad (4.3)$$

f_S, f_D lần lượt là lực đàn hồi và lực cản, phụ thuộc vào chuyển vị tương đối u

$$f_S = ku \quad (4.4)$$

$$f_D = c\dot{u} \quad (4.5)$$

Thế các phương trình (4.1), (4.3), (4.4) và (4.5) vào phương trình (4.2) được:

$$m\ddot{u} + c\dot{u} + ku = -m\ddot{u}_g(t) \quad (4.6)$$

Phương trình (4.6) cho thấy sự tương đồng giữa phương trình chuyển động của hệ chịu dao động nền u_g và một hệ tương đương không chịu dao động nền (chân hệ đứng yên) nhưng chịu ngoại lực cưỡng bức $p_{eff}(t) = -m\ddot{u}_g(t)$.

Chia hai vế của phương trình (4.6) cho khối lượng :

$$\ddot{u} + 2\zeta\omega_n\dot{u} + \omega_n^2u = -\ddot{u}_g(t) \quad (4.7)$$

Phương trình (4.7) cho thấy phản ứng của hệ phụ thuộc vào hai đặc trưng động học của bản thân hệ: tần số dao động riêng ω_n và hệ số cản ζ . Do đó, quan hệ trên có thể biểu diễn dưới dạng hàm số $u = u(t, \omega_n, \zeta)$ hoặc $u = u(t, T_n, \zeta)$ với $T_n = 2\pi / \omega_n$. Nếu hai hệ bất kỳ có cùng thuộc tính T_n và ζ thì sẽ có cùng chuyển vị phản ứng (deformation response) mặc dù hệ này có thể có khối lượng lớn hơn hoặc cứng hơn hệ kia.

Phương trình (4.7) có thể được giải bằng các phương pháp số như tích phân Duhamel, sai phân trung tâm hay gia tốc trung bình. Kết quả của bài toán phân tích là phản ứng của hệ, bao gồm:

- Chuyển vị tương đối $u(t)$
- Vận tốc tương đối $\dot{u}(t)$
- Gia tốc tương đối $\ddot{u}(t)$
- Chuyển vị tuyệt đối $u^t(t)$
- Vận tốc tuyệt đối $\dot{u}^t(t)$
- Gia tốc tuyệt đối $\ddot{u}^t(t)$

Trong các đại lượng đặc trưng trên thì chuyển vị tương đối $u(t)$ (chuyển vị của khối lượng m so với đất) thường là đại lượng được quan tâm nhiều nhất đối với ngành công trình vì đại lượng này có liên hệ trực tiếp đến nội lực trong kết cấu. Xét ví dụ khung một tầng

một nhịp trên *Hình 4.11*, khi biết được chuyển vị tương đối $u(t)$, người ta có thể tính được lực cắt, mô men trong dầm và cột của hệ khung tại mỗi thời điểm t . Các đại lượng đặc trưng phản ứng còn lại thường đóng vai trò thứ yếu hơn. Ví dụ: chuyển vị tuyệt đối $u'(t)$ có thể cần thiết cho việc thiết kế khoảng cách tối thiểu giữa các toà nhà để chúng không bị va đập vào nhau khi động đất; gia tốc tuyệt đối $\ddot{u}(t)$ có thể cần thiết cho việc thiết kế hạn chế hư hỏng đối với các thiết bị nhạy cảm với gia tốc.

Việc tính nội lực trong hệ đàn hồi khi biết $u(t)$ có thể được thực hiện bằng phương pháp *tính lực ngang tương đương*. Theo phương pháp này, nội lực và ứng suất trong hệ tại thời điểm t được xác định bằng cách thực hiện phân tích tĩnh kết cấu chịu ngoại lực f_s .

$$f_s(t) = ku(t) \quad (4.8)$$

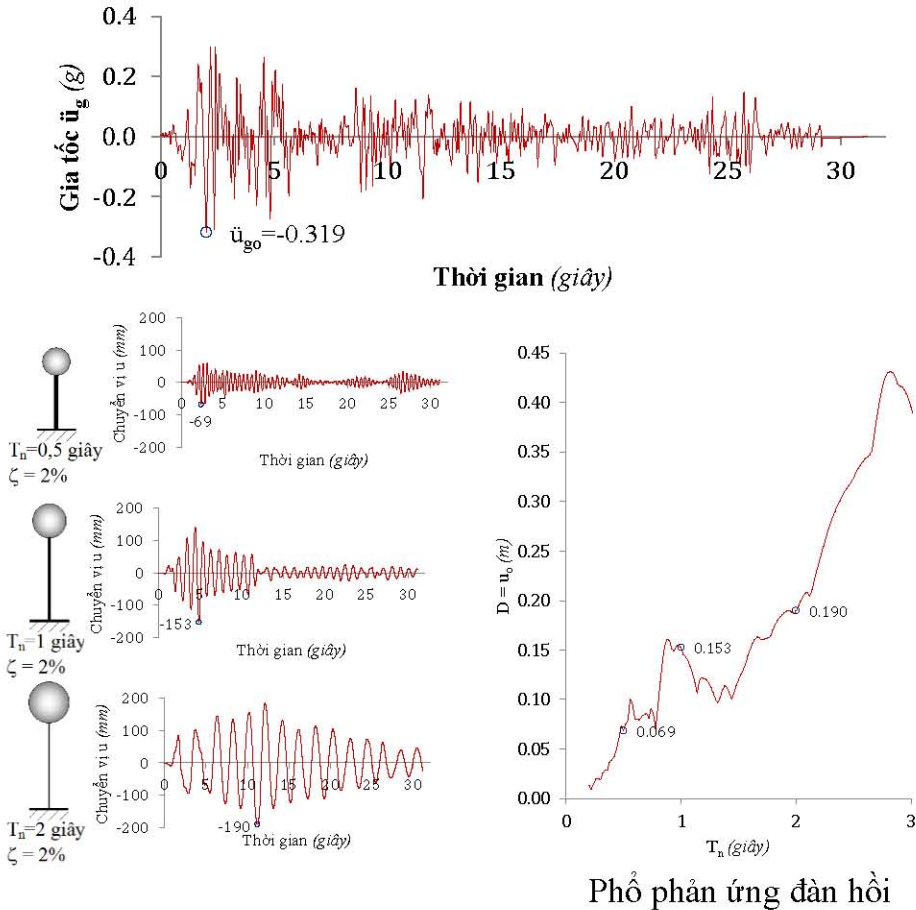
4.2.2 Phổ phản ứng đàn hồi ứng với một dao động nền cụ thể

Như đã trình bày ở phần trên, phản ứng của hệ đàn hồi một bậc tự do chịu dao động nền $u_g(t)$ có thể biểu diễn dưới dạng hàm số $u = u(t, T_n, \zeta)$. Nếu chỉ quan tâm đến phản ứng cực đại trong suốt khoảng thời gian kết cấu dao động thì biến thời gian, t , sẽ được lược bớt:

$$u_o = \max_t |u(t)| = \max_t |u(t, T_n, \zeta)| = u_o(T_n, \zeta) \quad (4.9)$$

Với một giá trị độ cản ζ cố định thì quan hệ $u_o = u_o(T_n, \zeta)$ có thể được biểu diễn trên đồ thị (T_n, u_o) như trên *Hình 4.13*. Đồ thị

này tóm tắt các kết quả giải phương trình chuyển động (4.7) với một chuỗi các hệ một bậc tự do có chu kỳ dao động riêng T_n khác nhau và được gọi là *phổ phản ứng*.



Hình 4.13. Xây dựng phổ phản ứng chuyển vị

Trong ba loại phổ nói trên, phổ phản ứng chuyển vị tương đối $u_o(T_n, \zeta)$ là quan trọng nhất vì có thể cung cấp tất cả các thông tin cần thiết cho việc xác định biến dạng và nội lực cực đại trong hệ, nội dung thiết yếu nhất khi tính toán công trình chịu động đất. Để

các công thức trở nên đơn giản hơn, người ta dùng D thay cho $u_o(T_n, \zeta)$ để ký hiệu phổ phản ứng chuyển vị tương đối.

Để xác định nội lực, biến dạng lớn nhất trong hệ khi chịu $u_g(t)$, người ta thường sử dụng cách phân tích tĩnh hệ kết cấu chịu lực tĩnh ngang tương đương cực đại f_{so} .

$$f_{so} = ku_o = kD \quad (4.10)$$

Đặt $A = \omega_n^2 D = \frac{k}{m} D$, gọi là *gia tốc phản ứng giả* hay *gia tốc giả* (*pseudo acceleration response*). Khi đó:

$$f_{so} = mA = \frac{w}{g} A \quad (4.11)$$

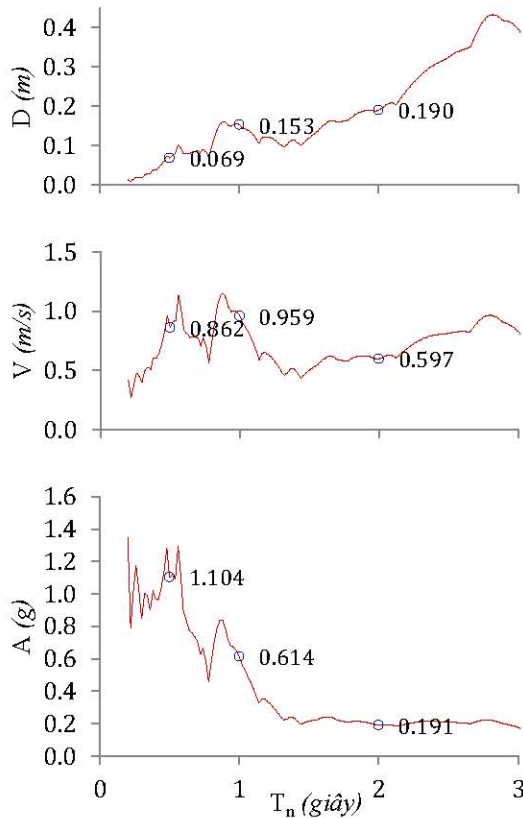
Trong đó, w là trọng lượng của kết cấu và g là gia tốc trọng trường. Cần lưu ý phân biệt gia tốc giả A và gia tốc phản ứng cực đại của hệ $u_g(t)$. A mặc dù có đơn vị của gia tốc nhưng được xác định từ phản ứng chuyển vị tương đối (thực). Đại lượng này liên quan trực tiếp và là công cụ để xác định lực tĩnh ngang tương đương f_{so} hoặc lực cắt đáy $V_{bo} = f_{so}$ chứ không biểu thị một gia tốc nào cả. Đồ thị biểu diễn A như là một hàm số của chu kỳ dao động riêng T_n với độ cản ζ cố định được gọi là *phổ phản ứng gia tốc giả* (*pseudo acceleration response spectrum*).

Ngoài phổ phản ứng gia tốc giả, người ta cũng xây dựng *phổ vận tốc giả* (*pseudo-velocity response spectrum*). Với vận tốc giả, V , được định nghĩa:

$$V = \omega_n D = \frac{2\pi}{T_n} D \quad (4.12)$$

Tương tự đối với gia tốc giả, vận tốc giả mặc dù mang đơn vị của vận tốc nhưng không phải là vận tốc phản ứng mà là đại lượng được xác định từ chuyển vị và liên quan trực tiếp đến năng lượng biến dạng cực hạn E_{So} .

$$E_{So} = \frac{ku_o^2}{2} = \frac{kD^2}{2} = \frac{k(V/\omega_n)^2}{2} = \frac{mV^2}{2} \quad (4.13)$$



Hình 4.14. Phổ phản ứng chuyển vị tương đối - D , vận tốc giả - V và gia tốc giả - A

Quan hệ giữa ba đại lượng D , V và A :

$$\frac{A}{\omega_n} = V = \omega_n D \quad \text{hoặc} \quad \frac{T_n}{2\pi} A = V = \frac{2\pi}{T_n} D \quad (4.14)$$

Quy trình xây dựng phổ phản ứng đàn hồi hệ một bậc tự do khi cho biết gia tốc nền $\ddot{u}_g(t)$ được tóm tắt như sau:

Bước 1: Thể hiện $\ddot{u}_g(t)$ dưới dạng số. Tức là biểu diễn $\ddot{u}_g(t)$ dưới dạng một chuỗi các giá trị gia tốc ứng với các mốc thời gian liên tục và cách nhau một khoảng Δt , thông thường, $\Delta t = 0,02$ giây.

Bước 2: Chọn giá trị chu kỳ dao động riêng T_n và tỷ số cản ζ .

Bước 3: Sử dụng một phương pháp số phù hợp để tính phản ứng chuyển vị tương đối $u(t)$ cho hệ một bậc tự do chọn trong bước 2 khi chịu tác động của gia tốc nền $\ddot{u}_g(t)$.

Bước 4: Xác định u_o , giá trị lớn nhất của $u(t)$ trong suốt quá trình phản ứng.

Bước 5: Xác định các tung độ của phổ $D = u_o$, $V = (2\pi / T_n) D$, và $A = (2\pi / T_n)^2 D$.

Bước 6: Lặp lại các bước từ 2 đến 5 với giá trị T_n và ζ khác nhau để bao hàm hết các kết cấu được quan tâm.

Bước 7: Thể hiện kết quả của các bước từ 2 đến 6 trên các biểu đồ tương ứng.

Ví dụ 4.1: Sử dụng bảng tính lập sẵn (tích phân Duhamel) xác định tung độ phổ phản ứng chuyển vị tương đối D , vận tốc giả V và gia tốc giả A cho băng ghi gia tốc nền trận động đất El Centro ứng với các giá trị chu kỳ tự nhiên trên bảng bên dưới. Cho biết tỷ số cản $\zeta = 2\%$. Băng ghi gia tốc *El Centro* có thể tải về từ địa chỉ:

http://nisee.berkeley.edu/data/strong_motion/a.k.chopra/el_centro_data

$T_n(\text{giây})$	0,1	0,25	0,5	1,0	1,5	2,0	2,5	3,0
--------------------	-----	------	-----	-----	-----	-----	-----	-----

Giải:

Lần lượt thế các giá trị chu kỳ dao động tự nhiên trong bảng vào bảng tính để tìm chuyển vị lớn nhất. Kết quả chuyển vị cực đại $D = u_o$ tìm được như sau:

$T_n(\text{giây})$	0,1	0,25	0,5	1,0	1,5	2,0	2,5	3,0
$D(\text{m})$	0,001	0,016	0,067	0,168	0,127	0,258	0,330	0,445

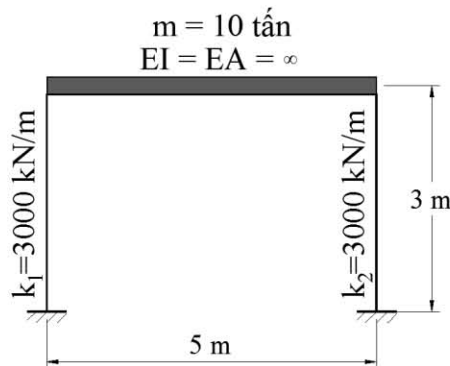
Tung độ phổ vận tốc giả và gia tốc giả được tính từ D theo công thức (4.14): $V = \omega_n D$ hoặc $A = \omega_n^2 D$

Kết quả tính V và A :

$T_n(\text{giây})$	0,1	0,25	0,5	1,0	1,5	2,0	2,5	3,0
$D(\text{m})$	0,001	0,016	0,067	0,168	0,127	0,258	0,330	0,445
$V(\text{m/s})$	0,063	0,402	0,842	1,056	0,532	0,811	0,829	0,932
$A(\text{g})$	0,400	1,030	1,080	0,680	0,230	0,260	0,210	0,200

Kết quả được so sánh với phổ phản ứng hoàn chỉnh (hình 4.14)

Ví dụ 4.2: Sử dụng phổ phản ứng gia tốc giả A trên hình 4.14 để xác định mô men, lực cắt lớn nhất xuất hiện trong khung một tầng, một nhịp trên hình bên dưới. Cho biết: $\zeta = 2\%$, khung làm việc trong giới hạn đàn hồi tuyến tính.



Giải:

Chu kỳ dao động riêng của khung:

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{2 \times 3000}{10}} = 24,5 \text{ rad/s}$$

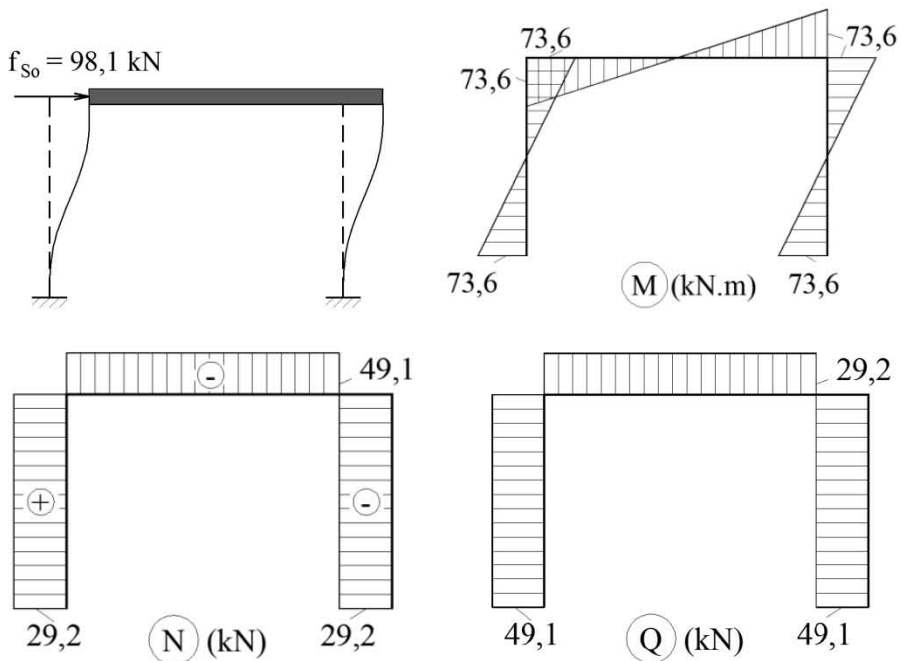
$$T_n = \frac{2\pi}{\omega_n} = \frac{2\pi}{24,5} = 0,257 \text{ giây}$$

với $T_n = 0,257$ và $\zeta = 2\%$, tra phổ phản ứng từ thí dụ 4.1 (hình ...) trên hình 4.14 được gia tốc giả $A \approx 1,0$ g. Tĩnh lực ngang tương đương:

$$f_{so} = mA = 10 \times 1,0 \times g = 98,1 \text{ kN.}$$

Nội lực lớn nhất sinh ra trong hệ do chuyển động nền được tính bằng cách phân tích khung chịu tĩnh lực ngang tương đương f_{so} .

Kết quả phân tích nội lực:



4.2.3 Phổ phản ứng đàn hồi theo TCXDVN 9386 – 2012

Phổ phản ứng đàn hồi vừa trình bày ở phần 4.2.2 được xây dựng từ một dao động nền cụ thể không có tính đại diện cho hệ quả của các trận động đất khác xảy ra tại cùng khu vực. Để thiết kế hay kiểm tra công trình, người ta cần đến một loại phổ có thể đại diện cho xu hướng của các trận động đất có khả năng sẽ xảy ra tại khu vực quan tâm. Phổ như vậy được gọi là *phổ thiết kế đàn hồi (elastic design spectrum)* theo Dynamics of structures: theory and applications to earthquake engineering hay *phổ phản ứng đàn hồi (elastic response spectrum)* theo Eurocode 8 và TCXDVN 9386 – 2012.

Đối với những khu vực như California hay Nhật Bản, nơi đã có nhiều dữ liệu dao động nền được ghi nhận, người ta xây dựng phổ thiết kế đàn hồi bằng cách phân tích những trận động đất trong quá khứ để tìm ra các xu hướng chung của chúng và xem các xu hướng này cũng đại diện cho những trận động đất có thể xảy ra trong tương lai.

Đối với các khu vực không có đủ dữ liệu đo dao động nền (như trường hợp Việt Nam), người ta thường phải sử dụng phổ thiết kế đàn hồi xây dựng cho vùng địa lý khác và hiệu chỉnh lại để kể đến sự khác nhau về magnitude, khoảng cách chấn tiêu, cơ chế chấn tiêu, đặc tính địa chất của các lớp đất đá sóng địa chấn truyền qua, và điều kiện địa chất cục bộ tại vị trí công trình.

Tiêu chuẩn thiết kế công trình chịu động đất hiện hành tại Việt Nam, TCXDVN 9386 – 2012, sử dụng *phổ phản ứng loại 1* của tiêu chuẩn châu Âu, Eurocode 8. Phổ loại 1 được khuyến khích dùng khi đa số động đất trong khu vực có $M_S \geq 5,5$. Sự khác nhau giữa phổ loại 1 và phổ loại 2 thể hiện qua các giá trị S , T_B , T_C và T_D (xem thêm *Bảng 3.2* và *Bảng 3.3* của Eurocode 8).

Phổ phản ứng đàn hồi theo TCXDVN 9386 – 2012:

$$0 \leq T \leq T_B : S_e(T) = a_g \cdot S \cdot \left[1 + \frac{T}{T_B} \cdot (\eta \cdot 2,5 - 1) \right] \quad (4.15)$$

$$T_B \leq T \leq T_C : S_e(T) = a_g \cdot S \cdot \eta \cdot 2,5$$

$$T_C \leq T \leq T_D : S_e(T) = a_g \cdot S \cdot \eta \cdot 2,5 \cdot \left[\frac{T_C}{T} \right]$$

$$T_D \leq T \leq 4s : S_e(T) = a_g \cdot S \cdot \eta \cdot 2,5 \cdot \left[\frac{T_C T_D}{T^2} \right]$$

trong đó

$S_e(T)$ phổ phản ứng đàn hồi

T chu kỳ dao động của hệ tuyến tính một bậc tự do

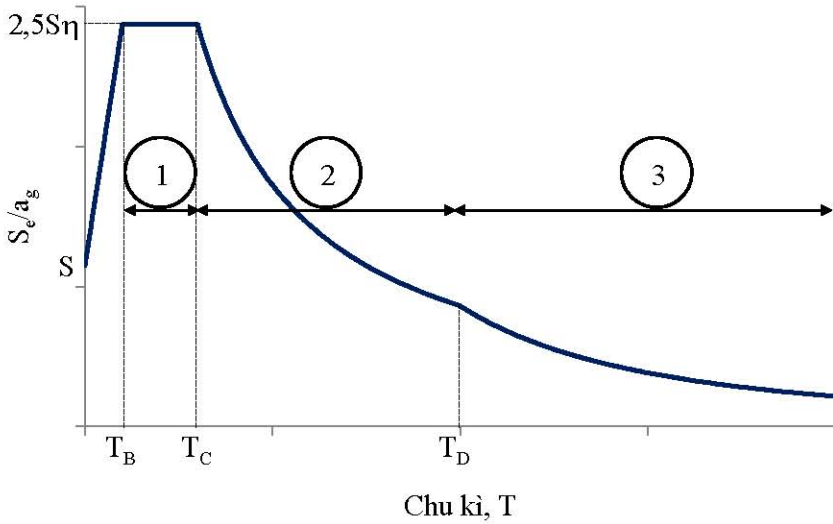
a_g gia tốc nền thiết kế trên nền loại A ($a_g = \gamma_I \cdot a_{gR}$)

T_B, T_C, T_D các giá trị chu kỳ phân vùng gia tốc không đổi, vận tốc không đổi và dịch chuyển không đổi

S hệ số nền

η hệ số điều chỉnh độ cản, $\eta = 10 / (5 + \xi) \geq 0,55$

ξ tỷ số cản nhớt của kết cấu tính bằng phần trăm



Hình 4.15. Hình dạng phổ phản ứng đàn hồi TCXDVN 9386:2012

(1) Vùng gia tốc không đổi

(2) Vùng vận tốc không đổi

(3) Vùng chuyển vị không đổi

4.2.3.1 Tung độ phổ phản ứng đàn hồi S_e

S_e là cách ký hiệu khác của gia tốc giả, A , đã đề cập trong phần 4.2.2. Giá trị này cho phép xác định lực cắt đáy cũng là lực ngang tương đương đối với hệ đàn hồi một bậc tự do.

4.2.3.2 Hoàn hình độ phổ phản ứng đàn hồi T

T là chu kỳ dao động riêng của hệ đàn hồi một bậc tự do đang quan tâm. Giá trị này được ký hiệu là T_n trong phần đầu chương.

Chu kỳ dao động riêng chỉ phụ thuộc vào khối lượng và độ cứng

của hệ đang khảo sát $T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$.

4.2.3.3 Gia tốc nền thiết kế trên nền loại A, a_g

Gia tốc nền thiết kế tại khu vực xây dựng công trình khi chưa xét đến hiện tượng khuếch đại dao động nền do độ cứng đất nền (xem 4.2.3.4).

$$a_g = \gamma_I a_{gR}$$

với γ_I là hệ số tầm quan trọng của công trình, được xác định theo phụ lục F – TCXDVN 9386 – 2012

a_{gR} giá trị gia tốc nền tham chiếu, xác định theo phụ lục H hoặc I – TCXDVN 9386 – 2012

4.2.3.4 Hệ số nền S

Biên độ sóng địa chấn được khuếch đại khi sóng lan truyền từ môi trường đặc chắc như đá granite, bazalt, nơi động đất phát sinh, sang các môi trường rỗng xốp hơn như trầm tích trẻ, nơi xây dựng công trình. Sự chênh lệch về độ đặc chắc của môi trường truyền sóng càng lớn thì mức độ khuếch đại biên độ sóng càng cao. Như vậy, với cùng một trận động đất tại cùng một khu vực địa lý, nền đất mềm sẽ dao động mạnh hơn so với nền đất cứng. Hiện tượng này được kể đến trong phổ phản ứng thông qua hệ số nền S. Hệ số này được xác định từ *Bảng 4.2*.

Bảng 4.2. Giá trị các tham số mô tả phổ phản ứng đàn hồi (loại 1)
(bảng 3.2 TCXDVN 9386 – 2012)

Loại nền đất	S	$T_B(s)$	$T_C(s)$	$T_D(s)$
A	1,0	0,15	0,4	2,0
B	1,2	0,15	0,5	2,0

C	1,15	0,20	0,6	2,0
D	1,35	0,20	0,8	2,0
E	1,4	0,15	0,5	2,0

Việc phân loại nền đất A, B, C, D hoặc E có thể được thực hiện dựa vào vận tốc sóng cắt trung bình $v_{s,30} = \frac{30}{\sum_{i=1}^N \frac{h_i}{v_i}}$, trị số xuyên tiêu

chuẩn N_{SPT} hoặc trị số lực dính C_u của nền đất *Bảng 4.3*.

Bảng 4.3. Các loại nền đất (bảng 3.1 – TCXDVN 9386 – 2012)

Loại	Mô tả	Các tham số		
		$V_{s,30}$ m/s	N_{SPT} nhát/30cm	C_u Pa
A	Đá hoặc các kiến tạo địa chất khác tựa đá, kể cả các đất yếu hơn trên bề mặt với bề dày lớn nhất là 5m.	>800	-	-
B	Đất cát, cuội sỏi rất chặt hoặc đất sét cứng có bề dày ít nhất hàng chục mét, tính chất cơ học tăng dần theo độ sâu.	360-800	>50	>250
C	Đất cát, cuội sỏi chặt, chặt vừa hoặc đất sét cứng có bề dày lớn từ hàng chục tới hàng trăm mét.	180-360	15-50	70-250
D	Đất rời trạng thái từ xốp đến chặt vừa (có hoặc không xen kẹp vài lớp đất dính) hoặc có đa phần đất dính trạng thái từ mềm đến cứng vừa.	<180	<15	<70

Loại	Mô tả	Các tham số		
		$V_{s,30}$ m/s	N_{SPT} nhát/30cm	C_u Pa
E	Địa tầng bao gồm lớp đất trầm tích sông ở trên mặt với bề dày trong khoảng 5-20m có giá trị tốc độ truyền sóng như loại C, D và bên dưới là các đất cứng hơn với tốc độ truyền sóng $v_s > 800\text{m/s}$.			
S_1	Địa tầng bao gồm hoặc chứa một lớp đất sét mềm/bùn (bùn) tính dẻo cao ($PI > 40$) và độ ẩm cao, có chiều dày ít nhất là 10m.	<100 (tham khảo)	-	10-20
S_2	Địa tầng bao gồm các đất dễ hóa lỏng, đất sét nhạy hoặc các đất khác với các đất trong các loại nền A-E hoặc S_1 .			

4.2.3.5 Các giá trị chu kỳ phân vùng phổ T_B , T_C và T_D

Phổ phản ứng đàn hồi theo TCXDVN 9386:2012 (Hình 4.15) gồm bốn đoạn (1), (2), (3) và (4).

- Đoạn (2) ứng với chu kỳ từ T_B đến T_C được gọi là vùng gia tốc không đổi (không phụ thuộc vào T). Gia tốc trong đoạn này chính là gia tốc phản ứng lớn nhất, $RSA_{\max}$ (*maximum spectral acceleration*).

$$A = S_e = 2,5 \cdot \eta \cdot S \cdot a_g = RSA_{\max}$$

- Đoạn (3) ứng với chu kỳ từ T_C đến T_D là vùng vận tốc không đổi.

$$V = \frac{T}{2\pi} \cdot A = \frac{1}{2\pi} \cdot RSA_{\max} \cdot T_C = RSV_{\max}$$

- Đoạn (4) ứng với chu kỳ lớn hơn T_D là vùng chuyển vị, D , không đổi.

$$D = \left(\frac{T}{2\pi} \right)^2 \cdot A = \frac{1}{4\pi^2} \cdot RSA_{\max} \cdot T_C \cdot T_D = RSD_{\max}$$

- Điểm $T = 0$ trên phổ thể hiện hệ có độ cứng vô cùng lớn hoặc không có khối lượng (không có quán tính). Dễ thấy hệ cứng và nhẹ vô cùng sẽ dao động cùng với nền đất. Lúc này gia tốc phản ứng của hệ bằng với gia tốc dao động của nền, $A = S_e = S \cdot a_g$. Giữa hệ và đất không có chuyển vị tương đối, vận tốc tương đối nên $V = 0$ và $D = 0$.

- Đoạn (1) của phổ nối điểm $T = 0$ với đoạn vận tốc không đổi bằng một đoạn thẳng.

4.2.3.6 Hệ số điều chỉnh độ cản η

Hệ số điều chỉnh độ cản được xác định bằng biểu thức:

$$\eta = 10 / (5 + \xi) \geq 0,55$$

với ξ là tỷ số cản nhớt (*viscous damping*)

Chú ý: trong phần đầu của chương 4 cũng như các chương trước, tỷ số cản được ký hiệu là ζ .

Ví dụ 4.3: Xác định phổ phản ứng đàn hồi theo TCXDVN 9386 – 2012 với $\xi = 5\%$ cho một công trình xây dựng tại quận 3, TP. Hồ Chí Minh. Biết: đất nền loại A, hệ số tầm quan trọng 1,25. Xác định nội lực lớn nhất trong khung một tầng, một nhịp ở ví dụ 4.2 sử dụng

phổ phản ứng đàn hồi vừa xây dựng. Cho rằng khung làm việc trong miền đàn hồi tuyến tính.

Giải:

Tra *Bảng 3.2 TCXDVN 9386 – 2012* với đất nền loại A:

Loại nền đất	S	$T_B(s)$	$T_C(s)$	$T_D(s)$
A	1,0	0,15	0,4	2,0

Tra phụ lục I TCXDVN 9386 – 2012 với quận 3 TP.HCM được gia tốc nền: $a_{gR} = 0,0843g$

Gia tốc nền: $a_g = \gamma_I \cdot a_{gR} = 1,25 \times 0,0843 \times 9,81 = 1,034m/s^2$

Hệ số điều chỉnh độ cản: $\eta = 10 / (5 + \xi) = 1 \geq 0,55$

Phổ phản ứng đàn hồi được xác định theo công thức 4.15:

$0 \leq T \leq 0,15$:

$$\begin{aligned}
 S_e(T) &= a_g \cdot S \cdot \left[1 + \frac{T}{T_B} \cdot (\eta \cdot 2,5 - 1) \right] \\
 &= 1,034 \times 1,0 \times \left[1 + \frac{T}{0,15} (1 \times 2,5 - 1) \right] \\
 &= 1,034 \times (1 + 10T)
 \end{aligned}$$

$0,15 \leq T \leq 0,4$:

$$\begin{aligned}
 S_e(T) &= a_g \cdot S \cdot \eta \cdot 2,5 \\
 &= 1,034 \times 1,0 \times 1 \times 2,5 \\
 &= 2,585
 \end{aligned}$$

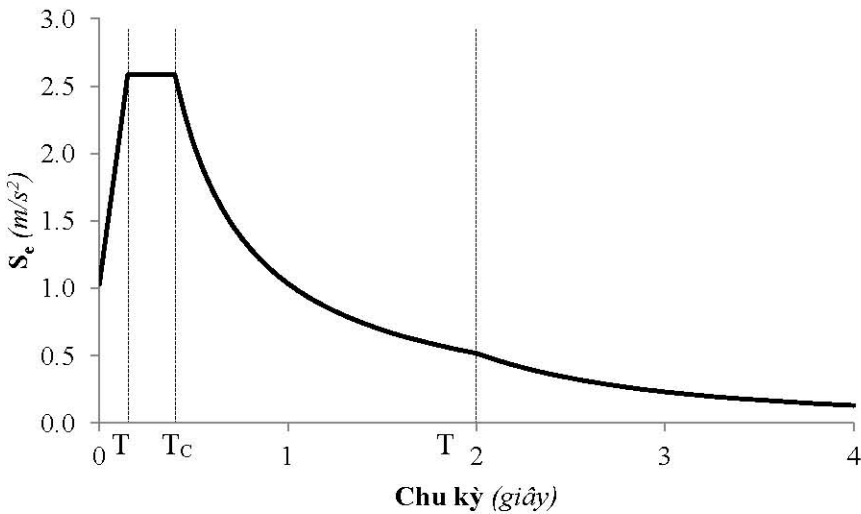
$0,4 \leq T \leq 2,0$:

$$\begin{aligned}
 S_e(T) &= a_g \cdot S \cdot \eta \cdot 2,5 \cdot \left[\frac{T_c}{T} \right] \\
 &= 1,034 \times 1,0 \times 1 \times 2,5 \times \left[\frac{0,4}{T} \right] \\
 &= \frac{1,034}{T}
 \end{aligned}$$

$2 \leq T \leq 4$:

$$\begin{aligned}
 S_e(T) &= a_g \cdot S \cdot \eta \cdot 2,5 \left[\frac{T_c T_D}{T^2} \right] \\
 &= 1,034 \times 1,0 \times 1 \times 2,5 \left[\frac{0,4 \times 2,0}{T^2} \right] \\
 &= \frac{2,068}{T^2}
 \end{aligned}$$

Kết quả được thể hiện trên biểu đồ:



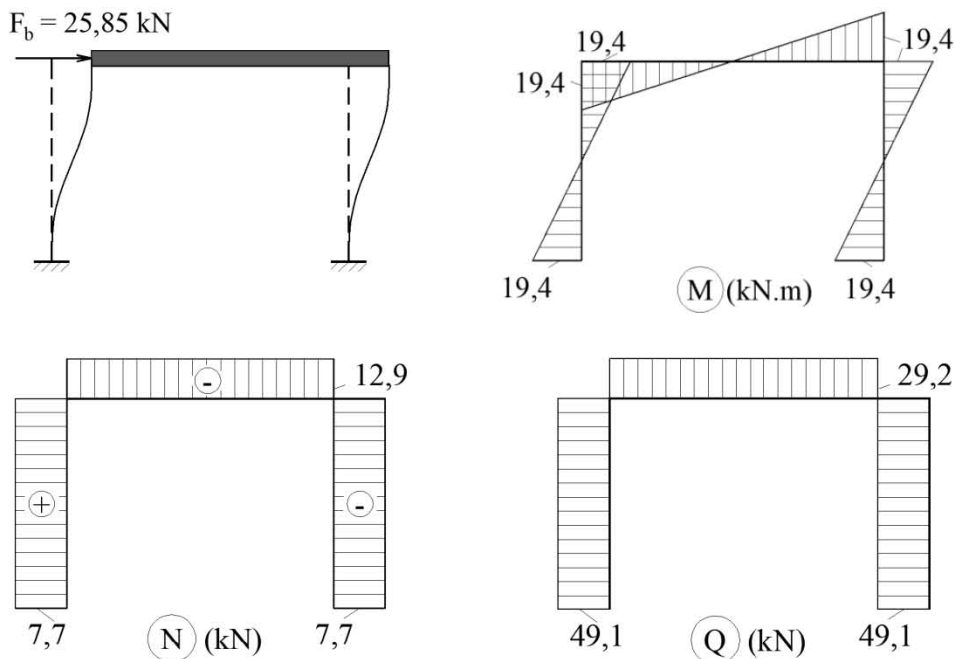
Tung độ phổ phản ứng đàn hồi ứng với kết cấu có chu kỳ 0,257 giây: $S_e = 2,585 m / s^2$.

Tĩnh lực ngang tương đương hay lực cắt đáy:

$$F_b = S_e \cdot m = 2,585 \times 10 = 25,85 \text{ kN.}$$

CHƯƠNG 4: PHÂN TÍCH KẾT CẤU CHỊU ĐỘNG ĐẤT

Nội lực lớn nhất trong khung khi chịu tác động được quy định theo TCXDVN 9386 – 2012 với giả thiết khung phản ứng đàn hồi:



4.2.4 Phân tích hệ đàn hồi nhiều bậc tự do chịu dao động nền

Phương pháp *chồng chất dạng dao động (mode superposition method)* trình bày ở mục 3.4 có thể được sử dụng kết hợp với phổ phản ứng hệ một bậc tự do để xác định phản ứng động của hệ nhiều bậc tự do. Phương pháp này được gọi là *phương pháp phổ phản ứng dạng dao động (modal response spectrum)*. Trình tự phương pháp:

Bước 1: Phương trình vi phân chuyển động của hệ với các tọa độ hình học khi chịu dao động nền $\ddot{u}_g(t)$:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{u}} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{u}} + \mathbf{K}\mathbf{u} = -\mathbf{M}\mathbf{1}\ddot{u}_g(t) \quad (4.16)$$

với $\mathbf{1}$ là véc tơ bậc N có tất cả các dòng đều mang giá trị 1.

Chú ý: Phương trình (4.15) là dạng phương trình dao động đơn giản nhất. Phương trình này chỉ đúng khi tất cả các bậc tự do động đều cùng phương với phương dao động nền. Các trường hợp phức tạp hơn không thuộc phạm vi của chương này. Phương trình (4.15) là một trường hợp riêng của phương trình (3.169)

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{v}} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{v}} + \mathbf{K}\mathbf{v} = \mathbf{p}(t) \quad (3.169)$$

$$\text{với} \quad \mathbf{p}(t) = -\mathbf{M}\mathbf{1}\ddot{u}_g(t) \quad (4.17)$$

Bước 2: Phân tích dạng chính và tần số bằng phương trình trị riêng

$$[\mathbf{K} - \omega^2 \mathbf{M}] \mathbf{v} = 0 \quad (3.170)$$

Từ đó xác định được ma trận dạng chính $\boldsymbol{\Phi}$ và véc-tơ tần số $\boldsymbol{\omega}$.

Bước 3: Khối lượng và tải trọng suy rộng

$$M_n = \boldsymbol{\Phi}_n^T \mathbf{M} \boldsymbol{\Phi}_n \quad (3.171)$$

$$P_n(t) = \boldsymbol{\Phi}_n^T \mathbf{p}(t) \quad (3.172)$$

$$\Leftrightarrow P_n(t) = -\boldsymbol{\Phi}_n^T \mathbf{M} \mathbf{1} \ddot{u}_g(t) = -L_n \ddot{u}_g(t) \quad (4.18)$$

với $L_n = \boldsymbol{\Phi}_n^T \mathbf{M} \mathbf{1}$, Đặt $\Gamma_n = \frac{L_n}{M_n}$

Chú ý: M_n , $P_n(t)$ và L_n không phải là ma trận mà là các con số đại số.

Bước 4: Phương trình chuyển động tách rời

$$\ddot{Y}_n + 2\xi_n\omega_n\dot{Y}_n + \omega_n^2 Y_n = \frac{1}{M_n} P_n(t) \quad (3.173)$$

$$\ddot{Y}_n + 2\xi_n\omega_n\dot{Y}_n + \omega_n^2 Y_n = \Gamma_n \ddot{u}_g(t) \quad (4.19)$$

Đến đây, hệ N phương trình vi phân đã được tách rời thành N phương trình vi phân một ẩn (Y_n). Các đại lượng trong phương trình (3.173) và (4.18) đều ở dạng số, không còn dạng ma trận. Như vậy, việc giải bài toán hệ nhiều bậc tự do đã được chuyển thành việc giải nhiều bài toán hệ một bậc tự do.

Bước 5: Phản ứng chuyển vị của dạng chính

Phương trình (4.18) đồng dạng với phương trình (4.7) – phương trình chuyển động của hệ đàn hồi một bậc tự do chịu dao động nền. Phương trình (4.7) được viết lại với ký hiệu D_n được dùng thay cho u nhằm nhấn mạnh mối liên hệ với mode thứ n .

$$\ddot{D}_n + 2\xi_n\omega_n\dot{D}_n + \omega_n^2 D_n = \ddot{u}_g(t) \quad (4.7)$$

Phương trình (4.18) và (4.7) đồng dạng nên người ta có thể giải (4.7) để tìm D_n trước. Sau đó, phản ứng dạng chính được tính:

$$Y_n(t) = \Gamma_n D_n(t) \quad (4.20)$$

Bước 7: Lực động đất tương đương của dạng chính

$$\mathbf{f}_n(t) = \mathbf{s}_n A_n(t) \quad (4.21)$$

với $\mathbf{s}_n = \Gamma_n \mathbf{M} \varphi_n$ được gọi là véc tơ phân bố không gian

A_n là gia tốc giả của hệ (ξ_n, ω_n) với dao động nền $\ddot{u}_g(t)$

Bước 8: Nội lực, ứng suất và các giá trị phản ứng khác

Để đơn giản trong diễn đạt, nội lực, ứng suất và các giá trị phản ứng khác được ký hiệu chung là r .

$$r(t) = \sum_{n=1}^N r_n(t) = \sum_{n=1}^N r_n^{st} A_n(t) \quad (4.22)$$

với $r_n(t)$ là phần đóng góp của mode n vào tổng phản ứng

r_n^{st} là giá trị phản ứng không phụ thuộc thời gian (tĩnh) của hệ khi chịu véc tơ lực s_n

Thông thường, trong các bài toán kết cấu, người ta quan tâm nhiều nhất đến phản ứng cực đại $r_o = \max |r(t)|$ thay vì quan tâm toàn bộ quá trình phản ứng $r_n(t)$. Phản ứng cực đại cho từng dạng dao động là có thể xác định được:

$$r_{no} = r_n^{st} A_n \quad (4.23)$$

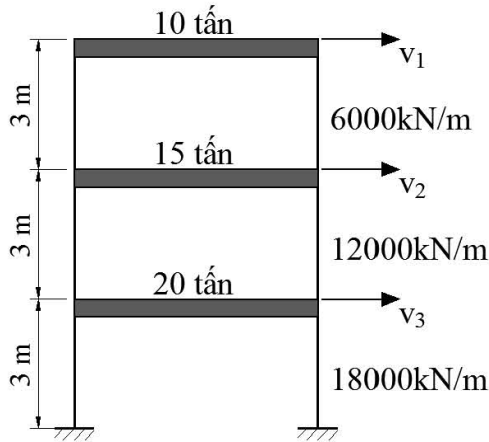
với A_n là giá trị gia tốc giả cực đại, chính là tung độ phổ phản ứng đàn hồi đã trình bày ở 4.2.2.

Để có được tổng phản ứng của hệ, người ta không thể cộng các phản ứng cực đại của từng mode lại với nhau vì các giá trị phản ứng lớn nhất không xảy ra đồng thời. Để có được phản ứng cực đại một cách gần đúng, người ta có thể dùng các phương pháp *tổ hợp căn bậc hai tổng các bình phương*, SRSS (*square-root-of-sum-of-squares*) hay phương pháp *tổ hợp bậc hai hoàn toàn*, CQC (*complete quadratic combination*).

Phương pháp SRSS:

$$r_o \approx \left(\sum_{n=1}^N r_{no}^2 \right)^{1/2} \quad (4.24)$$

Ví dụ 4.4: Xác định phản ứng cực đại (lực cắt tầng, chuyển vị ngang) của hệ khung ba tầng sàn cứng trong ví dụ 3.3 dưới tác động của dao động nền trong ví dụ 4.3. Chiều cao mỗi tầng là 3 mét. Cho biết hệ làm việc hoàn toàn trong miền đàn hồi tuyến tính.



Giải:

Từ ví dụ 3.3

$$\text{Tần số góc dao động riêng: } \omega_n = \begin{Bmatrix} 14,5 \\ 31,1 \\ 46,1 \end{Bmatrix} \text{ (rad/giây)}$$

$$\text{Dạng dao động: } \varphi_1 = \begin{Bmatrix} 1,000 \\ 0,644 \\ 0,300 \end{Bmatrix}; \varphi_2 = \begin{Bmatrix} 1,000 \\ -0,601 \\ -0,676 \end{Bmatrix}; \varphi_3 = \begin{Bmatrix} 1,000 \\ -2,570 \\ 2,470 \end{Bmatrix}$$

Các đặc trưng suy rộng cho mỗi dạng dao động:

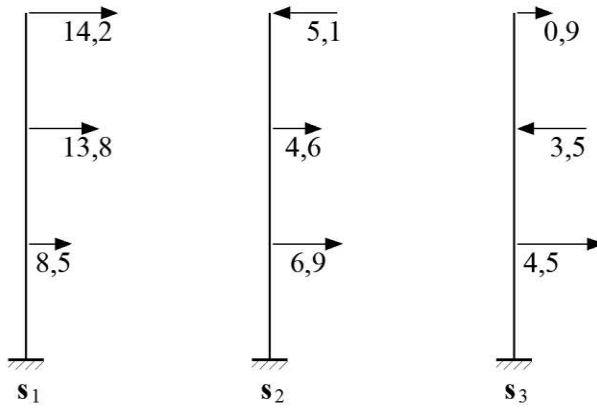
$$M_n = \varphi_n^T \mathbf{M} \varphi_n \Rightarrow M_1 = 18,0; M_2 = 24,6; M_3 = 231,1$$

$$L_n = \varphi_n^T \mathbf{M} \mathbf{1} \Rightarrow L_1 = 25,7; L_2 = -12,5; L_3 = 20,9$$

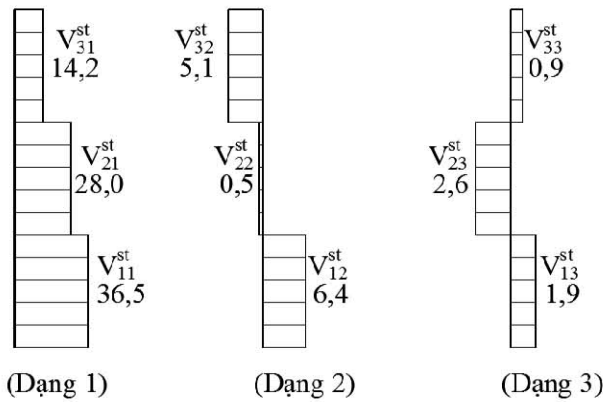
$$\Gamma_n = \frac{L_n}{M_n} \Rightarrow \Gamma_1 = 1,42; \Gamma_2 = -0,51; \Gamma_3 = 0,09$$

Véc tơ phân bố không gian: $\mathbf{s}_n = \Gamma_n \mathbf{M} \varphi_n$

$$\Rightarrow \mathbf{s}_1 = \begin{Bmatrix} 14,2 \\ 13,8 \\ 8,5 \end{Bmatrix}; \mathbf{s}_2 = \begin{Bmatrix} -5,1 \\ 4,6 \\ 6,9 \end{Bmatrix}; \mathbf{s}_3 = \begin{Bmatrix} 0,9 \\ -3,5 \\ 4,5 \end{Bmatrix} \text{ (tấn)}$$

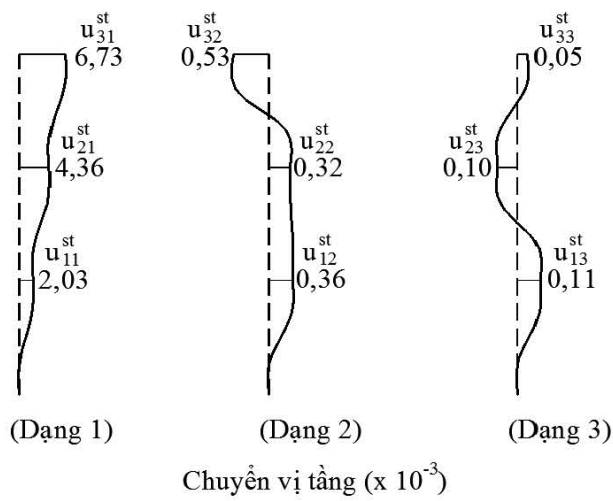


Lực cắt tầng và chuyển vị ngang của hệ khi chịu $\mathbf{s}_n$



Lực cắt tầng

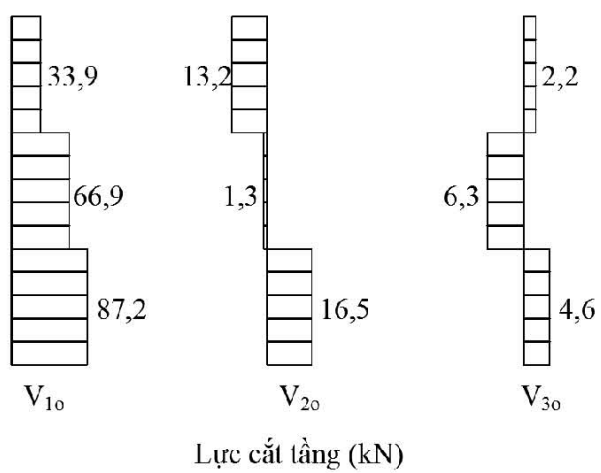
CHƯƠNG 4: PHÂN TÍCH KẾT CẤU CHỊU ĐỘNG ĐẤT

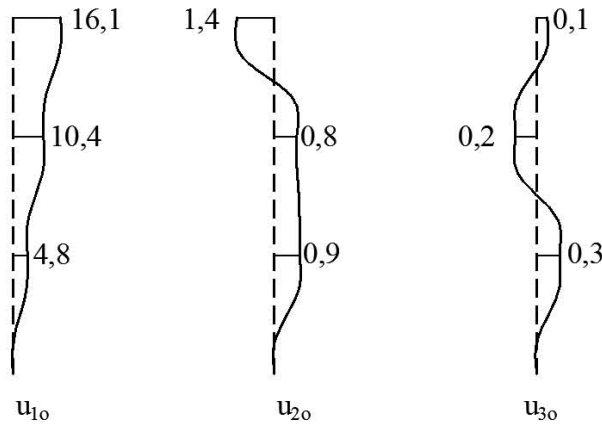


Tung độ phổ phản ứng gia tốc giả ứng với mỗi dạng dao động riêng:

$$A_1(T_1 = 0,433) = 2,388 \text{ m/s}^2$$
$$A_2(T_2 = 0,202) = 2,585 \text{ m/s}^2$$
$$A_3(T_3 = 0,136) = 2,440 \text{ m/s}^2$$

Phản ứng cực đại đối với từng dạng dao động được tính bằng cách nhân các biểu đồ lực cắt tầng, chuyển vị tầng với tung độ phổ gia tốc giả tương ứng $r_{no} = r_n^{st} A_n$:

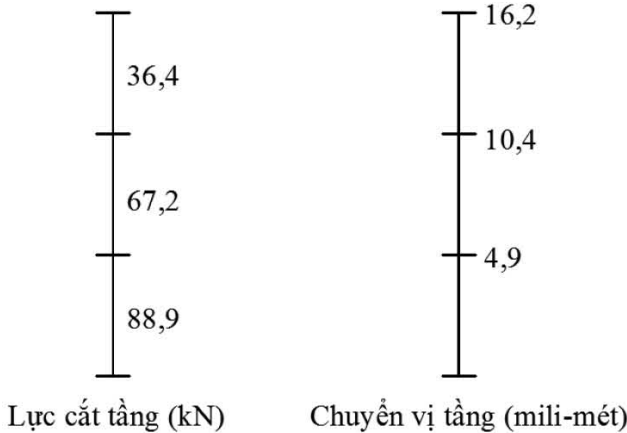




Chuyển vị tầng (mili-mét)

Tổ hợp các dạng dao động sử dụng phương pháp căn bậc hai

tổng các bình phương: $r_o \simeq \left(\sum_{n=1}^N r_{no}^2 \right)^{1/2}$



Phản ứng của hệ sau khi tổ hợp.

4.3 PHÂN TÍCH KẾT CẤU KHÔNG ĐÀN HỒI CHỊU DAO ĐỘNG NỀN

Trong các phần trước của chương, chúng ta đã xác định được lực cắt đáy hay lực ngang đàn hồi $V_{bo} = f_{so} = (A/g)w$ đại diện cho tác

động của dao động nền $\ddot{u}_g(t)$ lên hệ đàn hồi. Hiện nay, đa số các tiêu chuẩn thiết kế kháng chấn cho phép thiết kế công trình có khả năng chịu lực nhỏ hơn V_{bo} vừa nêu nhiều lần dựa trên khả năng làm việc sau đàn hồi của kết cấu (khả năng dẻo – ductility). Các tiêu chuẩn Việt Nam, Hoa Kỳ, châu Âu, Úc đều cho phép điều này.

Hình 4.16 thể hiện phổ phản ứng đàn hồi $S_e(T)$ và phổ phản ứng thiết kế $S_d(T)$ theo TCXDVN 9386 : 2012. $S_e(T)$ thể hiện lực ngang tương đương đại diện cho tác động của động đất thiết kế lên hệ đàn hồi. Nói cách khác, nếu công trình có cường độ đáp ứng được lực ngang tính từ $S_e(T)$ thì công trình sẽ còn làm việc trong giới hạn đàn hồi tuyến tính khi trận động đất dự kiến xảy ra. $S_d(T)$ là yêu cầu về cường độ theo tiêu chuẩn, được xây dựng bằng cách “chiết giảm” $S_e(T)$. Nói cách khác, nếu được thiết kế để chịu $S_d < S_e$ thì công trình sẽ làm việc quá trạng thái đàn hồi khi chịu động đất thiết kế.

$$\text{- Đoạn (2), từ } T_B \text{ đến } T_C: \quad S_d(T) = \frac{S_e(T)}{q} \quad (4.25)$$

$$\text{- Đoạn (3), từ } T_C \text{ đến } T_D: \quad S_d(T) = \frac{S_e(T)}{q} \geq S_{d,\min} = \beta a_g$$

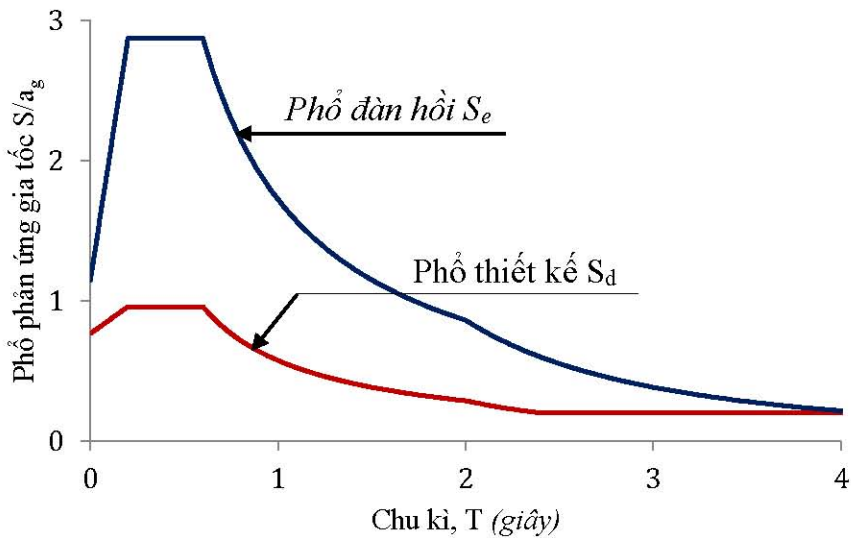
$$\text{- Đoạn (4), } T \geq T_D: \quad S_d(T) = \frac{S_e(T)}{q} \geq S_{d,\min} = \beta a_g$$

$$\text{- Điểm } T=0\text{s}: \quad S_d(T) = \frac{S_e(T)}{1,5}$$

- Đoạn (1), $T \leq T_B$: nối điểm $T=0s$ và điểm $T=T_B$ của đoạn (2)

$\xi = 5\% \Leftrightarrow \eta = 1$ được sử dụng cho $S_e(t)$ trong các biểu thức trên. Việc kể đến các độ cản khác nhau được đưa vào hệ số q .

Chú ý: Đây là một cách diễn đạt khác của phổ S_d , thuận lợi hơn so với cách diễn đạt trong tiêu chuẩn TCXDVN 9386 – 2012 về mặt giải thích cơ sở xây dựng phổ.



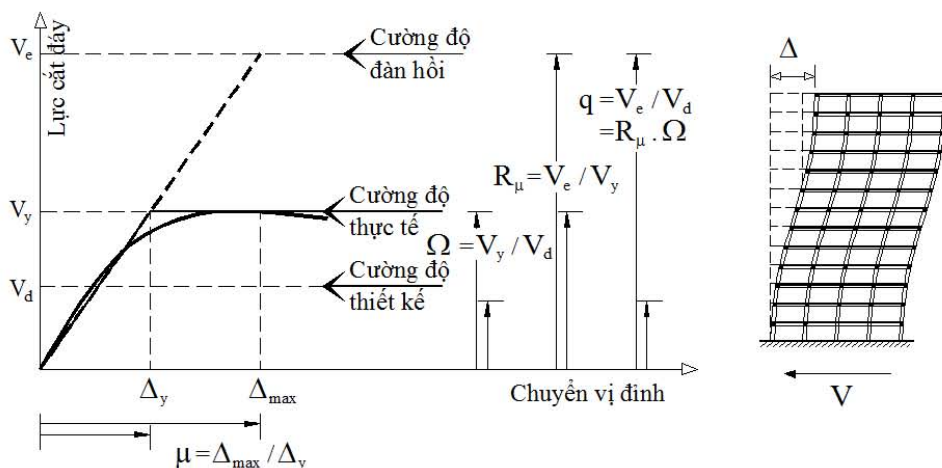
Hình 4.16. Phổ phản ứng đàn hồi và phổ phản ứng thiết kế theo TCXDVN 9386 – 2012

trong đó,

q là hệ số ứng xử (behaviour factor), $q \geq \Omega$

Ω là hệ số vượt cường độ (overstrength factor), Ω

β là hệ số giới hạn tối thiểu của S_d , $\beta = 0,2$



Hình 4.17. Quan hệ giữa hệ số ứng xử, q , hệ số vượt cường độ, Ω , và độ dẻo, R_μ

Mức độ chiết giảm cho phép, q , bao gồm hai thành phần – hệ số vượt cường độ Ω và độ hệ số dẻo (ductility factor), R_μ .

$$q = \Omega \cdot R_\mu \quad (4.26)$$

Hệ số vượt cường độ

Khi tính toán khả năng chịu lực của kết cấu chịu các tải trọng thông thường như gió hay tải trọng sử dụng, người ta dùng hệ số độ tin cậy để giảm cường độ tính toán của kết cấu. Việc làm này nhằm đề phòng các rủi ro trong xây dựng và cũng để đảm bảo một khoảng an toàn trong thiết kế. Trong *Hình 4.17*, V_d đại diện cho khả năng chịu lực tính toán có áp dụng các hệ số độ tin cậy. Cường độ thực tế của kết cấu là $V_y > V_d$. Hệ số vượt cường độ $\Omega = V_y / V_d$ kể đến sự chênh lệch giữa cường độ tính toán và cường độ thực tế.

Vì động đất là tải trọng đặc biệt, có xác suất xảy ra rất thấp nên khi tính toán cường độ kết cấu trong thiết kế chịu động đất, người

ta sẽ bỏ qua các hệ số độ tin cậy và xem kết cấu có cường độ lý tưởng là V_y . Đây là lý do người ta cho phép giảm yêu cầu cường độ V_{bo} bởi hệ số Ω , bao hàm trong q . Việc xác định Ω cần dựa trên tiêu chuẩn thiết kế kết cấu (bê tông, thép, gỗ, gạch đá).

Hệ số độ dẻo

Kết cấu trên *Hình 4.17* được đẩy dần bởi lực ngang có tổng lực cắt đáy V . Sau khi đạt đến giới hạn về cường độ (điểm (Δ_y, V_y)), mặc dù kết cấu không nhận thêm lực nhưng vẫn giữ được khả năng chịu lực ban đầu và tiếp tục biến dạng. Khung biến dạng cho đến khi đạt giới hạn về biến dạng $\Delta_{\max}$ thì mới bắt đầu mất cường độ.

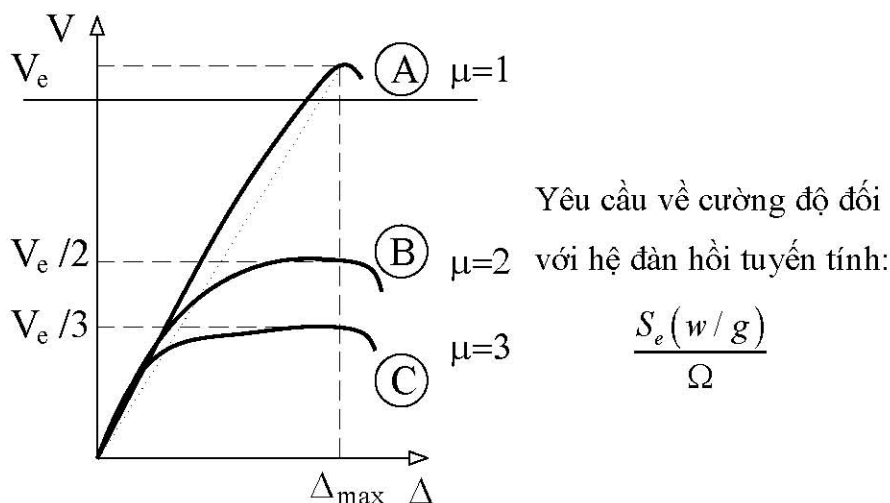
Khả năng duy trì khả năng chịu lực và tiếp tục biến dạng sau khi đã đạt giới hạn về cường độ như vừa mô tả được gọi là khả năng dẻo. Tỷ số $\mu = \frac{\Delta_{\max}}{\Delta_y}$ được dùng để định lượng mức độ dẻo của

khung.

Đặt hệ tuyến tính tương đương là hệ kết cấu có cùng độ cứng ban đầu với kết cấu đang xét nhưng ứng xử đàn hồi tuyến tính với mọi mức tải trọng. V_e là lực cắt đáy trong hệ đàn hồi tương đương khi chịu cùng mức tác động với kết cấu đang xét. Tỷ số cường độ giữa hai hệ tuyến tính tương đương và hệ thực được gọi là hệ số độ dẻo (*ductility factor*) $R_\mu = \frac{V_e}{V_y}$. $R_\mu = \mu$ nếu giả thiết chuyển vị bằng

nhau được sử dụng.

Khả năng chịu động đất của công trình được quyết định đồng thời bởi cường độ và độ dẻo. Đây là điểm khác biệt quan trọng khi tính toán kết cấu chịu động đất so với các bài toán chịu lực khác (gió, hoạt tải, tĩnh tải). Nếu kết cấu có độ dẻo càng lớn thì cường độ yêu cầu càng bé và ngược lại. Việc cân bằng giữa độ dẻo và cường độ do người thiết kế quyết định. Cả ba hệ trên *Hình 4.18* đều đáp ứng yêu cầu chịu động đất mặc dù khả năng chịu lực của hệ B và C chỉ bằng 1/2, 1/3 cường độ hệ A.



Hình 4.18. Tương quan giữa độ dẻo và cường độ

Trong thiết kế thực hành, người ta xác định cường độ yêu cầu đối với kết cấu bằng cách sử dụng phổ phản ứng thiết kế, tức phổ phản ứng đàn hồi đã được chiết giảm bởi $q = \Omega.R_\mu$. Yêu cầu về cường độ được bảo đảm bằng các bài toán thiết kế cấu kiện như khi kết cấu chịu các tải trọng thông thường. Yêu cầu về độ dẻo được đảm bảo thông qua việc đáp ứng các yêu cầu cấu tạo cấu kiện và bố trí tổng thể kết cấu.

4.3.1 Phân tích phản ứng không đàn hồi của hệ nhiều bậc tự do chịu dao động nền

Phương pháp chồng chất dạng dao động trình bày ở 4.2.4 dựa trên cơ sở cộng tác dụng. Khi kết cấu làm việc ngoài miền đàn hồi tuyến tính, việc cộng tác dụng không còn đúng nữa. Tuy nhiên, hầu hết các tiêu chuẩn thiết kế công trình chịu động đất hiện nay cho phép sử dụng phương pháp chồng chất dạng dao động cùng với phổ phản ứng thiết kế (đã chiết giảm kể đến độ dẻo) để xác định cường độ yêu cầu cho kết cấu.

4.4 QUY TRÌNH TÍNH TOÁN TÁC ĐỘNG ĐỘNG ĐẤT LÊN CÔNG TRÌNH

Phần này trình bày tóm tắt quy trình tính toán tác động động đất lên công trình bê tông cốt thép theo TCXDVN 9386 – 2012 với phương pháp tĩnh lực ngang tương đương và phương pháp phổ phản ứng dạng dao động. Quy trình được viết lại trên cơ sở tham khảo “*Hướng dẫn thiết kế kết cấu nhà cao tầng bê tông cốt thép chịu động đất theo TCXDVN 9386 – 2012*” của Viện Khoa học Công nghệ Xây dựng, NXB Xây dựng 2011.

4.4.1 Xác định gia tốc nền tham chiếu a_{gR}

Căn cứ vào phụ lục H hoặc I của TCXDVN 9386 – 2012 để xác định gia tốc nền tham chiếu ở địa điểm xây dựng a_{gR} .

4.4.2 Nhận dạng điều kiện đất nền

Dựa vào kết quả khảo sát địa chất ($v_{s,30}$, N_{SPT} hoặc C_u) và bảng 3.1 của TCXDVN 9386 – 2012 (Bảng 4.3) để xác định loại nền đất (A, B, C, D hay E). Sau khi xác định được loại nền đất, tra bảng 3.2 TCXDVN 9386 – 2012 để xác định hệ số nền S.

4.4.3 Xác định gia tốc đỉnh nền đất thiết kế với giả thiết nền loại A, a_g

Gia tốc đỉnh nền đất dùng cho thiết kế tránh sụp đổ:

$$a_g \cdot S = a_{gR} \cdot \gamma_I \cdot S$$

TCXDVN 9386 – 2012 quy định về yêu cầu thiết kế kháng chấn dựa vào a_g :

- Động đất mạnh $a_g \geq 0,08g$: phải tính toán với cấu tạo kháng chấn
- Động đất yếu $0,04g \leq a_g < 0,08g$: chỉ cần áp dụng các giải pháp kháng chấn đã được giảm nhẹ.
- Động đất rất yếu $a_g < 0,04g$: không cần thiết kế kháng chấn

4.4.4 Xác định hệ số ứng xử q của kết cấu bê tông cốt thép

Hệ khung hoặc hệ khung tương đương (hỗn hợp khung – vách), có thể xác định gần đúng như sau (cấp dèo trung bình):

$q = 3,3$ - nhà một tầng

$q = 3,6$ - nhà nhiều tầng, khung một nhịp

$q = 3,9$ - nhà nhiều tầng, khung nhiều nhịp hoặc kết cấu hỗn hợp tương đương khung

Hệ vách cứng hoặc vách cứng có lỗ:

$q = 3,6$ - hệ kết cấu hỗn hợp tương đương vách cứng, hoặc
hệ vách cứng có lỗ (hệ tường có dầm liên kết)

$q = 3,0.k_w$ - hệ tường/vách cứng chỉ có hai tường.vách cứng
(không phải là vách cứng có lỗ)

$q = 3,1.k_w$ - các hệ vách cứng không phải là vách cứng có lỗ

trong đó:

$$0,5 < k_w = (1 + \alpha_o) / 3 \leq 1$$

$$\alpha_o = \sum h_{wi} / l_{wi}$$

với h_{wi} và l_{wi} lần lượt là chiều cao và chiều dài tường thứ i .

4.4.5 Xác định đặc trưng động học công trình

Nếu sử dụng phương pháp phân tích tĩnh lực ngang tương đương thì chỉ cần xác định chu kỳ dao động riêng cơ bản T_1 của công trình. T_1 có thể được xác định theo công thức (4.27) nếu nhà không cao hơn 40 m. T_1 cũng có thể xác định bằng phân tích dạng chính (có thể sử dụng các chương trình phần tử hữu hạn).

$$T_1 = C_t.H^{3/4} \quad (4.27)$$

với $C_t = 0,085$ đối với khung thép không gian chịu mô men

$C_t = 0,075$ đối với khung bê tông không gian chịu mô men và
khung thép có giằng lệch tâm (*eccentrically
braced frame*)

$C_t = 0.050$ đối với các kết cấu khác

H chiều cao công trình, tính bằng mét

Nếu sử dụng phương pháp phân tích phổ phản ứng dạng dao động thì ngoài các chu kỳ dao động riêng T_n , cần xác định các dạng dao động riêng (các véc tơ φ_n). Các phần mềm SAP2000, ETABS, ... có thể được dùng để xác định các đặc trưng động học này.

4.4.6 Phổ thiết kế dùng cho phân tích đàn hồi

Xác định phổ phản ứng chiết giảm (4.24) $S_d(T)$:

$$0 \leq T \leq T_B : S_d(T) = a_g \cdot S \cdot \left[\frac{2}{3} + \frac{T}{T_B} \cdot \left(\frac{2,5}{q} - \frac{2}{3} \right) \right]$$

$$T_B \leq T \leq T_C : S_d(T) = a_g \cdot S \cdot \frac{2,5}{q}$$

$$T_C \leq T \leq T_D : S_d(T) \begin{cases} = a_g \cdot S \cdot \frac{2,5}{q} \cdot \frac{T_C}{T} \\ \geq \beta \cdot a_g \end{cases}$$

$$T_D \leq T : S_d(T) \begin{cases} = a_g \cdot S \cdot \frac{2,5}{q} \cdot \frac{T_C T_D}{T^2} \\ \geq \beta \cdot a_g \end{cases}$$

Định nghĩa ký hiệu: xem (4.15) và (4.24).

4.4.7 Phương pháp phân tích tĩnh lực ngang tương đương

Phương pháp tĩnh lực ngang tương đương dựa trên cơ sở đơn giản hóa công trình về hệ một bậc tự do. Phạm vi áp dụng của phương pháp tĩnh lực ngang tương đương khá hạn chế. Phương pháp này chỉ có thể sử dụng cho công trình không bị ảnh hưởng

đáng kể bởi các *hiệu ứng dạng dao động bậc cao* (higher mode effects), thể hiện qua hai điều kiện:

- Chu kỳ dao động riêng cơ bản $T_1 \leq \begin{cases} 4.T_c \\ 2,0s \end{cases}$

với T_c được cho ở Bảng 4.2.

- Công trình đảm bảo các tiêu chí về tính đều đặn theo 4.2.3.3

TCXDVN 9386 – 2012

Nội dung phương pháp gồm 2 bước:

4.4.7.1 Xác định lực cắt đáy

Theo mỗi hướng ngang được phân tích, lực cắt đáy F_b được xác định:

$$F_b = S_d(T_1).m.\lambda$$

trong đó: $S_d(T_1)$ tung độ của phổ thiết kế tại chu kỳ T_1

T_1 chu kỳ dao động cơ bản của nhà theo phương đang xét
 m tổng khối lượng của nhà ở trên móng hoặc ở trên đỉnh
 của phần đế cứng

λ hệ số điều chỉnh, $\lambda = 0,85$ nếu $T_1 \leq 2T_c$ với nhà có trên
 2 tầng hoặc $\lambda = 1,0$ đối với các trường hợp khác

4.4.7.2 Phân bố lực động đất theo phương ngang

Lực ngang ở mỗi tầng được tính:

$$F_i = F_b \cdot \frac{z_i m_i}{\sum z_j m_j} \quad (4.28)$$

trong đó: z_i và z_j lần lượt là độ cao của khối lượng m_i và m_j tính từ mặt móng hoặc đỉnh phần đế cứng.

4.4.8 Phương pháp phân tích phổ phản ứng dạng dao động

Phương pháp phổ phản ứng dạng dao động dựa trên cơ sở đơn giản hóa công trình thành hệ hữu hạn bậc tự do. Tùy kỳ vọng về mức độ chính xác của phân tích, công trình có thể được đơn giản hóa ở các mức độ khác nhau. Thông thường, công trình được đưa về mô hình các khối lượng tập trung m_j ở cao độ mỗi sàn tầng. Người ta thực hiện hai bài toán phân tích phản ứng công trình theo hai phương vuông góc nhau X và Y (với điều kiện công trình đủ độ đều đặn). Trong mỗi bài toán như vậy, mỗi khối lượng có một bậc tự do (phương ngang). Phương pháp này sử dụng đồng thời phổ phản ứng đã chiết giảm và phương pháp chồng chất dạng dao động để dự đoán yêu cầu về cường độ đối với kết cấu. Phương pháp này được TCXDVN 9386 – 2012 cho phép áp dụng với tất cả các loại nhà.

4.4.8.1 Xác định số dạng dao động cần xét

TCXDVN 9386 – 2012 cho phép bỏ qua một số dạng dao động bậc cao khi tính toán tác động động đất theo phương pháp phổ phản ứng dạng dao động. Số dạng dao động cần xét được xác định để:

- Tổng khối lượng hữu hiệu của các dạng dao động được xét chiếm ít nhất 90% tổng khối lượng của kết cấu.

- Tất cả các dạng dao động có trọng lượng hữu hiệu lớn hơn 5% cần được xét.

Nếu điều kiện trên không được thỏa mãn thì số lượng tối thiểu các dạng dao động k cần được xét đến trong tính toán khi phân tích không gian cần thỏa mãn cả hai điều kiện sau:

$$k \geq 3\sqrt{n}$$

$$T_k \leq 0,2s$$

trong đó: k số dạng dao động cần được xét đến

n số tầng nhà nằm trên mặt móng hoặc đế cứng

T_k chu kỳ dao động riêng ứng với dạng dao động thứ k

4.4.8.2 Lực ngang tương đương ứng với từng dạng dao động theo phương X

Lực ngang tương đương tại tầng thứ j , ứng với dạng dao động thứ n được xác định:

$$F_{X,n}^j = S_d(T_n) \cdot \frac{\sum_{j=1}^k \varphi_{n,j} \cdot m_j}{\sum_{j=1}^k \varphi_{n,j}^2 \cdot m_j} \cdot m_j \cdot \varphi_{n,j} \quad (4.29)$$

trong đó: $S_d(T_n)$ là tung độ phổ phản ứng thiết kế ứng với chu kỳ dao động dạng thứ n

$\varphi_{n,j}$ là biên độ dạng dao động (modal displacement) tại tầng j ứng với dạng dao động thứ n

m_j là khối lượng tầng thứ j

k là số dạng dao động được xét

Công thức (4.29) thực chất là dạng triển khai của phương trình (4.20) - ở dạng ma trận:

$$\begin{aligned}\mathbf{f}_n &= A_n \cdot \mathbf{s}_n \\ &= A_n \cdot (\Gamma_n \cdot \mathbf{M} \cdot \boldsymbol{\varphi}_n) \\ &= A_n \cdot \left(\frac{L_n}{M_n} \cdot \mathbf{M} \cdot \boldsymbol{\varphi}_n \right) \\ &= A_n \cdot \left(\frac{\boldsymbol{\varphi}_n^T \cdot \mathbf{M} \cdot \mathbf{1}}{\boldsymbol{\varphi}_n^T \cdot \mathbf{M} \cdot \boldsymbol{\varphi}_n} \cdot \mathbf{M} \cdot \boldsymbol{\varphi}_n \right)\end{aligned}$$

Chú ý:

Tung độ phổ phản ứng gia tốc giả A_n được thay thế bằng tung độ phổ thiết kế chiết giảm $S_d(T_n)$.

Độ lớn biên độ dạng dao động có thể thay đổi, phụ thuộc vào cách chuẩn hóa (*normalization*). Biên độ dạng dao động không có đơn vị. Chỉ có tỷ số giữa các biên độ dạng dao động ở các tầng $\varphi_{n,j} / \varphi_{n,j+l}$ mới ảnh hưởng đến lực ngang tương đương.

4.4.8.3 Xác định nội lực (yêu cầu về cường độ) và tổ hợp nội lực

Làm bài toán phân tích tĩnh công trình chịu véc tơ lực ngang $F_{X,n}$ để tìm giá trị phản ứng E_n . Phản ứng có thể là chuyển vị, nội lực, ứng suất.

Phản ứng tổng thể được xác định theo quy ước tổ hợp căn bậc hai tổng bình phương (SQSS) hay tổ hợp bậc hai hoàn toàn (CQC).

SQSS (đối chiếu với (4.23)):

$$E_E = \sqrt{\sum_{n=1}^k E_n^2} \quad (4.30)$$

trong đó: E_E hệ quả của tác động động đất đang xét

E_n hệ quả tác động ứng với dạng dao động riêng thứ n

k số dạng dao động cần xét

4.4.8.4 Lực ngang theo phương Y

Việc tính toán lực ngang theo phương Y cũng được thực hiện tương tự như phương X.

Ví dụ 4.5: Xác định yêu cầu về khả năng chịu mô men của hệ khung ba tầng sàn cứng trong *ví dụ 3.3* dưới tác động của dao động nền trong *ví dụ 4.3*. Cho biết hệ có độ dẻo $\mu = 2$ và hệ số vượt cường độ $\Omega = 1,5$. Chiều cao tất cả các tầng là 3 mét. Sử dụng phương pháp phân tích tĩnh lực ngang tương đương.

Giải:

Hệ số ứng xử: $q = \mu \cdot \Omega = 2 \times 1,5 = 3,0$

Tần số dao động riêng ứng với dạng dao động thứ nhất (từ *ví dụ 3.3*): $T_1 = 0,443$ giây

Do $T_1 < 4.T_C$ và $T_1 < 2$ giây $\Rightarrow$ có thể áp dụng phương pháp tĩnh lực ngang tương đương.

Tung độ phổ phản ứng chiết giảm ứng với $T_1 \in [T_C, T_D]$:

$$S_d(T_1) = a_g \cdot S \cdot \frac{2,5}{q} \cdot \frac{T_C}{T_1} = 1,034 \times 1,0 \times \frac{2,5}{3} \cdot \frac{0,4}{0,433} = 0,796 \text{ m/s}^2$$

Số tầng nhà lớn hơn 2 và $T_1 < 2T_C \Rightarrow \lambda = 0,85$

Lực cắt đáy:

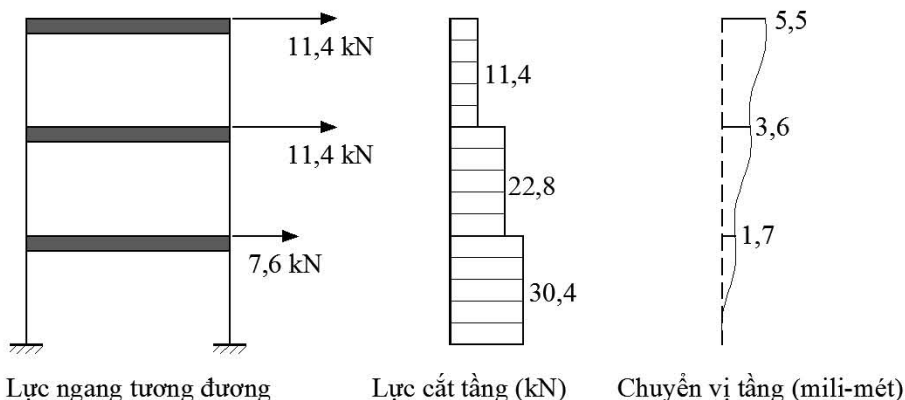
$$F_b = S_d(T_1) \cdot m \cdot \lambda = 0,796 \times (20 + 15 + 10) \times 0,85 = 30,4 \text{ tấn}$$

Phân bố lực cắt đáy lên các tầng:

$$F_i = F_b \cdot \frac{z_i m_i}{\sum_j z_j m_j}$$

$$\Rightarrow F_1 = 7,6 \text{ kN}; F_2 = F_3 = 11,4 \text{ kN}$$

Lực cắt tầng và chuyển vị:



Ví dụ 4.6: Xác định yêu cầu về khả năng chịu mô men của hệ khung ba tầng sàn cứng trong *ví dụ 3.3* dưới tác động của dao động nền trong *ví dụ 4.3*. Cho biết hệ có độ dẻo $\mu = 2$ và hệ số vượt cường độ $\Omega = 1,5$. Sử dụng phương pháp phổ phản ứng dạng dao động.

Giải:

Kết quả phân tích dạng dao động từ thí dụ 3.3:

$$T_1 = 0,433; T_2 = 0,202; T_3 = 0,136 \text{ giây}$$

$$\varphi_1 = \begin{Bmatrix} 1,000 \\ 0,644 \\ 0,300 \end{Bmatrix}; \varphi_2 = \begin{Bmatrix} 1,000 \\ -0,601 \\ -0,676 \end{Bmatrix}; \varphi_3 = \begin{Bmatrix} 1,000 \\ -2,570 \\ 2,470 \end{Bmatrix}$$

Tung độ phổ phản ứng chiết giảm ứng với mỗi dạng dao động riêng:

CHƯƠNG 4: PHÂN TÍCH KẾT CẤU CHỊU ĐỘNG ĐẤT

$$S_d(T_1) = 0,796 \text{ m/s}^2$$

$$S_d(T_2) = 0,862 \text{ m/s}^2$$

$$S_d(T_1) = 0,104 \text{ m/s}^2$$

Lực ngang đặt vào tầng j ứng với dạng dao động thứ i được tính theo công thức:

$$F_{X,i}^j = S_d(T_i) \cdot \frac{\sum_{l=1}^n \varphi_{l,i} \cdot m_l}{\sum_{l=1}^n \varphi_{l,i}^2 \cdot m_l} \cdot m_j \cdot \varphi_{i,j}$$

Kết quả được thể hiện ở bảng sau:

Dạng dao động 1:

	$\varphi_{1,j}$	m_j	$\varphi_{1,j} m_j$	$\varphi_{1,j}^2 m_j$	F_1^j
Tầng 3	1,000	10	10,0	10,0	11,3
Tầng 2	0,644	15	9,7	6,2	10,9
Tầng 1	0,300	20	6,0	1,8	6,8
SUM			25,7	18,0	

Dạng dao động 2:

	$\varphi_{2,j}$	m_j	$\varphi_{2,j} m_j$	$\varphi_{2,j}^2 m_j$	F_2^j
Tầng 3	1,000	10	10,0	10,0	-0,2
Tầng 2	-0,601	15	-9,0	5,4	0,1
Tầng 1	-0,676	20	-13,5	9,1	0,1
SUM			-12,5	24,6	

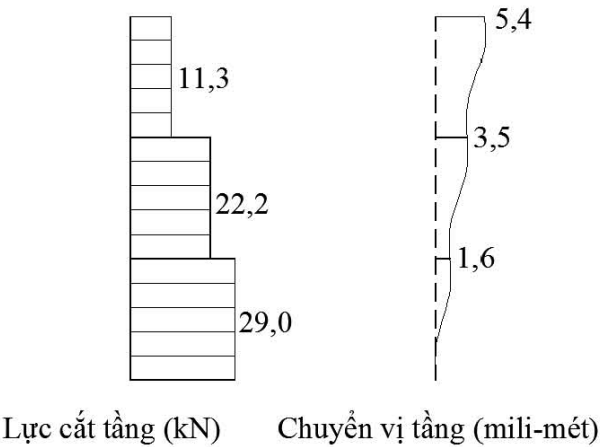
Dạng dao động 3:

	$\varphi_{3,j}$	m_j	$\varphi_{3,j} m_j$	$\varphi_{3,j}^2 m_j$	F_3^j
Tầng 3	1,000	10	10,0	10,0	0,1
Tầng 2	-2,570	15	-38,6	99,1	-0,4
Tầng 1	2,470	20	49,4	122,0	0,5
SUM			20,9	231,1	

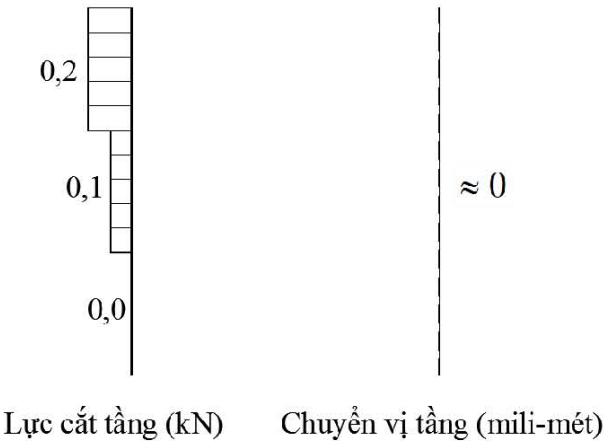
CHƯƠNG 4: PHÂN TÍCH KẾT CẤU CHỊU ĐỘNG ĐẤT

Kết quả phân tích lực cắt tầng và chuyển vị tầng ứng với từng dạng dao động:

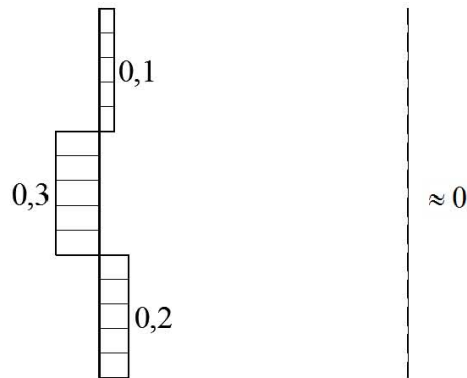
Dạng 1:



Dạng 2:

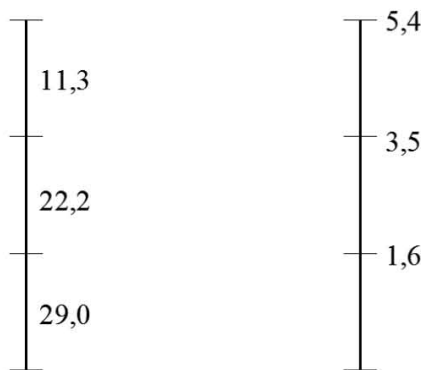


Dạng 3:



Lực cắt tầng (kN) Chuyển vị tầng (mili-mét)

Kết quả phân ứng sau khi tổ hợp (phương pháp căn bậc hai tổng các bình phương)



Lực cắt tầng (kN) Chuyển vị tầng (mili-mét)

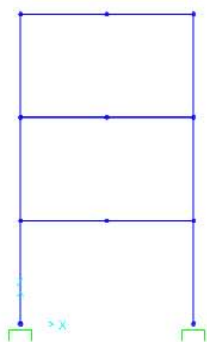
Mức độ ảnh hưởng của dạng dao động 2 và 3 đến kết quả phản ứng cuối cùng không đáng kể so với dạng 1.

Trong trường hợp kết cấu đơn giản của thí dụ này, kết quả tính từ phương pháp phổ phản ứng dạng dao động tương đương với kết quả tính từ phương pháp tĩnh lực ngang tương đương (ví dụ 4.5).

Ví dụ 4.7: Lắp lại ví dụ 4.6 sử dụng chương trình SAP2000.

Bước 1

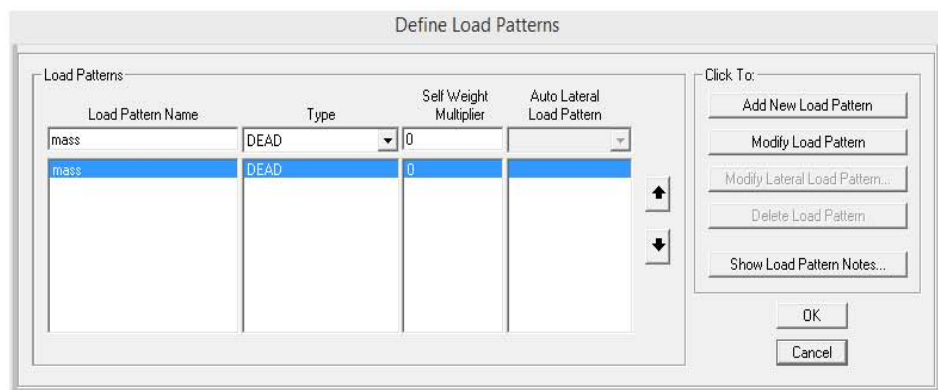
Lập mô hình khung ba tầng một nhịp có chiều cao tầng và độ cứng (vật liệu và kích thước tiết diện) như đề bài yêu cầu trong mặt phẳng XZ.



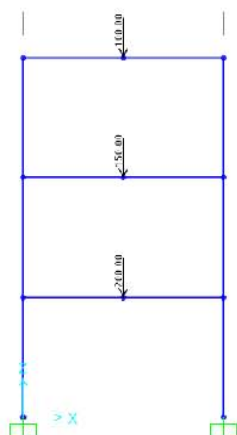
Bước 2

Khối lượng tham gia dao động:

- Định nghĩa load pattern ‘mass’ *Define > Load Patterns*



- Đặt 3 lực tập trung thẳng đứng đứng 200kN, 150kN và 100kN thuộc load pattern ‘mass’ tại các nút M1, M2, M3 đại diện cho khối lượng tham gia dao động ở các tầng 1, 2 và 3.
- Định nghĩa mass source: *Define > Mass Source*. Khối lượng tham gia dao động lấy từ tải trọng (From Loads) và chọn ‘mass’ với hệ số nhân 1.0 là trường hợp tải để tính khối lượng.

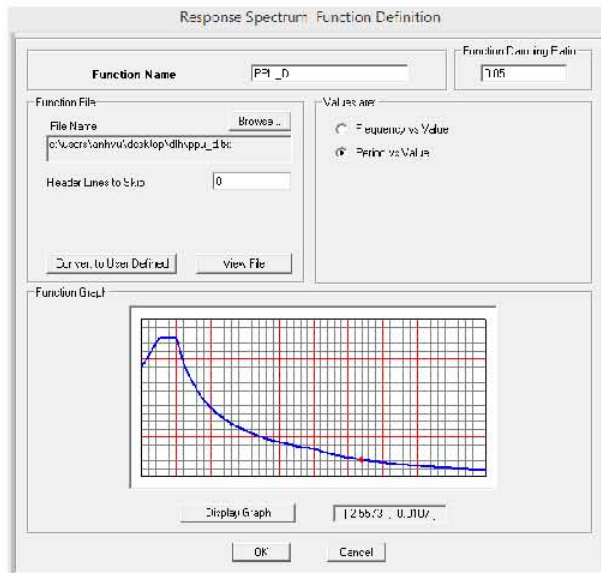




Bước 3

Định nghĩa phổ phản ứng: *Define > Functions > Response Spectrum ...*

Nhập dữ liệu phổ phản ứng từ tập tin (lựa chọn *From File*). Phổ phản ứng được tính toán theo TCXDVN 9386 – 2012 và chuẩn bị sẵn dưới định dạng plain text.



Bước 4

Định nghĩa trường hợp tải: Define > Load Cases

Load Case Data - Response Spectrum

Load Case Name
QUAKE_D
Set Def Name

Notes
Modify/Show...

Load Case Type
Response Spectrum Design...

Modal Combination
☐ CQC
☒ SRSS
☐ Absolute
☐ GMC
☐ NRC 10 Percent
☐ Double Sum

GMC f1 1.
GMC f2 0.
Periodic + Rigid Type SRSS

Directional Combination
☒ SRSS
☐ CQC3
☐ Absolute
Scale Factor

Modal Load Case
Use Modes from this Modal Load Case MODAL

Loads Applied

Load Type	Load Name	Function	Scale Factor
Accel	U1	PPU_D	9.81
Accel	U1	PPU_D	9.81

Add
Modify
Delete

☐ Show Advanced Load Parameters

Other Parameters
Modal Damping Constant at 0.05 Modify/Show...

OK
Cancel

Bước 5

Định nghĩa số dạng dao động cần thiết trong phân tích dạng dao động.

Load Case Data - Modal

Load Case Name
MODAL
Set Def Name

Notes
Modify/Show...

Load Case Type
Modal Design...

Stiffness to Use
☒ Zero Initial Conditions - Unstressed State
☐ Stiffness at End of Nonlinear Case
Important Note: Loads from the Nonlinear Case are NOT included in the current case

Type of Modes
☒ Eigen Vectors
☐ Ritz Vectors

Number of Modes
Maximum Number of Modes 3
Minimum Number of Modes 1

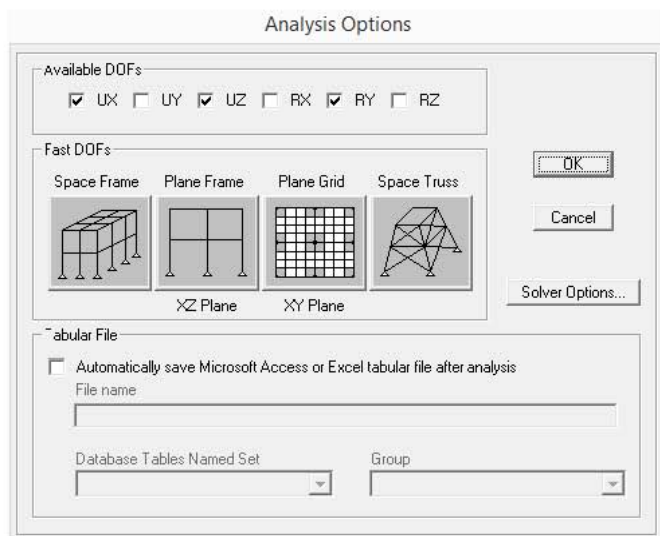
Loads Applied
☐ Show Advanced Load Parameters

Other Parameters
Frequency Shift (Center) 0.
Cutoff Frequency (Radius) 0.
Convergence Tolerance 1.000E-09
☒ Allow Automatic Frequency Shifting

OK
Cancel

Bước 6

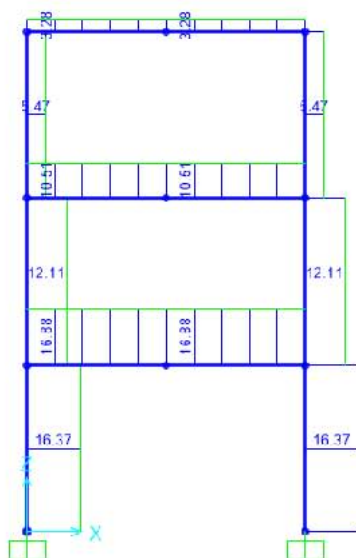
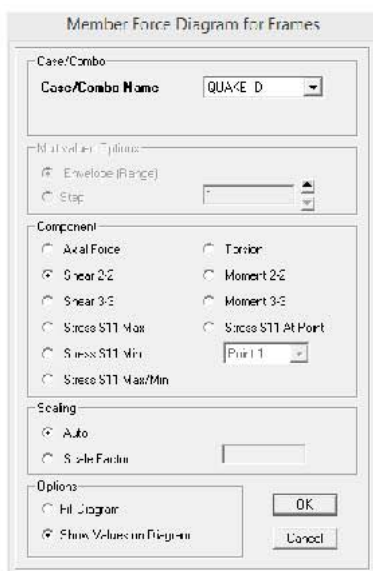
Thiết lập dạng phân tích phẳng: *Analyze > Set Analysis Options...* và chọn Plane Frame (XZ Plane).



Bước 7: Thực hiện phân tích: *Analyze > Run Analysis*

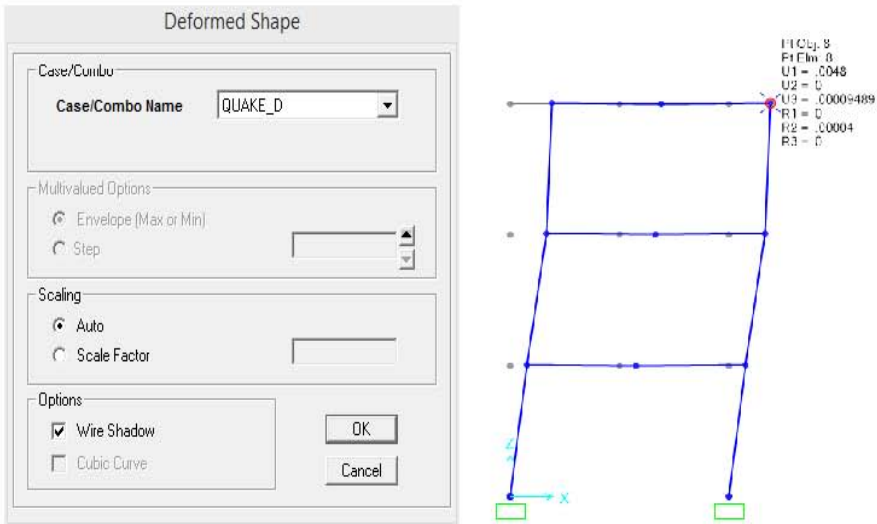
Bước 8: Khai thác kết quả phân tích, lực cắt khung:

Display > Show Forces/Stresses > Frames/Cables/Tendons...



CHƯƠNG 4: PHÂN TÍCH KẾT CẤU CHỊU ĐỘNG ĐẤT

Chuyển vị tầng: Display > Show Deformed Shape

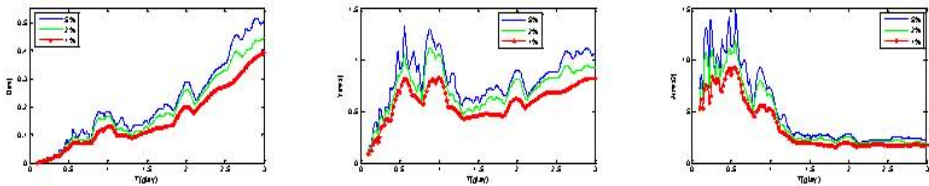


Kết luận: Kết quả từ SAP2000 phù hợp với kết quả từ ví dụ 4.6.

BÀI TẬP CHƯƠNG 4

1. Xây dựng phổ phản ứng chuyển vị tương đối, vận tốc giả và gia tốc giả cho băng ghi động đất El Centro với tỷ số cản $\zeta = 1\%$ và 5% . So sánh các phổ phản ứng tính được với kết quả từ thí dụ 1 (tỷ số cản 2%). Chương trình ở bài 8 phần phụ lục có thể được dùng hỗ trợ bài tập này.

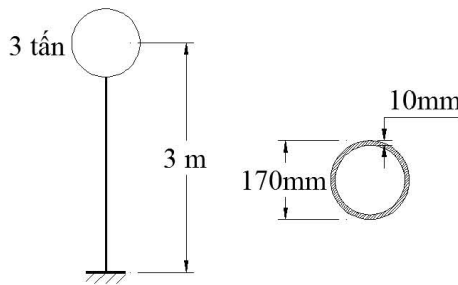
Đáp số:



2. Cho hệ một bậc tự do chịu dao động nền điều hòa $\ddot{u}_g(t) = \ddot{u}_{g0} \sin(2\pi t/T)$. Viết và so sánh phương trình tính gia tốc giả

A và gia tốc phản ứng tương đối (thực) của hệ $\ddot{u}_0'$ theo chu kỳ dao động riêng T_n và hệ số cản $\zeta > 0$.

3. Cho hệ một bậc tự do như hình bên dưới. Cột thép cao 3 m đỡ khối lượng tập trung 1,5 tấn ở đỉnh cột. Cột có tiết diện vành khăn với chiều dày 10 mm và đường kính ngoài 170 mm. Mô đun đàn hồi của thép là 200 GPa. Tính chuyển vị ngang tương đối lớn nhất ở đầu cột, lực cắt đáy và ứng suất pháp do uốn lớn nhất trong cột thép gây ra do động đất El Centro sử dụng các biểu đồ từ bài tập 4.1. Biết độ cản của hệ là $\zeta = 5\%$ và cột còn làm việc trong miền đàn hồi. Bỏ qua trọng lượng bản thân cột thép.



Đáp số

Chuyển vị ngang lớn nhất: 30 mm

Lực cắt đáy: 11 kN

Ứng suất pháp do uốn lớn nhất: 177 MPa

4. Tính và vẽ phổ phản ứng đàn hồi và phổ phản ứng thiết kế theo TCXDVN 9386-2012 cho một công trình xây dựng tại thị xã Sơn La, tỉnh Sơn La. Biết:

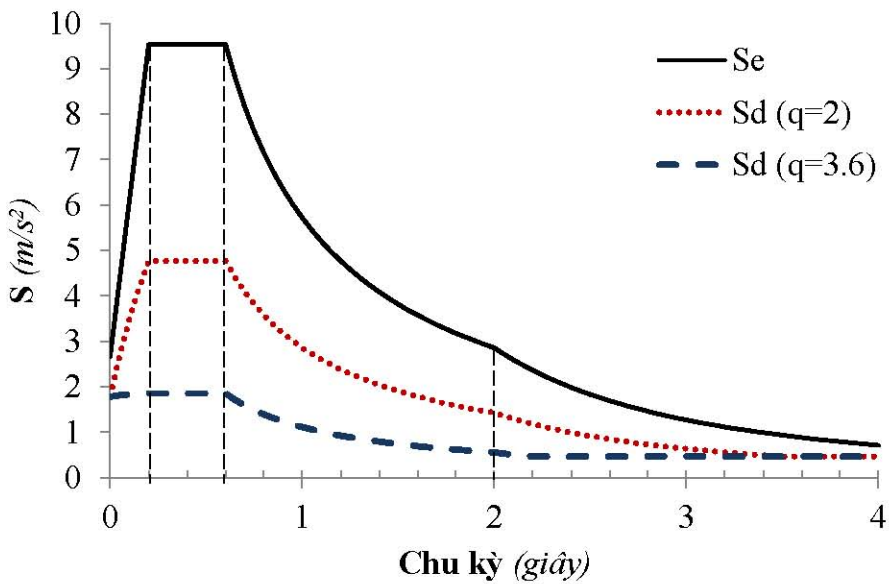
- Đất nền loại C

- Hệ số tầm quan trọng 1,25

Xét lần lượt hai trường hợp:

- Kết cấu thép dạng con lắc ngược $q = 2$, $\xi = 2\%$
- Kết cấu bê tông cốt thép $q = 3,6$, $\xi = 5\%$

Đáp số



5. Sử dụng phổ phản ứng tính được ở bài tập 4.4 để xác định yêu cầu về khả năng chịu lực của cột thép ở bài tập 4.3 khi:

- Không cho phép kết cấu vượt khỏi miền đàn hồi;
- Cho phép kết cấu vượt miền đàn hồi ($q = 2$)

Đáp số

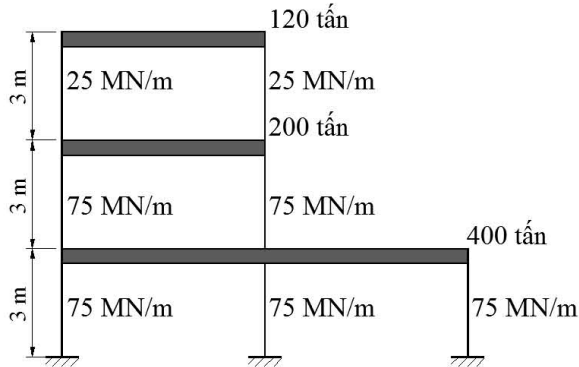
Đàn hồi

- Lực cắt đáy 14.4 kN
- Mô men lớn nhất 42.0 kNm
- Ứng suất pháp 226 MPa

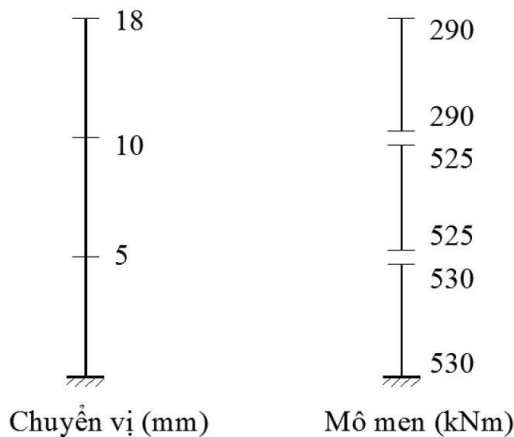
Với $q = 2$

- Lực cắt đáy 7.2 kN
- Mô men lớn nhất 21.5 kNm
- Ứng suất pháp 113 MPa

6. Xác định yêu cầu về khả năng chịu mô men của hệ khung bê tông cốt thép ở hình bên dưới khi chịu tác động của tác động động đất ở bài tập 4.3. Lần lượt sử dụng các phương pháp (a) tính lực ngang tương đương, (b) phổ phản ứng dạng dao động, và (c) kiểm tra kết quả với SAP2000.



Đáp số



Phụ lục

CHƯƠNG TRÌNH TÍNH BẰNG MATLAB

Bài thực hành 1: Xác định chuyển vị hệ một bậc tự do dao động tự do không cản.

Cho biết khối lượng m , độ cứng k và trạng thái ban đầu của hệ một bậc tự do (vị trí và vận tốc ban đầu $u_0, \dot{u}_0$). Yêu cầu vẽ đồ thị chuyển vị của hệ theo thời gian trong 10 giây đầu tiên kể từ lúc chuyển động. Thay đổi các giá trị đầu vào và quan sát sự thay đổi ở kết quả dao động.

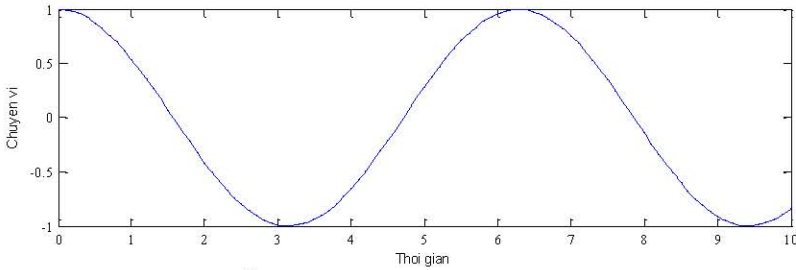
Lời giải: phương trình chuyển động:

$$u(t) = u_0 \cos(\omega t) + \frac{\dot{u}_0}{\omega} \sin(\omega t)$$

Mục tiêu: Giúp sinh viên làm quen với việc dùng Matlab giải quyết một bài toán động đơn giản.

```
%{  
DAO ĐỘNG TỰ DO KHÔNG CẢN  
%}  
% Khởi lượng  
m = 1;  
% Độ cứng  
k = 1;  
% Tần số góc  
omega = sqrt(k/m);  
% Chuyển vị ban đầu (tại thời điểm t = 0)  
u0 = 1;  
% Vận tốc ban đầu  
udot0 = 0;
```

```
% Tạo chuỗi thời gian
t = 0:1:10;
% Chuyển vị
u = u0*cos(omega*t) + udot0/omega*sin(omega*t);
% In kết quả chuyển vị
plot(t,u)
```



Nhận xét, đánh giá kết quả

Khi trạng thái ban đầu không trùng với trạng thái cân bằng (u_0 và $\dot{u}_0$ không đồng thời bằng không), hệ dao động điều hòa với tần số đúng bằng tần số dao động tự nhiên của hệ. Biên độ dao động không đổi sau mỗi chu kỳ.

Bài thực hành 2: Xác định chuyển vị hệ một bậc tự do dao động tự do có cản (trường hợp lực cản nhỏ).

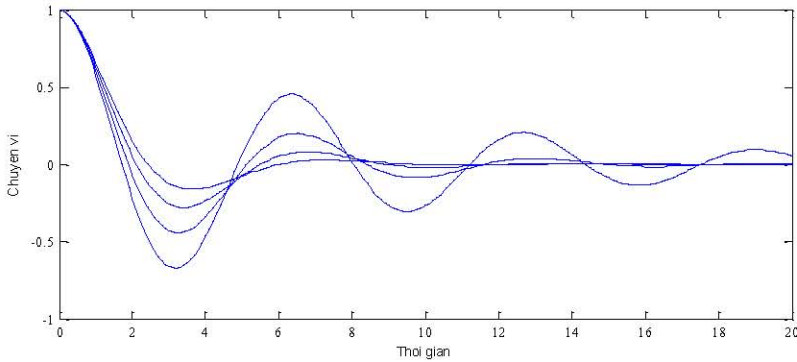
Cho biết khối lượng m , độ cứng k , hệ số cản nhớt c và trạng thái ban đầu của hệ một bậc tự do (vị trí và vận tốc ban đầu $u_0, \dot{u}_0$). Yêu cầu vẽ đồ thị chuyển vị của hệ theo thời gian. Thay đổi các giá trị độ cản và quan sát sự thay đổi ở kết quả dao động.

Lời giải: phương trình chuyển động:

$$u(t) = e^{-\zeta\omega t} \left[u_0 \cos(\omega_D t) + \frac{\dot{u}_0 + \zeta\omega u_0}{\omega_D} \sin(\omega_D t) \right]$$

Mục tiêu: Quan sát ảnh hưởng của độ cản nhớt đến dao động của hệ.

```
%{  
DAO ĐỘNG TỰ DO CÓ CẢN  
%}  
% Khởi lượng  
m = 1;  
% Độ cứng  
k = 1;  
% Hệ số cản  
c = .25;  
% Tan số góc  
omega = sqrt(k/m);  
% Hệ số cản tối hạn  
c_cr = 2*k/omega;  
zeta = c/c_cr;  
omegaD = omega*sqrt(1-zeta^2);  
% Chuyển vị ban đầu (tại thời điểm t = 0)  
u0 = 1;  
% Vận tốc ban đầu  
udot0 = 0;  
% Tạo chuỗi thời gian  
t = 0:1:20;  
% Chuyển vị  
if (zeta <= 1)  
    u = exp(-zeta*omega*t).*((u0*cos(omegaD*t))+((udot0+zeta*omega*u0)...  
        /omegaD*sin(omegaD*t)));  
    % In kết quả chuyển vị  
    plot(t,u);  
else  
    disp('Hệ số cản (c) cần nhỏ hơn hệ số cản tối hạn:');  
    disp(c_cr);  
end
```



Nhận xét, đánh giá kết quả

- Biên độ dao động giảm khi độ cản nhớt tăng.
- Chu kỳ dao động của hệ có cản lớn hơn hệ không cản và tăng dần khi độ cản tăng.
- Khi độ cản lớn hơn độ cản tới hạn ($c \geq c_{cr} = 2k/\omega$), hệ dịch chuyển dần từ vị trí ban đầu về vị trí cân bằng mà không dao động.

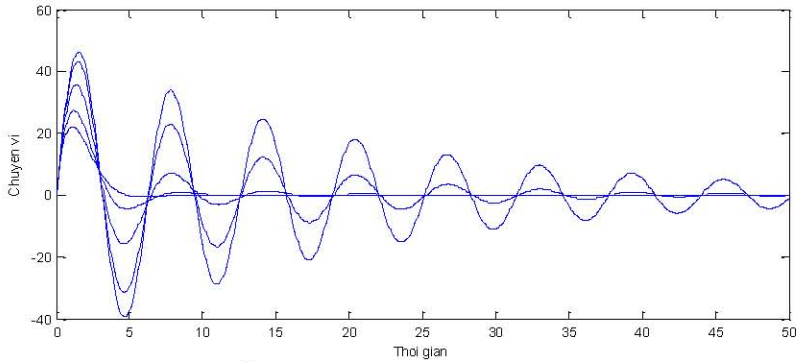
Bài thực hành 3: Xác định chuyển vị hệ một bậc tự do chịu tải trọng xung.

Cho biết khối lượng m , độ cứng k , hệ số cản nhớt c và xung tại thời điểm ban đầu I . Yêu cầu vẽ đồ thị chuyển vị của hệ theo thời gian. Thay đổi các giá trị độ cản và quan sát sự thay đổi ở kết quả dao động.

Lời giải: Bài toán hệ chịu tải trọng xung tương đương với bài toán hệ dao động tự do sau kích thích ban đầu:

$$u_0 = 0; \dot{u}_0 = \frac{I}{m}$$

```
%{  
TAI TRONG XUNG  
%}  
% Khoi luong  
m = 1;  
% Do cung  
k = 1;  
% He so can  
zeta = .05;  
% Xung  
I = 50;  
% Tan so goc  
omega = sqrt(k/m);  
omegaD = omega*sqrt(1-zeta^2);  
% Chuyen vi ban dau (tai thoi diem t = 0)  
u0 = 0;  
% Van toc ban dau  
udot0 = I/m;  
% Tao chuoai thoi gian  
t = 0:.1:50;  
% Chuyen vi  
if (zeta <= 1)  
    u = exp(-zeta*omega*t).*((u0*cos(omegaD*t))+((udot0+zeta*omega*u0)...  
        /omegaD*sin(omegaD*t)));  
    % In ket qua chuyen vi  
    plot(t,u);  
else  
    disp('He so can can nho hon 1');  
end
```



Nhận xét, đánh giá kết quả

Dao động hệ chịu tải trọng xung chính là dao động ở bài thực hành 2 (dao động tự do có cản) với $u_0 = 0$ và $\dot{u}_0 = \frac{I}{m}$.

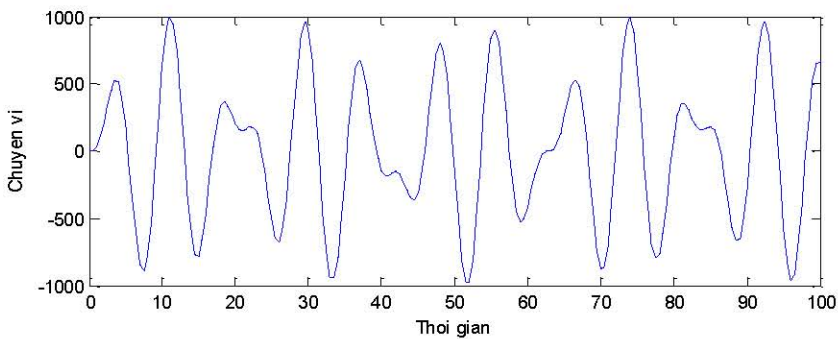
Bài thực hành 4: Xác định chuyển vị hệ một bậc tự do chịu tải trọng điều hòa không cản.

Cho biết khối lượng m , độ cứng k và tải trọng cưỡng bức $p(t) = P_0 \sin(\Omega t)$ với $\frac{\Omega}{\omega} = \beta$, $u_0 = 0$, $\dot{u}_0 = 0$. Yêu cầu vẽ đồ thị chuyển vị ở giai đoạn ổn định của hệ theo thời gian. Thay đổi giá trị β từ 0,5 đến lân cận 1 và quan sát sự thay đổi ở kết quả dao động (quan sát hiện tượng cộng hưởng).

Lời giải: Chuyển vị của hệ ở giai đoạn ổn định:

$$u(t) = \frac{P_0}{k(1-\beta^2)} \sin(\Omega t - \beta \sin \omega t)$$

```
%{
TAI TRONG DIEU HOA - KHONG CAN
%}
% Khoi luong
m = 1;
% Do cung
k = 1;
% Tai trong
P0 = 300;
beta = .7;
% Tan so goc
omega = sqrt(k/m);
% Tao chuoai thoi gian
t = 0:.5:100;
% Chuyen vi
u = P0/k/(1-beta^2)*(sin(beta*omega*t)-beta*sin(omega*t));
% In chuyen vi
plot(t, u);
```



Nhận xét, đánh giá kết quả

Kết quả dao động là tổng hai thành phần dao động với tần số dao động cưỡng bức ($\beta\omega$) và thành phần có tần số dao động tự nhiên của hệ (ω). Hiện tượng cộng hưởng xảy ra khi $\beta \approx 1$. Lúc này biên độ dao động liên tục tăng sau mỗi chu kỳ.

Bài thực hành 5: Xác định chuyển vị hệ một bậc tự do chịu tải trọng điều hòa có cản.

Cho biết khối lượng m , độ cứng k , độ cản ζ và tải trọng cưỡng bức $p(t) = P_0 \sin(\Omega t)$ với $\frac{\Omega}{\omega} = \beta$. Yêu cầu vẽ đồ thị chuyển vị của hệ theo thời gian (bao gồm giai đoạn ban đầu và giai đoạn ổn định). Thay đổi giá trị β từ 0,5 đến lân cận 1 và quan sát sự thay đổi ở kết quả dao động, so sánh với kết quả từ bài thực hành 4.

Lời giải:

Chuyển vị của hệ ở giai đoạn ổn định:

$$u(t) = \frac{P_0}{k} \left[\frac{1 - \beta^2}{(1 - \beta^2)^2 + 4\zeta^2\beta^2} \sin(\Omega t) + \frac{-2\zeta\beta}{(1 - \beta^2)^2 + 4\zeta^2\beta^2} \cos(\Omega t) \right] + e^{-\zeta\omega t} u_0 \sin(\omega t + \varphi_p)$$

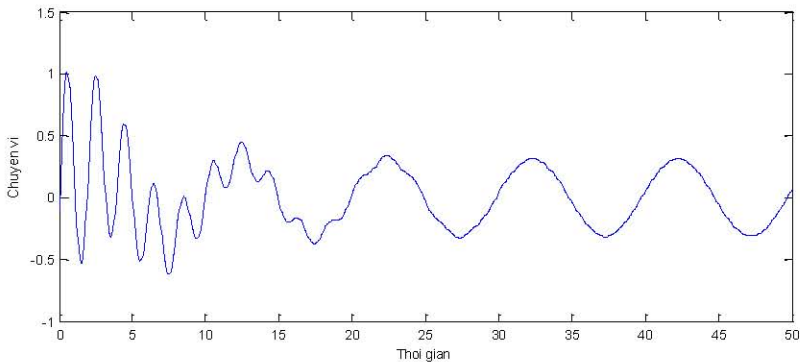
$$\text{với: } \varphi_p = -a \tan \left(\frac{u_0}{\dot{u}_0} \zeta \Omega \omega \right)$$

```
%{
TAI TRONG DIEU HOA - CO CAN
%}
% Khai luong
m = 100;
% Do cung
k = 1000;
% He so can
zeta = 0.05;
% Tai trong
P0 = 300;
beta = .2;
% Tan so goc
```

```

omega = sqrt(k/m);
omegaD = omega*sqrt(1-zeta^2);
% Chuyển vị ban đầu (tại thời điểm t = 0)
u0 = 1;
% Vận tốc ban đầu
udot0 = 1;
% Tạo chuỗi thời gian
t = 0:1:50;
% Chuyển vị
phiP = -atan(u0/udot0*zeta*beta*omega^2);
u = P0/k*((1-beta^2)/((1-beta^2)^2+4*zeta^2*beta^2)*sin(beta*omega*t)...
    +(-2*zeta*beta)/((1-beta^2)^2+4*zeta^2*beta^2)*cos(beta*omega*t))...
    +exp(-zeta*omega*t)*u0.*sin(omega*t+phiP);
% In chuyển vị
plot(t, u);

```



Nhận xét, đánh giá kết quả

Phản ứng của hệ có thể phân biệt thành hai giai đoạn. Giai đoạn đầu ($t < 15$ giây trên ở hình trên), phản ứng của hệ là tổng hai thành phần, dao động với tần số tự nhiên ω và dao động với tần số cưỡng bức Ω . Ở giai đoạn sau, ảnh hưởng của thành phần dao động với tần số ω dần triệt tiêu và hệ dao động ổn định với tần số Ω .

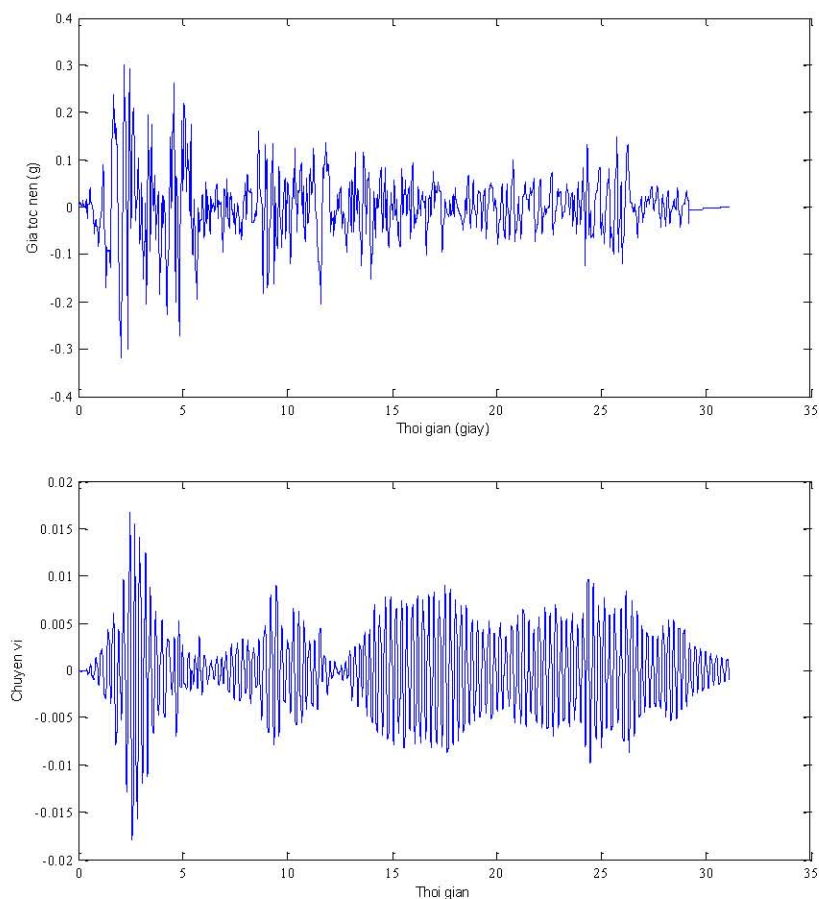
Bài thực hành 6: Sử dụng phương pháp tích phân Duhamel xác định phản ứng của hệ một bậc tự do chịu tải trọng bất kỳ.

Cho biết khối lượng m , độ cứng k , độ cản c . Sử dụng băng ghi gia tốc nền trận động đất El Centro (tập tin elCentro.mat) làm ví dụ.

Lời giải:

```
%{
DAO ĐỘNG HỆ CƠ CÁN CHỊU TẢI TRONG BẤT KỲ
PHƯƠNG PHÁP TÍCH PHÂN DUHAMEL
%}
% tải băng ghi gia tốc El Centro (đơn vị: g)
load elCentro.mat
% khối lượng
m = 10;
% chu kỳ dao động riêng
T = 0.257;
% tan số góc dao động riêng
omega = 2*pi/T;
% độ cản
zeta = .02;
% bước thời gian
dt = .02;
% xung
I = m*dt*u2dotg*9.81;
% khởi tạo chuỗi chuyển vị
u = zeros(size(u2dotg,1),1);
% tích phân Duhamel
for i = 1:size(u2dotg)
    for j = 1:(i-1)
        u(i) = u(i) + exp(-zeta*omega*(i-j)*dt)*I(j)/...
            (omega*m)*sin(omega*(i-j)*dt + pi/2);
    end
end
% in phản ứng chuyển vị
plot(t,u)
```

Tải trọng:



Nhận xét, đánh giá kết quả

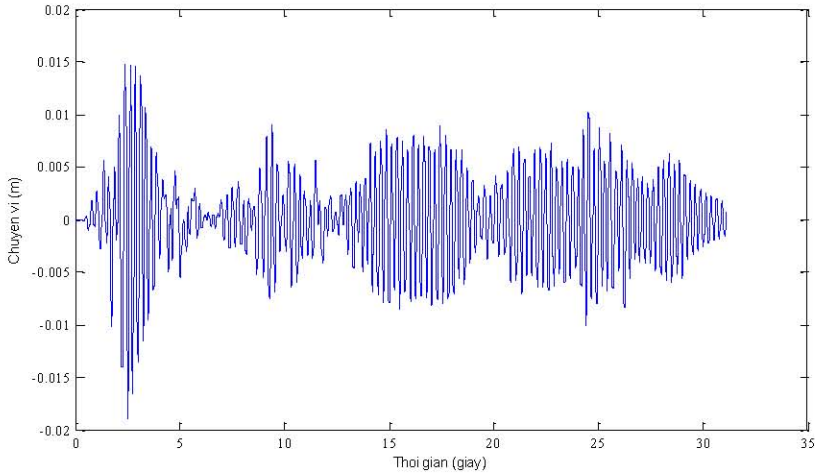
Kết quả phản ứng tính được phù hợp với kết quả từ các tài liệu tham khảo khác (ví dụ [2]).

Bài thực hành 7: Lặp lại bài thí dụ 6 sử dụng phương pháp sai phân trung tâm. So sánh kết quả hai phương pháp Duhamel và sai phân trung tâm trong trường hợp $T > 0,2$ giây và trường hợp $T < 0,06$ giây (để quan sát tính ổn định của lời giải số).

Lời giải:

```
% tai du lieu gian do gia toc nen
load elCentro.mat % don vi: gia toc trong truong
% doi don vi gia toc sang m/s^2
u2dotg = u2dotg*9.81;
% buoc thoi gian
dt = .02;
% do can
zeta = .02;
% thuoc tinh dao dong rieng
T = .257;
omega = 2*pi/T;
% cac hang so cho phuong phap sai phan trung tam
A = -omega^2+2/dt^2;
B = zeta*omega/dt-1/dt^2;
C = 1/dt^2+zeta*omega/dt;
% khoi tao chuoi chuyen vi
u = zeros(size(u2dotg,1),1);
% sai phan trung tam
for i=3:size(u2dotg,1)
    u(i) = (-u2dotg(i-1)+A*u(i-1)+B*u(i-2))/C;
end

plot(t,u); hold on
```



Nhận xét, đánh giá kết quả

- Khi $T > 10 \times \Delta t = 0,2$ giây, kết quả từ phương pháp tích phân Duhamel và phương pháp sai phân trung tâm tương tự nhau.
- Khi $T < \pi \times \Delta t = 0,06$ giây, lời giải sai phân trung tâm không ổn định trong khi phương pháp tích phân Duhamel vẫn còn đúng.

Bài thực hành 8: Sử dụng kết quả chuyển vị lớn nhất tìm được từ bài thực hành 6 để xây dựng phổ phản ứng đàn hồi chuyển vị, vận tốc và gia tốc ứng với băng ghi động đất El Centro.

Lời giải:

Lặp lại bài thực hành 6 cho các giá trị chu kỳ dao động riêng khác nhau.

```
function v = duhamel_function(T, m, zeta, dt, u2dotg)
```

```
% tan so goc
```

```
omega = 2*pi/T;
```

```
% xung
```

```
I = m*dt*u2dotg*9.81;
```

```
% khoi taochuyen vi
v = zeros(size(u2dotg,1),1);
% tích phân Duhamel
for i = 1:size(u2dotg)
    for j = 1:(i-1)
        v(i) = v(i) + exp(-zeta*omega*(i-j)*dt)*I(j)/...
            (omega*m)*sin(omega*(i-j)*dt + pi/2);
    end
end
end

% tai bang ghi dong dat El Centro
load elCentro.mat;
% khoi luon
m = 100;
% he so can
zeta = .02;
% buoc thoi gian
dt = .02;
% dai chu ky
T = .1:.02:3;
% khoi tao tung do pho chuyen vi
D = zeros(1,size(T,2));
% tích phân Duhamel de xac dinh tung do pho chuyen vi
for i = 1:size(T,2)
    v = duhamel_function(T(i), m, zeta, dt, u2dotg);
    D(i) = max(max(v),abs(min(v)));
end
% tinh pho van toc va gia toc tu pho chuyen vi
omega = 1./T;
```

```
V = D.*omega;
```

```
A = V.*omega;
```

```
% In ket qua
```

```
figure
```

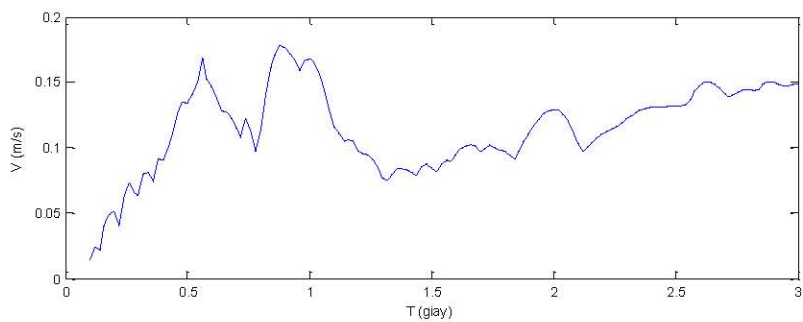
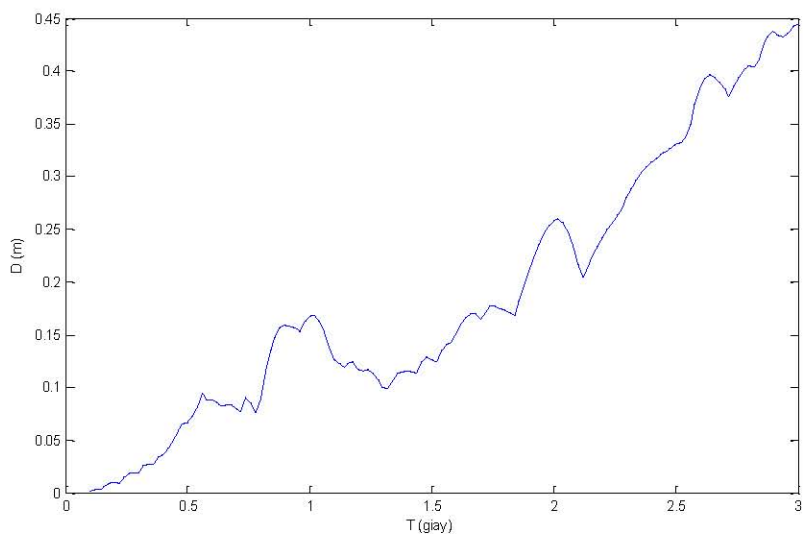
```
plot(T,D)
```

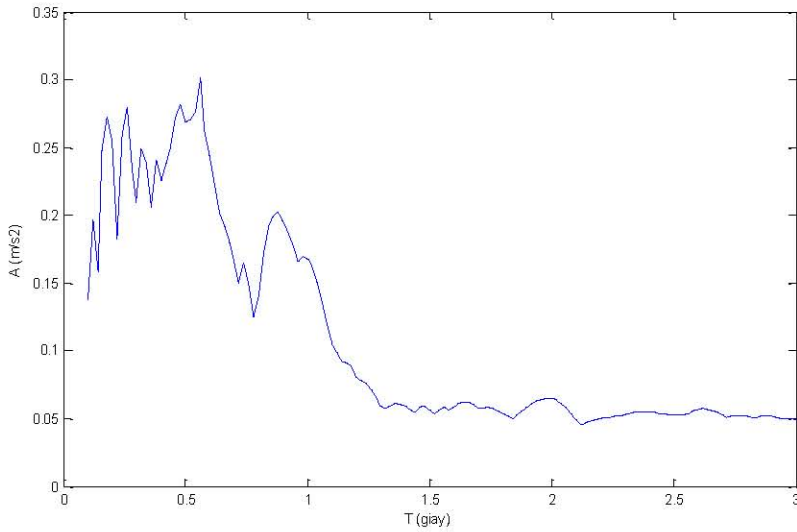
```
figure
```

```
plot(T,V)
```

```
figure
```

```
plot(T,A)
```





Nhận xét, đánh giá kết quả

- Các phổ phản ứng tính được phù hợp với kết quả từ các tài liệu tham khảo khác (ví dụ [2]).
- Phổ phản ứng gia tốc tính được từ băng ghi gia tốc thực có hình dạng tương tự phổ phản ứng thiết kế theo các tiêu chuẩn xây dựng.